

УДК 517.958:539.3(1)



## Динамическая устойчивость нагретых геометрически нерегулярных пластин на основе модели Рейснера

О. А. Мыльцина, А. В. Полюшко, Г. Н. Белосточный

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского  
(национальный исследовательский университет),  
Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83.

### Аннотация

На основе континуальной модели геометрически нерегулярной пластинки в рамках модели типа Рейснера решается задача динамической устойчивости нагретой ребристой пластинки под действием периодических по временной координате тангенциальных усилий. Тангенциальные усилия в уравнениях динамической устойчивости нагретой пластины конкретизируются на основании решения неоднородной краевой задачи безмоментной термоупругости в перемещениях. Система сингулярных уравнений динамической устойчивости записана в функции прогиба и дополнительных функциях, характеризующих закон изменения касательных напряжений в вертикальных плоскостях по переменным  $x$  и  $y$ . Решение сводится к уравнению Матье, параметры которого представлены в терминах классической теории пластин и содержат поправки от температуры, поперечных сдвигов и подкрепляющих ребер. Определяются первые три области динамической устойчивости термоупругой системы. Проводится количественный анализ влияния температуры, деформации сдвига в вертикальных плоскостях и относительной высоты ребер на конфигурацию областей динамической устойчивости.

**Ключевые слова:** термоустойчивость, динамика, нерегулярность, сингулярный, области неустойчивости, континуальный, модель Рейснера, уравнение Матье.

Получение: 21 ноября 2017 г. / Исправление: 12 декабря 2017 г. /

Принятие: 18 декабря 2017 г. / Публикация онлайн: 28 декабря 2017 г.

---

### Краткое сообщение

Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International \(https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

#### Образец для цитирования

Мыльцина О. А., Полюшко А. В., Белосточный Г. Н. Динамическая устойчивость нагретых геометрически нерегулярных пластин на основе модели Рейснера // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 4. С. 760–772. doi: [10.14498/vsgtu1579](https://doi.org/10.14498/vsgtu1579).

#### Сведения об авторах

*Ольга Анатольевна Мыльцина* <http://orcid.org/0000-0003-4718-2772>

кандидат физико-математических наук; ассистент; каф. теории функций и стохастического анализа; e-mail: [omyltsina@yandex.ru](mailto:omyltsina@yandex.ru)

*Асель Валерьевна Полюшко* <http://orcid.org/0000-0001-6949-4174>

ведущий инженер; образовательно-научный институт наноструктур и биосистем

*Григорий Николаевич Белосточный* <http://orcid.org/0000-0003-4471-6599>

доктор технических наук, профессор; профессор; каф. математической теории упругости и биомеханики; e-mail: [belostochny@mail.ru](mailto:belostochny@mail.ru)

Рассмотрим геометрически нерегулярную трансверсально изотропную прямоугольную пластинку со сторонами  $a$  и  $b$ , стандартным образом отнесенную к декартовым координатам с началом в левом нижнем углу пластинки [1–3]. Термоупругая система «пластинка-ребра» нагрета до постоянной температуры  $\theta_0$ , два противоположных края, расположенных по координатным прямым  $x = a$  и  $y = b$ , находятся под действием периодического по временной координате  $t$  силового воздействия в виде нестационарной равномерно распределенной нагрузки заданной интенсивности

$$p(t) = p_1 \cos \vartheta t, \quad (1)$$

где  $p_1$ ,  $\vartheta$  — известные амплитудно-частотные характеристики воздействия. Решение динамической термоустойчивости геометрически нерегулярной пластины на основе модели типа Рейснера [4, 5] сводится к интегрированию системы сингулярных дифференциальных уравнений, полученных вариационным путем на базе континуальной модели тонкостенных упругих систем [6–9]:

$$\begin{aligned} \Psi_{1,1} + \Psi_{2,2} + \sum_{i=1}^n \frac{h_1}{h} a_i \Psi_{2,2} \delta(x - x_i) = -\frac{12}{h^3} T^{22} \left( 1 + \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{h} a_i \delta(x - x_i) \right) w_{,22} - \\ - \frac{12}{h^3} T^{11} w_{,11} + \frac{12\gamma}{gh^2} \left( 1 + \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{h} a_i \delta(x - x_i) \right) w_{,tt}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\nabla^2 w)_{,1} - \frac{h^2}{10G'} \left( \Psi_{1,11} + \frac{1-\nu}{2} \Psi_{1,22} + \frac{1+\nu}{2} \Psi_{2,12} \right) + \frac{h^3}{12D} \Psi_1 + \\ + 2(1-\nu) \sum_{i=1}^n \Phi_{3i} \left( \frac{h_i}{h} \right)^3 a_i \left( w_{,1} - \frac{h^2}{10G'} \Psi_1 \right)_{,22} \delta(x - x_i) = 0, \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\nabla^2 w)_{,2} - \frac{h^2}{10G'} \left( \Psi_{2,22} + \frac{1-\nu}{2} \Psi_{2,11} + \frac{1+\nu}{2} \Psi_{1,12} \right) + \frac{h^3}{12D} \Psi_2 + \\ + \sum_{i=1}^n \left( \Phi_{3i} \left( \frac{h_i}{h} \right)^3 a_i \left( w_{,2} - \frac{h^2}{10G'} \Psi_2 \right)_{,22} \right) \delta(x - x_i) = 0, \end{aligned}$$

где  $\delta(x - x_i)$  — дельта-функция Дирака [10];  $\Psi_j(x, y, t)$ ,  $j = 1, 2$  — искомые функции, связанные с обобщенными углами поворота нормали к срединной поверхности пластинки равенствами [4, 11]

$$\gamma_j = w_{,j} - \frac{h^2}{10G'} \Psi_j;$$

$h$  — толщина пластинки;  $G'$  — модуль сдвига в плоскостях, перпендикулярных к срединной плоскости пластинки;  $w(x, y, t)$  — функция прогиба;

$$\Phi_{3i} = 1 + 3 \frac{h}{h_i} + 3 \left( \frac{h}{h_i} \right)^2;$$

$n$  — число ребер;  $h_i$  и  $a_i$  — соответственно высота и ширина подкрепляющих ребер;  $\gamma$  — удельный вес;  $g$  — интенсивность поля тяжести;

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)};$$

$E$  — модуль упругости;  $\nu$  — коэффициент Пуассона, индексы 1 и 2 после запятой означают частные производные от функций по переменным  $x$  и  $y$  соответственно.

Входящие в динамические уравнения (2) усилия  $T^{11}$  и  $T^{22}$  предварительно определяются на основании решения безмоментной неоднородной краевой задачи геометрически нерегулярной пластинки:

$$\begin{aligned} u_{,11} + \frac{1 - \nu}{2} u_{,22} + \frac{1 + \nu}{2} v_{,12} + \frac{1 - \nu}{2} \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{h} a_i (u_{,2} + v_{,1})_{,2} \delta(x - x_i) &= 0, \\ v_{,22} + \frac{1 - \nu}{2} v_{,11} + \frac{1 + \nu}{2} u_{,12} + \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{h} a_i (v_{,2} + \nu u_{,1})_{,2} \delta(x - x_i) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Сингулярные уравнения (3) записаны на основании стандартного предположения о неучете тангенциальных сил инерции [12, 13] и постоянной, как отмечалось выше, температуры. Решение этих уравнений, тождественно удовлетворяющих краевым условиям

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0, x = a: \quad T^{12} = 0, \quad T^{11} = -p(t), \\ \text{при } y = 0, y = b: \quad v = 0, \quad T^{12} = 0, \end{aligned}$$

которые переписутся в компонентах поля перемещений в виде

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0, x = a: \quad u_{,2} + v_{,1} = 0, \quad u_{,1} + \nu v_{,2} = \alpha(1 + \nu)\theta_0 - \frac{p(t)}{B}, \\ \text{при } y = 0, y = b: \quad v = 0, \quad u_{,2} + v_{,1} = 0, \end{aligned}$$

запишутся в элементарных функциях:

$$v = 0, \quad u = \alpha(1 + \nu)\theta_0 x - \frac{p(t)}{B} x. \quad (4)$$

Тангенциальные усилия в системе (2) на основании решений (4) примут вид

$$T^{12} = 0, \quad T^{11} = -p(t), \quad T^{22} = -(Eh\alpha\theta_0 + \nu p(t)).$$

Здесь  $B = Eh/(1 - \nu^2)$ ,  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения материала при нагреве,  $p(t)$  определяется формулой (1).

Решения системы дифференциальных уравнений (2), тождественно удовлетворяющие условиям шарнирного закрепления сторон пластинки

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0, x = a: \quad w = 0, \quad M^{11} = 0, \quad \Psi_2 = 0, \\ \text{при } y = 0, y = b: \quad w = 0, \quad M^{22} = 0, \quad \Psi_1 = 0, \end{aligned}$$

зададим в виде

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= \sum_{km} w_{km}(t) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \\ \Psi_1(x, y, t) &= \sum_{km} \Psi_{km}^1(t) \cos \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \\ \Psi_2(x, y, t) &= \sum_{km} \Psi_{km}^2(t) \sin \frac{k\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $M^{jj}$ ,  $j = 1, 2$  — изгибающие моменты, связанные с обобщенными углами поворота равенствами

$$M^{jj} = -D(\gamma_{j,j} + \nu\gamma_{l,l}), \quad j \neq l = 1, 2.$$

Подстановка (5) в уравнения системы (2) с использованием процедуры Галеркина по пространственной переменной  $x$  приводит к системе трех уравнений относительно коэффициентов  $w_{km}(t)$ ,  $\Psi_{km}^j(t)$ . Два последних уравнения этой системы (не содержат производных по временной координате) перепишем в виде

$$\begin{aligned} a_{11}\Psi_{km}^1 + a_{12}\Psi_{km}^2 &= b_1 w_{km}, \\ a_{21}\Psi_{km}^1 + a_{22}\Psi_{km}^2 &= b_2 w_{km}, \end{aligned}$$

где

$$a_{11} = \frac{h^3}{12D} \left( \frac{E}{G'} \left( \frac{h^2}{10(1-\nu^2)} \left( \left( \frac{k\pi}{a} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 \right) + \frac{6}{5} \left( \frac{m\pi h}{b} \right)^2 \sum_{i=1}^n \beta_i^c \right) + 1 \right),$$

$$\begin{aligned} a_{22} &= \frac{h^3}{12D} \left( \frac{E}{G'} \left( \frac{h^2}{10(1-\nu^2)} \left( \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{k\pi}{a} \right)^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(m\pi)^2}{10(1-\nu^2)} \left( \frac{h}{b} \right)^2 \sum_{i=1}^n \beta_i^s \right) + 1 \right), \end{aligned}$$

$$a_{21} = a_{12} = \frac{h^2}{G'} \frac{1+\nu}{20} \frac{km\pi^2}{ab},$$

$$b_1 = \left( \frac{k\pi}{a} \right)^3 + \frac{k\pi}{a} \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 + 2(1-\nu) \frac{k\pi}{a} \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 \sum_{i=1}^n \beta_i^c,$$

$$b_2 = \left( \frac{m\pi}{b} \right)^3 + \frac{m\pi}{b} \left( \frac{k\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{b} \right)^3 \sum_{i=1}^n \beta_i^s.$$

Здесь и далее

$$\beta_i^s = \Phi_{3i} \left( \frac{h_i}{h} \right)^3 \frac{a_i}{a} \sin^2 \frac{k\pi x_i}{a}, \quad \beta_i^c = \Phi_{3i} \left( \frac{h_i}{h} \right)^3 \frac{a_i}{a} \cos^2 \frac{k\pi x_i}{a}.$$

Выражения функций  $\Psi_{km}^j(t)$ ,  $j = 1, 2$ , через  $w_{km}(t)$  запишутся так:

$$\Psi_{km}^1(t) = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{21}^2} w_{km}(t), \quad \Psi_{km}^2(t) = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{21}^2} w_{km}(t). \quad (6)$$

На основании (6) первое уравнение системы, содержащее производную по временной координате, преобразуется к виду

$$\frac{\gamma h a^2}{g} \frac{d^2 w_{km}}{dt^2} + \left( (k\pi)^2 T^{11} + \left( \frac{m\pi a}{b} \right)^2 T^{22} + \frac{Eh}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{h}{a} \right)^2 L_4^{km} \right) w_{km} = 0, \quad (7)$$

где

$$L_4^{km} = \left( (k\pi)^2 + \left( \frac{m\pi a}{b} \right)^2 \right)^2 \tilde{p}(G', a_i).$$

Здесь

$$\tilde{p}(G', a_i) = \left( 1 + \frac{L_1^{km}(G', a_i)}{\left( (k\pi)^2 + (m\pi a/b)^2 \right)^2} \right) \left( 1 + L_2^{km}(G', a_i) \right)^{-1},$$

$$\tilde{p}(G', a_i) = 1 \quad \text{при } G' \rightarrow \infty, a_i = 0,$$

а  $L_j^{km}(G', a_i)$ ,  $j = 1, 2$  — безразмерные величины, содержащие параметры  $G'$  и  $a_i/a$ , и такие, что  $L_j^{km}(G', a_i) = 0$  при  $G' \rightarrow \infty, a_i = 0$ :

$$\begin{aligned} L_1^{km}(G', a_i) = & \left( (k\pi)^4 + (k\pi)^2 \left( \frac{m\pi a}{b} \right)^2 \right) \times \\ & \times \left( \frac{(h/a)^2}{10(1-\nu^2)} \left( \left( \frac{m\pi a}{b} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} (k\pi)^2 \right) + \frac{(m\pi)^2}{5(1-\nu^2)} \left( \frac{h}{b} \right)^2 \sum_{i=1}^n \beta_i^s \right) \frac{E}{G'} + \\ & + 12(1-\nu^2)(k\pi)^2 \left( \frac{m\pi a}{b} \right)^2 \sum_{i=1}^n \beta_i^c \left( \frac{E}{G'} \left( \frac{(h/a)^2}{10(1-\nu^2)} \left( \left( \frac{m\pi a}{b} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} (k\pi)^2 \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(m\pi)^2}{5(1-\nu^2)} \left( \frac{h}{b} \right)^2 \sum_{i=1}^n \beta_i^s \right) + 1 \right) - \\ & - \left( \left( \frac{m\pi a}{b} \right)^3 + \frac{m\pi a}{b} (k\pi)^2 + \left( \frac{m\pi a}{b} \right)^3 \sum_{i=1}^n \beta_i^s \right) \frac{k m \pi^2}{20(1-\nu^2)} \frac{h}{a} \frac{h}{b} \frac{E}{G'} + \\ & + \left( \left( \frac{m\pi a}{b} \right)^4 + (k\pi)^2 \left( \frac{m\pi a}{b} \right)^2 \right) \left( \frac{(h/a)^2}{10(1-\nu^2)} \left( (k\pi)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{m\pi a}{b} \right)^2 \right) + \right. \\ & \left. + \frac{6}{5} (m\pi)^2 \left( \frac{h}{b} \right)^2 \sum_{i=1}^n \beta_i^c \right) \frac{E}{G'} + \\ & + 2 \left( \frac{m\pi a}{b} \right)^4 \sum_{i=1}^n \beta_i^s \left( \left( \frac{(h/a)^2}{10(1-\nu^2)} \left( (k\pi)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{m\pi a}{b} \right)^2 \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{6}{5} (m\pi)^2 \left( \frac{h}{b} \right)^2 \sum_{i=1}^n \beta_i^c \right) \frac{E}{G'} + 1 \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left( (k\pi)^3 + k\pi \left( \frac{m\pi a}{b} \right)^2 + 12(1 - \nu^2)k\pi \left( \frac{m\pi a}{b} \right)^2 \sum_{i=1}^n \beta_i^c \right) \frac{km\pi^2}{20(1 - \nu^2)} \frac{h}{a} \frac{h}{b} \frac{E}{G'}, \\
 L_2^{km}(G', a_i) = & \frac{E}{G'} \left( \frac{(h/a)^2}{10(1 - \nu^2)} \left( (k\pi)^2 + \frac{1 - \nu}{2} \left( \frac{m\pi a}{b} \right)^2 \right) + \right. \\
 & + \frac{6}{5} (m\pi)^2 \left( \frac{h}{b} \right)^2 \sum_{i=1}^n \beta_i^c + \frac{(h/a)^2}{10(1 - \nu^2)} \left( \left( \frac{m\pi a}{b} \right)^2 + \frac{1 - \nu}{2} (k\pi)^2 \right) + \\
 & \left. + \frac{(m\pi)^2}{5(1 - \nu^2)} \left( \frac{h}{b} \right)^2 \sum_{i=1}^n \beta_i^s \right) + \\
 & + \left( \frac{E}{G'} \right)^2 \left( \frac{(h/a)^2}{10(1 - \nu^2)} \left( (k\pi)^2 + \frac{1 - \nu}{2} \left( \frac{m\pi a}{b} \right)^2 \right) + \frac{6}{5} (m\pi)^2 \left( \frac{h}{b} \right)^2 \sum_{i=1}^n \beta_i^c \right) \times \\
 & \times \left( \frac{(h/a)^2}{10(1 - \nu^2)} \left( \left( \frac{m\pi a}{b} \right)^2 + \frac{1 - \nu}{2} (k\pi)^2 \right) + \frac{(m\pi)^2}{5(1 - \nu^2)} \left( \frac{h}{b} \right)^2 \sum_{i=1}^n \beta_i^s \right) - \\
 & - \frac{(km\pi^2)^2 (1 + \nu)^2}{400(1 - \nu^2)^2} \left( \frac{h}{a} \right)^2 \left( \frac{h}{b} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Для дальнейшего отметим, что убирая в уравнении (7) слагаемые, содержащие вторую производную по временной координате, получим уравнение для определения критических сил (или температур) для ребристой пластинки на основе модели типа Рейснера, при достижении которых возможен скачкообразный переход к новой форме равновесия с числом полуволн  $k$  и  $m$ , которое запишется следующим образом:

$$(k\pi)^2 T^{11} + \left( \frac{m\pi a}{b} \right)^2 T^{22} + \frac{Eh}{12(1 - \nu^2)} \left( \frac{h}{a} \right)^2 L_4^{km} = 0.$$

Действительно, при тех же краевых условиях получим два случая.

Случай 1. При  $\theta_0 = 0$  и  $\vartheta = 0$ :  $T^{11} = -p_1$ ,  $T^{22} = -\nu p_1$ ; относительная критическая нагрузка по модели Рейснера вычисляется по формуле

$$\left( \frac{p_1}{Eh} \right)_{\text{cr}}^R = \frac{(h/a)^2}{12(1 - \nu^2)} \frac{((k\pi)^2 + (m\pi a/b)^2)^2}{(k\pi)^2 + \nu(m\pi a/b)^2} \tilde{p}(G', a_i). \quad (8)$$

Полагая  $G' \rightarrow \infty$ ,  $a_i = 0$ , получим критическую нагрузку для гладкой пластинки на основе модели Лява. Тогда (8) примет вид

$$\left( \frac{p_1}{Eh} \right)_{\text{cr}}^R = \tilde{p}(G', a_i) \left( \frac{p_1}{Eh} \right)_{\text{cr}}^L. \quad (9)$$

Случай 2. Если  $\theta_0 \neq 0$  и  $p_1 = 0$ , то выражение для относительной критической температуры запишется в виде

$$(\theta_0 \alpha)_{\text{cr}}^R = \frac{(h/a)^2}{12(1 - \nu^2)} \frac{((k\pi)^2 + (m\pi a/b)^2)^2}{(m\pi a/b)^2} \tilde{p}(G', a_i).$$

При тех же предположениях получим

$$(\theta_0 \alpha)_{\text{cr}}^R = \tilde{p}(G', a_i) (\theta_0 \alpha)_{\text{cr}}^L. \quad (10)$$

Убирая в уравнении (7) слагаемые с тангенциальными усилиями, получим выражение для квадрата частоты собственных колебаний пластинки в рамках модели Рейснера:

$$(\omega_{km}^R)^2 = \frac{Eh}{12(1-\nu^2)} \frac{g}{\gamma h a^2} \left( (k\pi)^2 + \left( \frac{m\pi a}{b} \right)^2 \right)^2 \tilde{p}(G', a_i) \quad (11)$$

или

$$(\omega_{km}^R)^2 = \tilde{p}(G', a_i) (\omega_{km}^L)^2,$$

где  $\omega_{km}^L$  — частота собственных колебаний гладкой пластинки на базе классической теории пластин.

Изложенное выше и вид  $p(t)$  позволяют переписать уравнение (7):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_{km}}{dt^2} + \frac{gE}{\gamma a^2} \frac{(h/a)^2}{12(1-\nu^2)} \left( (k\pi)^2 + \left( \frac{m\pi a}{b} \right)^2 \right)^2 \tilde{p}\left(\frac{E}{G'}, \frac{a_i}{a}\right) \times \\ \times \left( 1 - \frac{\theta_0}{(\theta_0)_{\text{cr}}^R} \right) \left( 1 - \frac{p_1}{(p_1)_{\text{cr}}^R (1 - \theta_0/(\theta_0)_{\text{cr}}^R)} \cos \vartheta t \right) w_{km}(t) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

или, в стандартных обозначениях, уравнение Матье (12) запишется так [4, 14]:

$$\frac{d^2 w_{km}}{dt^2} + \Omega_{km}^2 (1 - 2\mu_{km} \cos \vartheta t) w_{km}(t) = 0,$$

где

$$\Omega_{km} = \omega_{km}^R \sqrt{1 - \theta_0/(\theta_0)_{\text{cr}}^R} \quad (13)$$

— частота собственных колебаний геометрически нерегулярной нагретой пластинки с учетом влияния поперечных сдвигов,

$$\mu_{km} = \frac{p_1}{2(p_1)_{\text{cr}}^R (1 - \theta_0/(\theta_0)_{\text{cr}}^R)} \quad (14)$$

— коэффициент возбуждения геометрически нерегулярной пластинки с учетом влияния поперечных сдвигов и температуры.

Таким образом, решение динамической задачи нагретой геометрически нерегулярной пластинки под действием периодических по временной координате силовых воздействий сведено к уравнению Матье [14, 15], которое при некоторых соотношениях между его параметрами  $\Omega_{km}$ ,  $\mu_{km}$  и  $\vartheta$  допускает неограниченно возрастающие решения, заполняющие целые области [14].

Определение границ, ограничивающих области динамической неустойчивости с помощью подстановок для  $w_{km}(t)$  вида

$$\sum_{l=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( a_l \sin \frac{l\vartheta t}{2} + b_l \cos \frac{l\vartheta t}{2} \right)$$

в случае решения с периодом  $2T$  и

$$b_0 + \sum_{l=2,4,6,\dots}^{\infty} \left( a_l \sin \frac{l\vartheta t}{2} + b_l \cos \frac{l\vartheta t}{2} \right)$$

в случае решения с периодом  $T$  [14] в уравнение Матье (12), позволит с любой точностью определять границы областей динамической неустойчивости. Из равенств нулю определителей однородных алгебраических систем для коэффициентов  $a_l$ ,  $b_l$  и  $b_0$  следуют формулы для границ  $\vartheta^*$  первых трех областей динамической неустойчивости [3, 14], которые с учетом полученных формул (9)–(11), (13), (14) преобразуются к следующему виду:

I область:

$$\vartheta^* = 2\omega_{km}^L \sqrt{\tilde{p} - \theta_0 / (\theta_0^L)_{cr} \pm \mu_{km}^*}; \quad (15)$$

II область:

$$\begin{aligned} \vartheta^* &= \omega_{km}^L \sqrt{\tilde{p} - \frac{\theta_0}{(\theta_0^L)_{cr}} + \frac{1}{3} \frac{(\mu_{km}^*)^2}{\tilde{p} - \theta_0 / (\theta_0^L)_{cr}}}, \\ \vartheta^* &= \omega_{km}^L \sqrt{\tilde{p} - \frac{\theta_0}{(\theta_0^L)_{cr}} - 2 \frac{(\mu_{km}^*)^2}{\tilde{p} - \theta_0 / (\theta_0^L)_{cr}}}; \end{aligned} \quad (16)$$

III область:

$$\vartheta^* = \frac{2}{3} \omega_{km}^L \sqrt{\tilde{p} - \frac{\theta_0}{(\theta_0^L)_{cr}} - \frac{9(\mu_{km}^*)^2}{8(\tilde{p} - \theta_0 / (\theta_0^L)_{cr}) \pm 9\mu_{km}^*}}, \quad (17)$$

где  $\mu_{km}^* = p_1 / (2(p_1^L)_{cr})$  — коэффициент возбуждения для гладкой ненагретой пластинки ( $\theta_0 = 0$ ) на основе классической теории гладких пластин.

Особенность формул (15)–(17) заключается в том, что они записаны в терминах классической теории пластин с учетом поправок на влияние температуры, относительной высоты ребер и учета поперечных сдвигов при различных соотношениях сторон ( $a/b$ ) и форм прогиба пластины ( $k, m$ ).

Количественные результаты, полученные на основании формул (15)–(17), представлены на рис. 1, 2 в осях  $\mu = \mu_{11}^*$  и  $\vartheta/\omega = \vartheta^*/\omega_{11}^L$  для случая квадратной пластины ( $a/b = 1$ ), когда по направлениям координатных прямых возникает только по одной полуволне ( $k = 1, m = 1$ ), при следующих значениях параметров:  $x_1 = a/2$ ,  $a_1/a = 0.01$ ,  $a/h = 50$ ,  $\nu = 0.3$ . Залитые цветом области, ограниченные кривыми (15)–(17), — области динамической неустойчивости: первая область неустойчивости — наибольшая верхняя область, соответствующая (15), вторая область расположена ниже и получается по формулам (16), третья область соответствует (17).

Из данных, представленных на рисунках, следует, что конфигурации областей динамической неустойчивости малочувствительны к изменению перечисленных параметров. Во всех рассмотренных случаях области динамической неустойчивости для подкрепленной пластины располагаются выше областей динамической неустойчивости, полученных для гладкой пластины, при

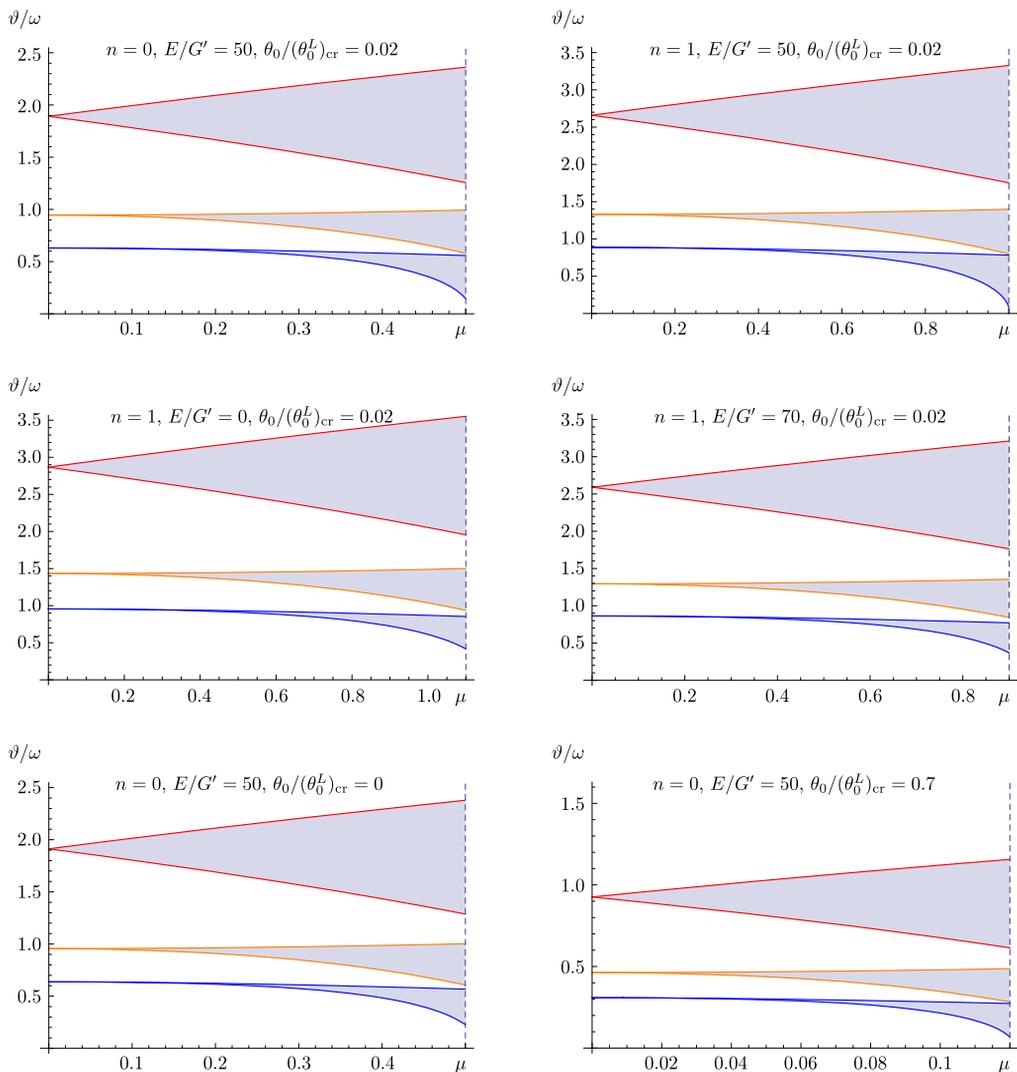


Рис. 1. Области динамической неустойчивости (залиты цветом; см. формулы (15)–(17)) квадратной пластины ( $a/b = 1$ ) при различных параметрах; расчеты выполнены для  $x_1 = a/2$ ,  $a_1/a = 0.01$ ,  $a/h = 50$ ,  $\nu = 0.3$  [Figure 1. Dynamic instability regions (flooded with color; see Eqs. (15)–(17)) of a square plate ( $a/b = 1$ ) at various parameters; the calculations are performed for the following values of parameters:  $x_1 = a/2$ ,  $a_1/a = 0.01$ ,  $a/h = 50$ ,  $\nu = 0.3$ ]

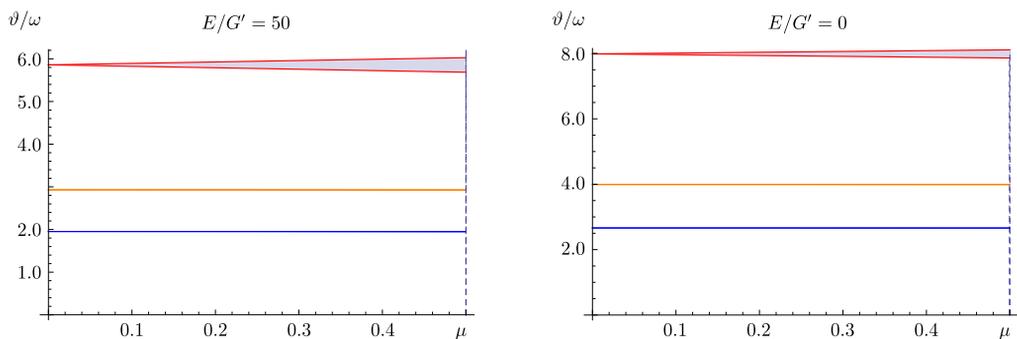


Рис. 2. Скелетные линии при различных параметрах; расчеты выполнены для  $n = 5$ ,  $x_{i+1} - x_i = a/6$ ,  $\theta_0/(\theta_0^L)_{cr} = 0.02$  [Figure 2. Skeletal lines at various parameters; the calculations are performed for the following values of parameters:  $n = 5$ ,  $x_{i+1} - x_i = a/6$ ,  $\theta_0/(\theta_0^L)_{cr} = 0.02$ ]

прочих равных условиях. С увеличением параметров  $\theta_0/\theta_{cr}$  и  $E/G'$  области динамической неустойчивости смещаются вниз по оси  $\vartheta/\omega$  (рис. 1), что согласуется с результатами, приведенным в работе [16], а также известному факту: величины критических температур, при достижении которых происходит статическая потеря термоустойчивости геометрически нерегулярных пластин и оболочек, растет с увеличением параметра  $h_i/h$  [17]. При определенных значениях параметра  $h_i/h$  и числа ребер жесткости возможно вырождение областей динамической неустойчивости в скелетные линии (рис. 2).

**Конкурирующие интересы.** Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

**Авторский вклад и ответственность.** Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

**Финансирование.** Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России № 9.8570.2017/8.9.

## Библиографический список

1. Белосточный Г. Н. Об одном варианте модели Рейснера геометрически нерегулярных оболочек с термочувствительной толщиной / *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред*: Материалы III международного симпозиума. М.: ЛАТМЭС МГАТУ, 1997. С. 19–21.
2. Белосточный Г. Н., Шкабров И. В. Основные уравнения несвязной термоупругости оболочки с термочувствительной толщиной / *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред*: Избранные доклады IV международного симпозиума. М.: ГРАФРОС, 1998. С. 65–69.
3. Белосточный Г. Н., Цветкова О. А. Геометрически нерегулярные пластинки под действием периодического по времени температурного поля / *Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред*. Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 2002. С. 64–72.
4. Амбарцумян С. А. *Теория анизотропных пластин*. М.: Наука, 1967. 266 с.
5. Reissner E. Reflections on the Theory of Elastic Plates // *Appl. Mech. Rev.*, 1985. vol. 38, no. 11. pp. 1453–1464. doi: [10.1115/1.3143699](https://doi.org/10.1115/1.3143699).
6. Жилин П. А. Линейная теория ребристых оболочек // *Изв. АН СССР. МТТ*, 1970. № 4. С. 150–162.

7. Белосточный Г. Н., Ульянова О. И. Континуальная модель композиции из оболочек вращения с термочувствительной толщиной // *Изв. РАН. МТТ*, 2011. № 2. С. 32–40.
8. Белосточный Г. Н., Мыльцина О. А. Уравнения термоупругости композиций из оболочек вращения // *Вестник СГТУ*, 2011. № 4(59). Выпуск 1. С. 56–64.
9. Белосточный Г. Н., Пономарев В. А. *Уточненная теория пластин с быстроизменяющимся профилем поперечного сечения и пластин подкрепленных ребрами жесткости сложного очертания (секвенциальный подход)*: Деп. в ВИНТИ 6.06.83 № 3071–83, 1983. 15 с.
10. Antosik P., Mikusinski J., Sikorski R. *Theory of distributions. The sequential approach*. Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Company, 1973. xiv+273 pp.
11. Рассудов В. М., Красюков В. П., Панкратов Н. Д. *Некоторые задачи термоупругости пластинок и пологих оболочек*. Саратов: Сарат. ун-т, 1973. 154 с.
12. Огибалов П. М., Грибанов В. Ф. *Термоустойчивость пластин и оболочек*. М.: МГУ, 1958. 520 с.
13. Огибалов П. М. *Вопросы динамики и устойчивости оболочек*. М.: МГУ, 1963. 417 с.
14. Болотин В. В. *Динамическая устойчивость упругих систем*. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.
15. Strutt M. J. O. *Lame, Mathieu and Related Functions in Physics and Technology*. Berlin: Springer, 1932.
16. Белосточный Г. Н., Русина Е. А. Динамическая термоустойчивость трансверсально-изотропных пластин под действием периодических нагрузок / *Современные проблемы нелинейной механики конструкций, взаимодействующих с агрессивными средами*: Сб. науч. тр. межвуз. науч. конф. Саратов, 2000. С. 175–180.
17. Белосточный Г. Н., Рассудов В. М. О потере устойчивости подкрепленных, жестко заделанных по всему контуру ортотропных пластин с учетом влияния поперечных сдвигов / *Механика деформируемых сред*: Межвузовск. научн. сборн. Саратов: Сарат. ун-т, 1982. С. 66–69.

MSC: 74F05, 74K20

## Dynamic stability of heated geometrically irregular plates on the basis of the Reissner model

*O. A. Myltcina, A. V. Polienko, G. N. Belostochny*

N. G. Chernyshevsky Saratov State University (National Research University), 83, Astrakhanskaya st., Saratov, 410012, Russian Federation.

### Abstract

On the basis of the continuum model of geometrically irregular plate the problem of dynamic stability has been solved. The Reissner type model is considered. The heated plate with ribs is subjected to periodic temporary coordinate of the tangential forces. For the tangential forces a non-homogeneous boundary problem of membrane thermoelasticity in displacements is solved. The system of singular equations of dynamic stability recorded through the function of the deflection and additional functions. The additional functions characterize the law of change of stresses in vertical planes dependent variables  $x$  and  $y$ . The solution is reduced to the Mathieu equation. The characteristics of the Mathieu equation represented by terms in classical theory of plates and contain corrections of temperature, transverse shear and ribs. Three areas of dynamic stability of the thermoelastic system are determined. Quantitative analysis has been carried out. Dependence of the configuration of the areas of dynamic stability on temperature, shear deformation in vertical planes and relative height of ribs is presented.

**Keywords:** thermal stability, dynamics, irregularity, singularity, instability areas, Reissner model, Mathieu equation.

Received: 21<sup>st</sup> November, 2017 / Revised: 12<sup>th</sup> December, 2017 /Accepted: 18<sup>th</sup> December, 2017 / First online: 28<sup>th</sup> December, 2017

**Competing interests.** We declare that we have no conflicts of interests with the authorship and publication of this article.

**Authors' contributions and responsibilities.** Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

### Short Communication

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

**Please cite this article in press as:**

Myltcina O. A., Polienko A. V., Belostochny G. N. Dynamic stability of heated geometrically irregular plates on the basis of the Reissner model, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 4, pp. 760–772. doi: [10.14498/vsgtu1579](https://doi.org/10.14498/vsgtu1579) (In Russian).

**Authors' Details:**

*Olga A. Myltcina*   <http://orcid.org/0000-0003-4718-2772>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Assistant; Dept. of Functions & Approximation Theory; e-mail: [omyltcina@yandex.ru](mailto:omyltcina@yandex.ru)

*Acel V. Polienko*  <http://orcid.org/0000-0001-6949-4174>

Senior Engineer; Institute of Nanostructures & Biosystems

*Grigory N. Belostochny*  <http://orcid.org/0000-0003-4471-6599>

Dr. Techn. Sci.; Professor; Dept. of Mathematic Theory of Elasticity & Biomechanics; e-mail: [belostochny@mail.ru](mailto:belostochny@mail.ru)

**Funding.** The results were obtained within the framework of the state task of Russian Ministry of Education and Science (project no. 9.8570.2017/8.9).

## References

1. Belostochny G. N. On one version of the Reissner model of geometrically irregular shells with a temperature-sensitive thickness, In: *Dynamic and technological problems of the mechanics of structures and continuous media*, Materials of the 3rd International Symposium. Moscow, 1997, pp. 19–21 (In Russian).
2. Belostochny G. N., Shkabrov I. V. Basic equations of uncoupled thermoelasticity of shells of thermosensitive thickness, In: *Dynamic and technological problems of the mechanics of structures and continuous media*, Selected reports of the 4rd International Symposium. Moscow, 1998, pp. 65–69 (In Russian).
3. Belostochny G. N., Tsvetkova O. A. Geometrically irregular plates under the action of a time-periodic temperature field, In: *Problemy prochnosti elementov konstruksii pod deistviem nagruzok i rabochikh sred* [Problems of strength of structural elements under the influence of loads and working media]. Saratov, Saratov State Techn. Univ., 2002, pp. 64–72 (In Russian).
4. Ambartsumian S. A. *Teoriia anizotropnykh plastin* [Theory of Anisotropic Plates]. Moscow, Nauka, 1967, 266 pp. (In Russian)
5. Reissner E. 4 Reflections on the Theory of Elastic Plates, *Appl. Mech. Rev.*, 1985, vol. 38, no. 11, pp. 1453–1464. doi: [10.1115/1.3143699](https://doi.org/10.1115/1.3143699).
6. Zhilin P. A. Linear theory of ribbed shells, *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1970, no. 4, pp. 150–162 (In Russian).
7. Belostochnyi G. N., Ul'yanova O. I. Continuum model for a composition of shells of revolution with thermosensitive thickness, *Mech. Solids*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 184–191. doi: [10.3103/S0025654411020051](https://doi.org/10.3103/S0025654411020051).
8. Belostochny G. N., Myl'tsina O. A. Equations of thermoelasticity of compositions of shells of revolution, *Vestnik SGTU*, 2011, no. 4(59). Issue 1, pp. 56–64 (In Russian).
9. Belostochny G. N., Ponomarev V. A. *A refined theory of plates with a rapidly changing cross-sectional profile and plates reinforced with stiffening ribs of complex outline. The sequential approach*, Preprint No. 3071–83; deposited at VINITI from 6 June 1983, 1983, 15 pp. (In Russian)
10. Antosik P., Mikusinski J., Sikorski R. *Theory of distributions. The sequential approach*. Amsterdam, Elsevier Scientific Publishing Company, 1973, xiv+273 pp.
11. Rassudov V. M., Krasiukov V. P., Pankratov N. D. *Nekotorye zadachi termouprugosti plastinok i plogikh obolochek* [Some problems of thermoelasticity of plates and sloping shells]. Saratov, Saratov Univ., 1973, 154 pp. (In Russian)
12. Ogibalov P. M., Griбанov V. F. *Termoustoichivost' plastin i obolochek* [Thermal Stability of Plates and Shells]. Moscow, Moscow State Univ., 1958, 520 pp. (In Russian)
13. Ogibalov P. M. *Voprosy dinamiki i ustoychivosti obolochek* [Problems of dynamics and stability of shells]. Moscow, Moscow State Univ., 1963, 417 pp. (In Russian)
14. Bolotin V. V. *Dinamicheskaya ustoychivost' uprugikh sistem* [Dynamic Stability of Elastic Systems]. Moscow, Gostekhizdat, 1956, 600 pp. (In Russian)
15. Strutt M. J. O. *Lame, Mathieu and Related Functions in Physics and Technology*. Berlin, Springer, 1932.
16. Belostochny G. N., Rusina E. A. Dynamic thermal stability of transversal-isotropic plates under the action of periodic loads, In: *Sovremennye problemy nelineinoi mekhaniki konstruksii, vzaimodeistviushchikh s agressivnymi sredami* [Modern problems of nonlinear mechanics of structures interacting with aggressive media]. Saratov, 2000, pp. 175–180 (In Russian).
17. Belostochny G. N., Rassudov V. M. On the loss of stability of reinforced rigidly fixed on the entire contour of orthotropic plates taking into account the effect of transverse shifts, In: *Mekhanika deformiruemykh sred* [Mechanics of deformable media]. Saratov, Saratov Univ., 1982, pp. 66–69 (In Russian).