



Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 539.372

К использованию кусочно-линейных пластических потенциалов в нестационарной теории температурных напряжений

А. А. Буренин¹, А. В. Ткачева¹, Г. А. Щербатюк²¹ Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, Россия, 681005, Комсомольск-на-Амуре, ул. Металлургов, 1.² Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, Россия, 681013, Комсомольск-на-Амуре, пр-т Ленина, 27.

Аннотация

В условиях кусочно-линейного пластического потенциала, задающего в пространстве главных напряжений условие пластичности максимальных приведенных касательных напряжений, получено решение одномерной квазистатической задачи теории температурных напряжений о локальном нагреве круглой пластины, изготовленной из идеального упругопластического материала. Предел текучести полагается зависимым от температуры. Проводится сравнение в распределении текущих и остаточных напряжений при нагреве и остывании металла пластины, полученных как при зависимости упругих моделей от температуры, так и без учета такой зависимости. Показано, что в зависимости от скорости и температуры нагрева возможна смена режима пластического течения при переходе напряженных состояний с одной грани поверхности нагружения на другую. При этом в рассматриваемом случае исключена возможность пластического течения на ребре наклонной призмы текучести, поверхность которой в пространстве главных напряжений является поверхностью нагружения.

Научная статья

Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Буренин А. А., Ткачева А. В., Щербатюк Г. А. К использованию кусочно-линейных пластических потенциалов в нестационарной теории температурных напряжений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 1. С. 23–39. doi: [10.14498/vsgtu1576](https://doi.org/10.14498/vsgtu1576).


Сведения об авторах

Анатолий Александрович Буренин  <http://orcid.org/0000-0003-4502-9547>

доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН; директор института; e-mail: burenin@iacp.dvo.ru

Анастасия Валерьевна Ткачева  <http://orcid.org/0000-0003-1795-0021>

кандидат физико-математических наук; научный сотрудник; лаб. механики деформируемого твердого тела; e-mail: 4nansi4@mail.ru

Галина Анатольевна Щербатюк  <http://orcid.org/0000-0002-4297-1599>

старший преподаватель; каф. механики и анализа конструкций и процессов; e-mail: vvv160278@mail.ru

Ключевые слова: упругость, пластичность, температурные напряжения, кусочно-линейные поверхности нагружения, зависимость упругих модулей и предела текучести от температуры.

Получение: 16 ноября 2017 г. / Исправление: 14 февраля 2018 г. /

Принятие: 12 марта 2018 г. / Публикация онлайн: 28 марта 2018 г.

Введение. Расчетом неустановившихся температурных напряжений в упругопластических телах уделяется неизменное внимание [1–12]. Такие расчеты способствуют совершенствованию ряда технологических операций изготовления изделий и сборки конструкций, что как раз и привлекает такое внимание. Существенный прогресс в развитии методов расчетов был достигнут в последнее время благодаря развитию вычислительных средств, но при этом основная их сложность отчетливо проявила себя. Последняя связана, главным образом, с непостоянством расчетных областей: упругопластические границы, являющиеся необходимым элементом для решений краевых задач, перемещаются по деформируемому телу, заставляя алгоритмически отслеживать их положения на каждом временном шаге расчетов и только потом выполнять необходимые краевые условия на таких поверхностях.

Положение еще более усугубляется тем обстоятельством, что постоянные в свойствах деформируемого тела при значительных изменениях температуры уже невозможно полагать постоянными. Опытные данные указывают на то, что они существенно изменяются с температурой. Особенно это касается предела текучести, который может обращаться в ноль при достижении температуры плавления. Некоторые технические операции характерны как раз тем, что происходят при температурах, достаточно близких к температуре плавления.

В целом данное обстоятельство учитывается в ряде публикаций [4, 5, 8–12]. Использование в расчетах неустановившихся температурных напряжений с учетом зависимости предела текучести от температуры классических кусочно-линейных условий пластичности максимальных касательных напряжений (критерий Треска—Сен-Венана) или условий максимальных приведенных касательных напряжений (критерий Ишлинского—Ивлева) приводит к значительным упрощениям в математическом аппарате. Однако при этом возникает иная трудность. Как замечал еще D. Bland [1], в процессе изменения напряжений их состояния могут в своем соответствии поверхности нагружения (призме Треска в пространстве главных напряжений) переходить с одной грани призмы на другую, задерживаясь на ребре. Следовательно, область пластического течения имеет возможность разделяться на части, где необратимое деформирование подчинено разным системам уравнений в частных производных. Границы таких подобластей пластического течения продвигаются по деформируемому телу и их положение, как и положение упругопластических границ, с необходимостью следует алгоритмически отслеживать, выполняя на них необходимые граничные условия.

В статье [12], посвященной расчетам изменяющихся температурных напряжений в задаче посадки горячей муфты на вал, показано, что подобный переход с одной грани Треска на другую с выполнением в некоторой рассчитываемой области условий, соответствующих полной пластичности (на ребре

призмы Треска), возможна как при нагреве муфты, так и при ее остывании. Другим результатом этой же статьи является показанная возможность проинтегрировать уравнения равновесия (квазистатический случай) в каждой из таких подобластей пластического течения, включая упругие подобласти, где пластические деформации накоплены, но далее при разгрузке не изменяются. Таким способом перемещения, обратимые и необратимые деформации и напряжения в каждый рассчитываемый момент времени задаются конечными соотношениями, зависящими от уровня и распределения температуры в теле. Отметим только, что в [12] задача расчета температурных напряжений решалась именно в рамках теории температурных напряжений, то есть в рамках несвязной теории при учете квадратичной зависимости предела текучести от температуры. Упругие модули полагались постоянными, не зависящими от температуры. Последнее встречает возражения со стороны ряда исследователей, поскольку противоречит имеющимся [13, 14] опытным фактам.

Насколько скажется учет данной зависимости на расчетных значениях? Ответ на такой вопрос мы ставим одной из задач настоящей публикации. Это тем более важно, что такие зависимости исключались во всех известных нам до настоящего времени публикациях [4, 5, 7–11 и др.], посвященных разным задачам теории термоупругопластичности, включая и теорию температурных напряжений в упругопластических телах.

Чаще всего подобные задачи рассматривались в условиях плоского напряженного состояния [3–11 и др.]. Поэтому здесь рассмотрим новую задачу в тех же условиях. По своей постановке она близка к задаче, рассмотренной в [11], только пластину положим конечной и круглой, а нагрев произведем по некоторой ее внутренней окружности. Еще одним отличием здесь является использование не условия пластичности Теска—Сен-Венана о максимуме касательных напряжений, а условия пластичности Ишлинского—Ивлева о максимальных приведенных касательных напряжениях. Решение проведем в рамках теории температурных напряжений.

1. Исходные зависимости модели. Считаем, что полные деформации d_{ij} складываются из обратимых (упругих) и необратимых (пластических) e_{ij}^p :

$$d_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = e_{ij}^e + e_{ij}^p,$$

где u_i — компонента вектора перемещений. Обратимые деформации и температура нагрева задают напряжения σ_{ij} в деформируемом и нагреваемом (охлаждаемом) теле:

$$\sigma_{ij} = (\lambda e_{jj}^e - 3\alpha K(T - T_0))\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e. \quad (1)$$

Здесь T , T_0 — текущая температура и температура в свободном состоянии тела (комнатная температура); λ , μ — другие параметры Ламе, $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ — модуль всестороннего сжатия, α — коэффициент линейного температурного расширения. Далее в качестве упругих модулей будем использовать модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Для их изменения от температуры примем простейшие линейные зависимости:

$$\begin{aligned} E(T) &= E_p - (E_p - E_0)\tau(x_j, t), \\ \nu(T) &= 0.5 - (0.5 - \nu_0)\tau(x_j, t), \\ \tau(T) &= \tau(x_j, t) = (T_p - T(x_j, t))(T_p - T_0)^{-1}, \end{aligned}$$

где E_0 , ν_0 — модуль Юнга и коэффициент Пуассона при температуре T_0 ; T_p — температура плавления металла, E_p — модуль Юнга при температуре T_p . Данные зависимости вводятся в силу того, что температура изменяется с течением времени и имеет распределение по пространственным координатам x . В зависимостях для упругих модулей это подчеркивается специально.

Необратимые деформации e_{ij}^p начинают свой рост при достижении напряжениями поверхности нагружения $f(\sigma_{ij}) = 0$ в пространстве напряжений. В условиях принятия принципа максимума Мизеса эта поверхность принимает на себя роль пластического потенциала со следствием ассоциированного закона пластического течения [15]:

$$de_{ij}^p = d\phi \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}, \quad d\phi > 0.$$

В качестве поверхности нагружения здесь будем использовать наклонную призму Ивлева [16] в пространстве главных напряжений:

$$\max |\sigma_i - \sigma| = \frac{4}{3}k, \quad \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{kk}. \quad (2)$$

Данное условие пластического течения является одним из трех наряду с условием Треска—Сен-Венана и условием Мизеса [15, 16] классических условий в теории идеальной пластичности. В [16] и более ранних работах тех же авторов оно называется условием максимальных приведенных касательных напряжений. Здесь, как и в ряде других публикаций, оно называется условием пластичности Ишлинского—Ивлева, а соответствующую этому условию поверхность нагружения в пространстве главных напряжений мы называем призмой Ивлева по аналогии с призмой Треска в условиях пластичности Треска—Сен-Венана. Предел текучести k в (2) считаем зависимым от температуры T :

$$k(T) = k(x_j, t) = k_0(1 - \tau(x_j, t))^2,$$

где k_0 — предел текучести материала при комнатной температуре. Заметим, что обычно [5, 8] для зависимости предела текучести от температуры принимается линейная функция:

$$k(T) = k_0(1 - \tau(T)).$$

2. Постановка задачи. Обратимое деформирование. Пусть круглая пластина радиуса $r = R$ первоначально находится в свободном состоянии при комнатной температуре T_0 . Тепловое воздействие свяжем с нагревом пластины таким образом, что на ее линии, являющейся окружностью $r = R_0$, температура растет по закону

$$T|_{r=R_0} = qt.$$

Здесь q — задаваемая скорость роста температуры. Подвод тепла действует до некоторого момента времени $t = t_*$ такого, что $T_* = qt_* < T_p$. После этого пластина остывает в условиях неизменной комнатной температуры. Как и нагрев, так и остывание происходит в условиях теплопроводности по пластине и обмена теплом с окружающей средой. В цилиндрической системе координат r, φ, z уравнение теплопроводности запишем в виде

$$T_{,t} = a(rT_{,r})_{,r} + \chi(T_0 - T).$$

Здесь a — коэффициент температуропроводности, индексами после запятой обозначены частные производные по времени t и по единственной пространственной переменной r (задача оказывается одномерной). Коэффициент теплоотдачи в окружающую среду χ зависит от тепловых свойств материала пластины, ее толщины, свойств окружающей среды. Полагаем его постоянным. Безразмерный аналог сформулированной задачи теплопроводности можно записать в форме

$$\theta_{,\xi} + \theta = b(\varsigma\theta_{,\varsigma\varsigma} + \theta_{,\varsigma}), \quad \theta|_{\varsigma=1} = m\xi, \quad \theta_{,\varsigma}|_{\varsigma=\frac{R}{R_0}} = 0, \quad (3)$$

где

$$\theta = (T - T_0)T_0^{-1}, \quad \xi = \chi t, \quad \varsigma = rR_0^{-1}, \quad b = a(R_0\chi)^{-1}, \quad m = q(T_0\chi)^{-1}.$$

В уравнении (3) не учитывается производство тепла за счет деформирования, включая необратимое деформирование, то есть задача предполагается разрешить в рамках именно теории температурных напряжений. В рассматриваемом простом случае задачу (3) можно решить аналитически и получить распределение температуры по радиусу пластины в любой момент времени. Но поскольку задача вычисления эволюции механических параметров задачи решается численно, то и расчет распределения температуры, согласно (3), также удобнее делать численно. Такие вычисления не создают дополнительных трудностей, поэтому далее будем считать распределение температуры по пластине известным.

Первоначально до некоторого последующего за началом процесса деформирования момента времени материал пластины будет деформироваться обратимо (упруго). Оговариваемый последующий момент времени связан как раз с моментом начала пластического течения. При термоупругом деформировании пластические деформации отсутствуют и полные деформации совпадают с обратимыми. В рассматриваемой цилиндрической системе координат в таком случае отличными от нуля будут только следующие компоненты деформаций:

$$d_r = u_{r,r}, \quad d_\varphi = u_r r^{-1}.$$

В принимаемых условиях плоского напряженного состояния из (1) следует

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (4\mu(\lambda + \mu)u_{r,r} + 2\lambda\mu r^{-1}u_r - 6K\mu\alpha T_0\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}, \\ \sigma_\varphi &= (2\lambda\mu u_{r,r} + 4\mu(\lambda + \mu)r^{-1}u_r - 6K\mu\alpha T_0\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнение равновесия в рассматриваемом одномерном случае имеет вид

$$\sigma_{r,r} + r^{-1}(\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0. \quad (5)$$

Подстановка (4) в (5) позволяет записать

$$\gamma u_{r,rr} + \zeta u_{r,r} + \omega u_r + \beta = 0. \quad (6)$$

В (6) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \gamma &= 4\mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1}, \\ \zeta &= 4(\mu^2\lambda_{,r} + \mu_{,r}(\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2))(\lambda + 2\mu)^{-2} + 4\mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1}r^{-1}, \\ \omega &= 2(2\mu^2\lambda_{,r} + \lambda^2\mu_{,r})(\lambda + 2\mu)^{-2}r^{-1} - 4\mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1}r^{-2}, \\ \beta &= -T_0\theta(8\mu^2\lambda_{,r} + 2(3\lambda^2 + 4\lambda\mu + 4\mu^2)\mu_{,r})(\lambda + 2\mu)^{-2} - T_06K\mu\theta_{,r}(\lambda + 2\mu)^{-1}. \end{aligned}$$

В момент времени, когда известно распределение температуры $\theta = \theta(r, t)$, соотношение (6) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение для нахождения $u_r(r, t)$. Граничные условия для (6) однородные:

$$u_r(0, t) = 0, \quad \sigma_r(R, t) = 0. \quad (7)$$

В данном случае мы приходим к совместному численному решению уравнений на каждом временном шаге: сначала находится решение уравнения (3) с соответствующими краевыми условиями, а затем — решение уравнения (6) с условиями (7). Такие численные расчеты не представляют особых трудностей.

Если упругие модули λ и μ не зависят от температуры, то

$$\gamma = 1, \quad \zeta = r^{-1}, \quad \omega = -r^{-2}\beta = -1.5KT_0\theta_{,r}(\lambda + \mu)^{-1}$$

и решение задачи обратимого деформирования значительно упрощается. В этом случае уравнение (6) удается проинтегрировать:

$$u_r = 1.5K\alpha(\lambda + \mu)^{-1}r^{-1}T_0 \int_0^r \rho\theta(\rho)d\rho + 0.5rC_1(t) + r^{-1}C_2(t), \quad (8)$$

где функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$ определяются с учетом граничных условий (7). Из (4) и (8) для напряжений получим зависимости

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -3K\mu(\lambda + \mu)^{-1}r^{-2}\alpha T_0 \int_0^r \rho\theta(\rho)d\rho + \\ &\quad + 3K\mu(\lambda + 2\mu)^{-1}C_1(t) - 2\mu r^{-2}C_2(t), \\ \sigma_\varphi &= 3K\mu(\lambda + \mu)^{-1}r^{-2}\alpha T_0 \int_l^r \rho\theta(\rho)d\rho + (\mu^2(\lambda + \mu)^{-1} - 3\mu)\alpha T_0\theta + \\ &\quad + 3\mu K(\lambda + 2\mu)^{-1}C_1(t) + 2\mu r^{-2}C_2(t), \end{aligned} \quad (9)$$

справедливые в любой момент времени.

С помощью (8) и (9) можно получить решение без дискретизации расчетной области, производя пошаговые расчеты начиная с момента времени $t = 0$. На каждом таком шаге согласно граничным условиям вычисляются значения функций $C_1(t)$ и $C_2(t)$.

Если λ и μ зависят от температуры, то в расчетах необходимо использовать разностные методы. На рис. 1 в качестве примера таких вычислений приводятся распределения безразмерных напряжений в окрестности линии теплового воздействия, полученные при следующих значениях параметров [17]:

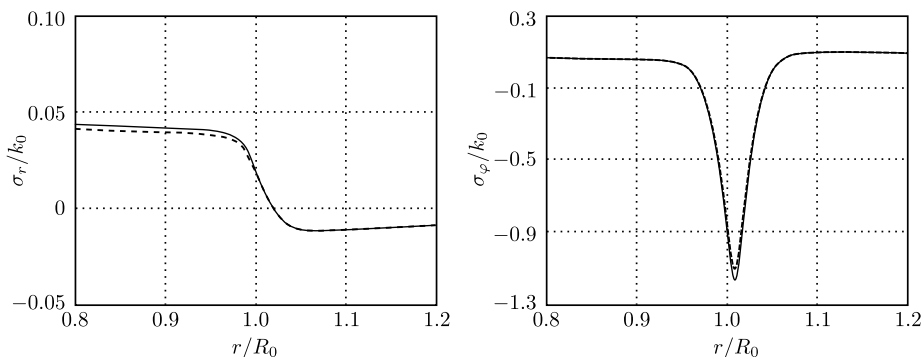


Рис. 1. Распределение напряжений в материале пластины до начала пластического течения. Пунктирная и сплошная линии соответствуют напряжениям, полученным из расчетов, в которых учитывались и не учитывались зависимость упругих модулей от температуры, соответственно

[Figure 1. Stress distribution in the material of the plate prior to the onset of plastic flow. The dashed and solid lines represent the stresses obtained from calculations in which the dependence of the elastic moduli on temperature was taken into account and not taken into account]

$q = 100 \text{ }^\circ\text{C}/\text{c}$, $a = 0.5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $b = 0.2$, $m = 0.5$, $T_p = 660 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, $k_0 = 210 \text{ МПа}$, $E_0 = 72 \text{ ГПа}$, $E_p = 49 \text{ ГПа}$, $\mu_p = 0.5$, $\mu_0 = 0.3$, $R = 2R_0 = 0.5 \text{ м}$.

3. Зарождение и развитие пластического течения. С ростом температуры растут и напряжения. В некоторый момент времени $t > 0$ окажется, что на линии нагрева $r = R_0$ выполнится соотношение

$$2\sigma_\varphi - \sigma_r = -4k.$$

В пространстве главных напряжений σ_r , σ_φ , $\sigma_z = 0$ данное соотношение соответствует грани призмы Ивлева. На рис. 2 приведено сечение наклонной призмы Ивлева плоскостью $\sigma_z = 0$.

Появившаяся область течения с течением времени при нагревании будет развиваться. В последующие моменты времени в деформируемой за счет

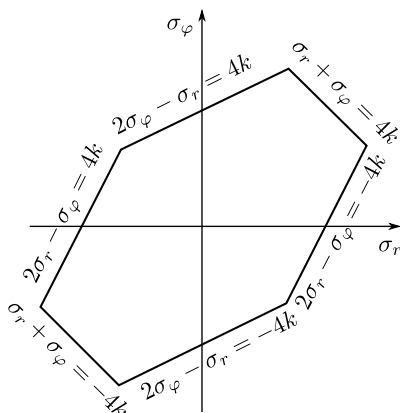


Рис. 2. Сечение поверхности нагружения в пространстве главных напряжений плоскостью $\sigma_z = 0$

[Figure 2. The $\sigma_z = 0$ plane cross-section of the loading surface in the space of principal stresses]

локального нагрева пластине будет присутствовать область, ограниченная продвигающимися упругопластическими границами $r = n(t)$ и $r = m(t)$. Таким способом, пластина будет разбита на три области, в двух из которых будет протекать обратимое деформирование (это области $0 < r < n(t)$ и $m(t) < r \leq R$), а в области $n(t) \leq r \leq m(t)$ — необратимое. Положение упругопластических границ $r = n(t)$ и $r = m(t)$ определяется решением задачи на каждом временном интервале. Положение границ является совершенно необратимым атрибутом решения задачи в целом. В областях обратимого (термоупругого) деформирования остаются справедливыми все ранее выписанные соотношения. В области пластического течения принимаются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= (4\mu(\lambda + \mu)(u_{r,r} - e_r^p) + 2\lambda\mu(r^{-1}u_r - e_\varphi^p))(\lambda + 2\mu)^{-1} - \\ &\quad - 6K\mu\alpha T_0\theta(\lambda + 2\mu)^{-1}, \\ \sigma_\varphi &= (4\mu(\lambda + \mu)(r^{-1}u_r - e_\varphi^p) + 2\lambda\mu(u_{r,r} - e_r^p))(\lambda + 2\mu)^{-1} - \\ &\quad - 6K\mu\alpha T_0\theta(\lambda + 2\mu)^{-1}.\end{aligned}\quad (10)$$

Исходя из ассоциированного закона пластического течения и соотношений (10) получаем зависимость для компоненты необратимых деформаций

$$e_r^p = (u_{r,r}\mu + 1.5K\alpha T_0\theta - \mu^{-1}(\lambda + 2\mu)k - 0.5r^{-1}u_r(3\lambda + 4\mu))(3\lambda + 5\mu)^{-1}. \quad (11)$$

Подстановка (10) и (11) в уравнение равновесия (5) позволяет записать результат в форме (6), но с другими коэффициентами:

$$\begin{aligned}\gamma &= 12\mu K(3\lambda + 5\mu)^{-1}, \\ \zeta &= (4(9\lambda^2 + 12\lambda\mu + 10\mu^2)\mu_{,r} + 9\mu^2\lambda_{,r})(3\lambda + 5\mu)^{-2} + \\ &\quad + 12\mu K r^{-1}(3\lambda + 5\mu)^{-1}, \\ \omega &= ((18\lambda^2 + 24\lambda\mu + 20\mu^2)\mu_{,r} + 18\mu^2\lambda_{,r})r^{-1}(3\lambda + 5\mu)^{-2} - \\ &\quad - 3\mu K r^{-1}(3\lambda + 5\mu)^{-1}, \\ \beta &= (\theta(18(\lambda\mu_{,r} - \mu\lambda_{,r}) - 3K r^{-1}) + 12k(\lambda\mu_{,r} - \mu\lambda_{,r}))(3\lambda + 5\mu)^{-2} + \\ &\quad + (4\mu k_{,r} - 6K\alpha T_0\theta_{,r})(3\lambda + 5\mu)^{-1} + 6(\lambda + 2\mu)k r^{-1}(3\lambda + 5\mu)^{-1}.\end{aligned}\quad (12)$$

Как и ранее, ситуация значительно упрощается, если упругие модули не зависят от температуры. В этом случае вместо (12) имеем

$$\begin{aligned}\gamma &= 4, \quad \zeta = 4r^{-1}, \quad \omega = -r^{-2}, \\ \beta &= -6\alpha T_0\theta_{,r} - 3\alpha T_0\theta r^{-1} + 2(3K)^{-1}(2k_{,r} + 3k(r\mu)^{-1}(\lambda + 2\mu)).\end{aligned}\quad (13)$$

При подстановке (13) в (6) получаем уравнение равновесия, после интегрирования которого запишем:

$$\begin{aligned}u_r &= 3\alpha(2r^{1/2})^{-1}T_0 \int_{n(t)}^r \rho^{1/2}\theta(\rho)d\rho + (\lambda + \mu)(2\mu K r^{1/2}) \int_{n(t)}^r \rho^{1/2}k(\rho)d\rho - \\ &\quad - r^{1/2}(6\mu K)(3\lambda + 5\mu) \int_n^r \rho^{-1/2}k(\rho)d\rho - r^{1/2}C_3(t) + r^{-1/2}C_4(t).\end{aligned}\quad (14)$$

Решение (14) позволяет в рассматриваемый момент времени вычислить напряжения и необратимые деформации:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 4k + 2\sigma_\varphi = -2r^{-1/2} \int_n^r \rho^{-1/2} k(\rho) d\rho - 12K\mu r^{-1/2} (3\lambda + 5\mu)^{-1} C_3, \\ e_r^p &= (\lambda + \mu)(4\mu K)^{-1} \left(r^{-1/2} \int_n^r \rho^{-1/2} k(\rho) d\rho - r^{-3/2} \int_n^r \rho^{1/2} k(\rho) d\rho \right) + \\ &+ 0.5\alpha T_0 \theta - 3\alpha (4r^{3/2})^{-1} T_0 \int_n^r \rho^{1/2} \theta(\rho) d\rho + \\ &+ 1.5(\lambda + \mu)r^{-1} (3\lambda + 5\mu)^{-1} C_3 - 0.5r^{-3/2} C_4. \end{aligned} \quad (15)$$

Заметим, что соотношения (14) и (15) не дают решения задачи, а позволяют лишь на каждом временном шаге расчетов отказаться от дискретизации расчетной области. В каждый момент времени постоянные $C_3(t)$ и $C_4(t)$ и неизвестные $n(t)$ и $m(t)$ должны вычисляться согласно краевым условиям. В областях обратимого деформирования $0 \leq r < n(t)$ и $m(t) < r \leq R$ к оговоренным четырем постоянным добавятся еще четыре из-за использования зависимостей (8) и (9), остающихся справедливыми в этих областях обратимого деформирования. Также к граничным условиям добавляются условия непрерывности перемещения u_r и напряжения σ_r на упругопластических границах $r = n(t)$ и $r = m(t)$. Полученная таким способом система алгебраических уравнения разрешается на каждом временном шаге расчетов.

Когда упругие модули зависят от температуры, отказаться от дискретизации расчетных областей невозможно. Все уравнения записываются в конечно-разностной форме и разрешается соответствующая нелинейная система уравнений. При этом важно отслеживать положения упругопластических границ с выполнением граничных условий на последних. На рис. 3 показаны численные решения в случаях, когда зависимость упругих модулей от температуры учитывается и когда не учитывается. Хорошо видны различия в получаемых решениях.

Но даже при продолжающемся локальном нагреве решение задачи на

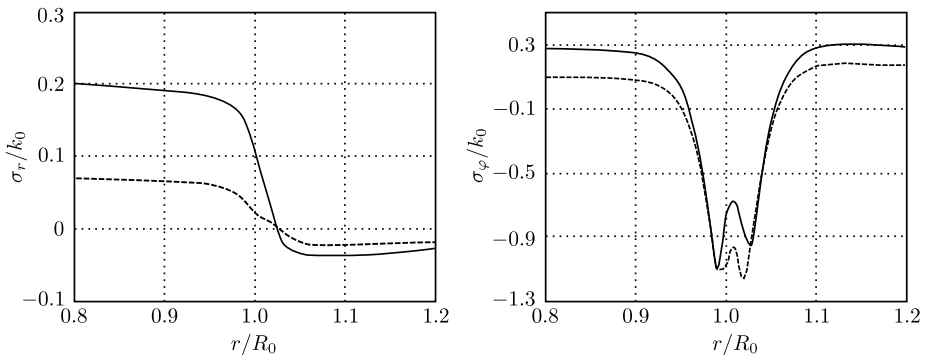


Рис. 3. Распределение напряжений в материале пластины после начала пластического течения. Пунктирная линия получена, когда зависимость упругих модулей от температуры учитывается, сплошная линия получена, когда температурная зависимость не учитывается

[Figure 3. Stress distribution in the material of the plate after the onset of plastic flow. The dashed and solid lines represent the stresses obtained from calculations in which the dependence of the elastic moduli on temperature was taken into account and not taken into account]

данном этапе нельзя считать законченным. В некоторый последующий момент времени на линии нагрева выполнится условие грани призмы Ивлева $\sigma_r + \sigma_\varphi = -4k$. Последнее означает зарождение новой области пластического течения, отличной от рассмотренной. Так как в этот же момент времени на той же границе $r = R_0$ продолжает выполняться условие иной грани призмы Ивлева: $2\sigma_\varphi - \sigma_r = -4k$, возможны два случая. В первом случае это зародившаяся область, соответствующая ребру призмы Ивлева, когда одновременно $2\sigma_\varphi - \sigma_r = -4k$ и $\sigma_r + \sigma_\varphi = -4k$. Во втором случае происходит мгновенный переход на грань $\sigma_r + \sigma_\varphi = -4k$. В [12] для призмы Треска показано, что осуществляется первый из этих вариантов. Здесь мы имеем иную ситуацию, так как в условиях плоских деформаций ($\sigma_z = 0$) на ребре призмы Ивлева выполняются равенства

$$\sigma_r = -\frac{4}{3}k(r, t), \quad \sigma_\varphi = -\frac{8}{3}k(r, t).$$

Согласно уравнению равновесия, в таком случае получаем уравнение

$$k_{,r} - k = 0,$$

которое в условиях рассматриваемой задачи выполнить невозможно и, следовательно, возможен только случай мгновенного перехода через ребро призмы Ивлева с грани $2\sigma_\varphi - \sigma_r = -4k$ на соседнюю грань $\sigma_r + \sigma_\varphi = -4k$ (см. рис. 2).

В момент выполнения условия пластичности $\sigma_r + \sigma_\varphi = -4k$ на линии $r = R_0$ возникает новая область необратимого деформирования $w(t) \leq r \leq v(t)$, которая далее распространяется по среде. Границы этой области не являются упругопластическими — они разделяют область пластического течения на три части, где необратимое деформирование подчинено разным системам уравнений. В областях $n(t) \leq r < w(t)$ и $v(t) \leq r < m(t)$ продолжается пластическое течение в соответствии с условием грани призмы Ивлева $2\sigma_\varphi - \sigma_r = -4k$, то есть зависимости (14) и (15) остаются справедливыми, когда упругие модули не зависят от температуры, а в области течения $w(t) \leq r \leq v(t)$ эти зависимости следует заменить так, чтобы они соответствовали грани $\sigma_r + \sigma_\varphi = -4k$. При этом следует учитывать, что границы новой пластической области теперь продвигаются в области, где происходит накопление необратимых деформаций, то есть в области пластического течения. Следовательно, дальнейшее накопление необратимых деформаций начинается от их ненулевых начальных значений $p_r(r)$ и $p_\varphi(r)$. Эти начальные значения задаются моментами прихода в точку пластины с пространственной координатой r границ $r = w(t)$ и $r = v(t)$. Иначе, $p_r(r)$ и $p_\varphi(r)$ являются необратимыми деформациями, накопленными при пластическом течении на грани призмы Ивлева $2\sigma_\varphi - \sigma_r = -4k$ до прихода в соответствующие точки пластины границ $r = w(t)$ и $r = v(t)$, разделяющих пластическую область на части, в которых течение соответствует различным граням призмы Ивлева.

С учетом вышеизложенного запишем соотношения Дюгамеля—Неймана в форме

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (4\mu(\lambda + \mu)(u_{r,r} - p_r - e_r^p))(\lambda + 2\mu)^{-1} + \\ &\quad + (2\lambda\mu(r^{-1}u_r - p_\varphi - e_\varphi^p) - 2K\mu\alpha T_0\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}, \\ \sigma_\varphi &= (2\lambda\mu(u_{r,r} - p_r - e_r^p))(\lambda + 2\mu)^{-1} + \\ &\quad + (4\mu(\lambda + \mu)(r^{-1}u_r - p_\varphi - e_\varphi^p) - 2K\mu\alpha T_0\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}. \end{aligned} \quad (16)$$

В (16) через e_r^p и e_φ^p обозначены необратимые деформации, накапливаемые в новой области течения $w(t) \leq r \leq v(t)$. Они со временем растут за счет продолжающегося пластического течения в отличие от p_r и p_φ , которые неизменны в этой области. Исходя из (16), условия пластичности и ассоциированного закона пластического течения получаем, что в области $w(t) \leq r \leq v(t)$ для необратимых деформаций выполняются зависимости

$$e_\varphi^p = e_r^p = 0.5(u_{r,r} + r^{-1}u_r) - \alpha T_0\theta + k(\lambda + 2\mu)(3K\mu)^{-1} - 0.5(p_r + p_\varphi). \quad (17)$$

При подстановке (16) и (17) в уравнение равновесия (5) снова получаем уравнение для u_r в виде (6), в котором

$$\begin{aligned} \xi &= \mu, \quad \zeta = \mu_{,r} + \mu r^{-1}, \quad \omega = -\mu r^{-2} - \mu_{,r} r^{-1}, \\ \beta &= -2k_{,r} + (\mu_{,r} + 2\mu r^{-1})(p_\varphi - p_r) + \mu(p_{\varphi,r} - p_{r,r}). \end{aligned}$$

Как и ранее, когда упругие модули зависят от температуры, решение возможно получить только численно. Но если ранее была возможность провести сравнение со случаем, когда упругие постоянные не зависят от температуры, то в последнем случае такой возможности нет. При постоянных упругих модулях невозможен переход напряженных состояний с грани $2\sigma_\varphi - \sigma_r = -4k$ на иные грани призмы Ивлева и приведенная ситуация не имеет места. Последнее не несет в себе характер общего положения. В рассматриваемой задаче это так, но в других задачах возможно разделение области пластического течения на части, включающие присутствие течения на ребре призмы Ивлева. На рис. 4 приведено сравнение результатов расчета температурных напряжений для случая присутствия новой области пластического течения на грани $\sigma_r + \sigma_\varphi = -4k$, когда упругие модули зависят от температуры, и для случая отсутствия данной области, когда упругие модули постоянны. В момент времени $t = t_*$ температура $T = T_* = 0.85T_p$ достигает своего максимального значения и нагрев прекращается.

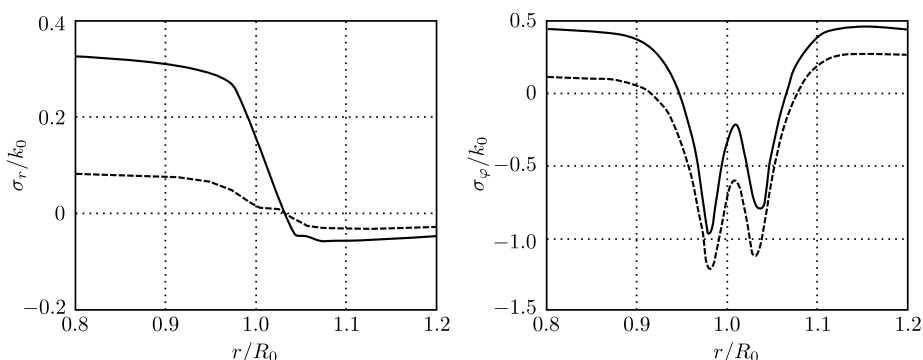


Рис. 4. Распределение напряжений в материале пластины в момент $t = t_*$. Пунктирная и сплошная линии изображают напряжения, полученные из расчетов, в которых учитывалась и не учитывалась зависимость упругих модулей от температуры, соответственно

[Figure 4. Stress distribution in the material of the plate at the time $t = t_*$. The dashed and solid lines represent the stresses obtained from calculations in which the dependence of the elastic moduli on temperature was taken into account and not taken into account]

4. Разгрузка и остаточные напряжения. После прекращения процесса нагревания (при $t > t_*$) пластическая область продолжает развиваться, а температура стремится выровняться. Но наступает момент времени, когда упругопластические границы одновременно останавливаются и пластическое течение прекращается. В условиях дальнейшего выравнивания температуры происходит обратимое (термоупругое) деформирование вплоть до его остановки. В момент такой остановки температура пластины оказывается одинаковой по всей её площади. Сформированный уровень напряжений и их распределение далее не меняются. Уравнение равновесия снова приобретает форму (6), где

$$\begin{aligned} \xi &= 1, \quad \zeta = r^{-1}, \quad \omega = -r^{-2}, \\ \beta &= -0.5(\lambda + 2\mu)(r(\lambda + \mu))^{-1}(p_\varphi - p_r) - p_{r,r} - 0.5\lambda(\lambda + \mu)^{-1}p_{\varphi,r}. \end{aligned} \quad (18)$$

Согласно (18), перемещения в пластине и, следовательно, напряжения полностью задаются уровнем необратимых деформаций, которые накопились в материале пластины в условиях пластического течения, и их распределением. Интегрируя (6) с коэффициентами, заданными зависимостями (18), окончательно найдем

$$\begin{aligned} u_r &= 0.25(\lambda + \mu)^{-1} \left((\lambda + 2\mu)r \int_0^r (p_r(\rho) - p_\varphi(\rho))\rho^{-1}d\rho + \right. \\ &\quad \left. + 3Kr^{-1} \int_0^r (p_r(\rho) + p_\varphi(\rho))\rho d\rho \right) + 0.5rC_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 1.5K\mu(\lambda + \mu)^{-1} \left(\int_0^r (p_r(\rho) - p_\varphi(\rho))\rho^{-1}d\rho - \right. \\ &\quad \left. - r^{-2} \int_0^r (p_r(\rho) + p_\varphi(\rho))\rho d\rho \right) + 3K\mu(\lambda + 2\mu)^{-1}C_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi &= 1.5K\mu(\lambda + \mu)^{-1} \left(\int_0^r (p_r(\rho) - p_\varphi(\rho))\rho^{-1}d\rho + \right. \\ &\quad \left. + r^{-2} \int_0^r (p_r(\rho) + p_\varphi(\rho))\rho d\rho \right) - 3K\mu(\lambda + \mu)^{-1}p_\varphi + \\ &\quad + 3K\mu(\lambda + 2\mu)^{-1}C_1, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= (\lambda + 2\mu)(2R^2(\lambda + \mu))^{-1} \left(\int_0^R (p_r(\rho) + p_\varphi(\rho))\rho d\rho - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^R (p_r(\rho) - p_\varphi(\rho))\rho^{-1}d\rho \right). \end{aligned}$$

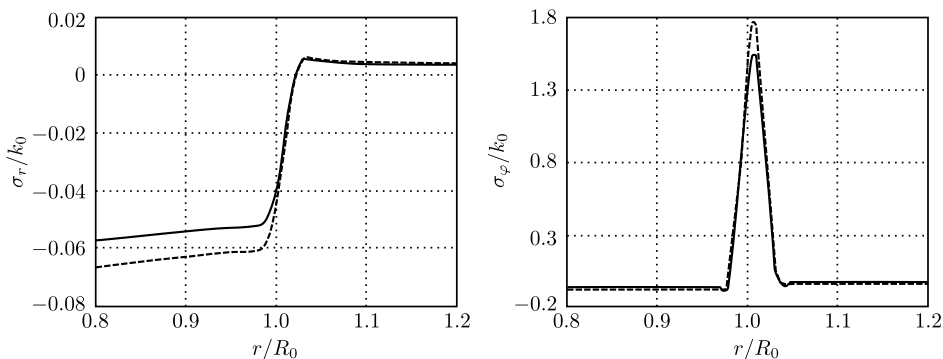


Рис. 5. Распределение остаточных напряжений в материале пластины. Пунктирная и сплошная линии изображают напряжения, полученные из расчетов, в которых учитывались и не учитывались зависимости упругих модулей от температуры, соответственно

[Figure 5. The residual stresses distribution in the material of the plate. The dashed and solid lines represent the stresses obtained from calculations in which the dependences of the elastic moduli on temperature were taken into account and not taken into account]

На рис. 5 для указанных выше параметрах задачи приведено распределение остаточных напряжений в окрестности линии нагрева $r = R_0$ для случаев, когда зависимость упругих модулей от температуры учитывается либо не учитывается.

Заключение. Получено решение одномерной квазистатической задачи теории температурных напряжений о локальном нагреве круглой пластины. Результаты решения показывают, что, когда учитываются зависимости упругих модулей от температуры, получить численные результаты значительно сложнее по сравнению со случаем, когда они постоянны и от температуры зависит только предел текучести. В последнем случае с помощью кусочно-линейного пластического потенциала Ишлинского—Ивлева в каждой области течения и области разгрузки удастся записать уравнения равновесия в перемещениях и проинтегрировать их. Таким образом, появляется возможность не производить дискретизацию расчетной области, а использовать получаемые конечные зависимости механических параметров деформирования от распределения температуры на каждом временном шаге.

Положение упругопластических границ и границ, разделяющих область пластического течения на части, где необратимое деформирование подчинено разным законам (системам уравнений в частных производных в зависимости от того, каким граням поверхности нагружения в пространстве главных напряжений принадлежат напряженные состояния), определяется решением системы алгебраических уравнений, следующих из граничных условий и условий на таких движущихся границах.

Сравнение полученных распределений напряжений показывает, что численные результаты в значениях изменяющихся напряжений являются достаточно близкими. Особенно это касается распределения остаточных напряжений. Следовательно, когда основной расчетной целью являются последние (натяг в сборке, напряжения в зоне термического влияния и др.), с целью упрощения расчетов зависимостями упругих модулей от температуры можно пренебречь.

Заметим также, что на уровень распределения эволюционирующих температурных напряжений существенно влияет скорость нагревания пластины. При малых скоростях нагревания переход с одного ребра на другое не осуществляется, что существенно упрощает решение задачи. При значительных скоростях нагревания могут наблюдаться местные изменения в толщине пластины, связанные с необратимыми деформациями e_z^p , а при малых скоростях такой эффект отсутствует. Данный эффект, вероятно, связан с изменениями в кристаллической структуре металлов и соответствующими твердотельными фазовыми изменениями.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания № 007–00285–18–00.

Библиографический список

1. Bland D. R. Elastoplastic thick-walled tubes of work-hardening material subject to internal and external pressures and to temperature gradients // *J. Mech. Phys. Solids*, 1956. vol. 4, no. 1. pp. 209–229. doi: [10.1016/0022-5096\(56\)90030-8](https://doi.org/10.1016/0022-5096(56)90030-8).
2. Perzyna P., Sawczuk A. Problems of thermoplasticity // *Nucl. Engng. Des.*, 1973. vol. 24, no. 1. pp. 1–55. doi: [10.1016/0029-5493\(73\)90017-4](https://doi.org/10.1016/0029-5493(73)90017-4).
3. Lippmann H. The effect of a temperature cycle on the stress distribution in a shrink fit // *Jnt. J. Plast.*, 1992. vol. 8, no. 5. pp. 567–582. doi: [10.1016/0749-6419\(92\)90031-7](https://doi.org/10.1016/0749-6419(92)90031-7).
4. Bengeri M., Mack W. The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic-plastic shrink fit // *Acta Mechanica*, 1994. vol. 103, no. 1–4. pp. 243–257. doi: [10.1007/BF01180229](https://doi.org/10.1007/BF01180229).
5. Kovács Á. Residual stresses in thermally loaded shrink fits // *Periodica Polytechnica, Mech. Engng.*, 1996. vol. 40, no. 2. pp. 103–112.
6. Ковтанюк Л. В. Моделирование больших упругопластических деформаций в неизотермическом случае // *Дальневост. матем. журн.*, 2004. Т. 5, № 1. С. 110–120.
7. Александров С. Е., Ломакин Е. В., Дзэнг Й. Р. Решение термоупругопластической задачи для тонкого диска из пластически сжимаемого материала, подверженного термическому нагружению // *ДАН*, 2012. Т. 443, № 3. С. 310–312.
8. Александров С. Е., Лямина Е. А., Новожилова О. В. Влияние зависимости предела текучести от температуры на напряженное состояние в тонком полом диске // *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2013. № 3. С. 43–48.
9. Буренин А. А., Дац Е. П., Ткачева А. В. К моделированию технологии горячей посадки // *Сиб. журн. индустр. матем.*, 2014. Т. 17, № 3. С. 40–47.
10. Дац Е. П., Ткачева А. В., Шпорт Р. В. Сборка конструкции «кольцо в кольце» способом горячей посадки // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2014. № 4(22). С. 225–235.
11. Буренин А. А., Дац Е. П., Мурашкин Е. В. Формирование поля остаточных напряжений в условиях локального теплового воздействия // *Изв. РАН. МТТ*, 2014. № 2. С. 124–131.
12. Буренин А. А., Ткачева А. В., Щербатюк Г. А. К расчету неустановившихся температурных напряжений в упругопластических телах // *Вычислительная механика сплошных сред*, 2017. Т. 10, № 3. С. 245–259. doi: [10.7242/1999-6691/2017.10.3.20](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.3.20).

13. Токий Н. В., Токий В. В., Пилипенко А. Н., Письменова Н. Е. Температурная зависимость модулей упругости субмикрористаллической меди // *Физика твердого тела*, 2014. Т. 56, № 5. С. 966–969.
14. Nadai A. *Theory of Flow and Fracture of Solids*. vol. 2. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1963. xviii+705 pp.
15. Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. *Теория пластичности*. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
16. Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. *Математическая теория пластичности*. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
17. Самсонов Г. В. *Свойства элементов*. Часть 2. Химические свойства. М.: Металлургия, 1976. 384 с.

MSC: 74F05

The use of piecewise linear plastic potentials in the nonstationary theory of temperature stresses

A. A. Burenin¹, A. V. Tkacheva¹, G. A. Scherbatyuk²¹ Institute of Metallurgy and Mechanical Engineering Far-Eastern Branch of RAS, 1, Metallurgov st., Komsomolsk-on-Amur, 681005, Russian Federation.² Komsomolsk-on-Amur State Technical University, 27, Lenin Prosp., Komsomolsk-on-Amur, 681013, Russian Federation.


Abstract

Under the conditions of a piecewise linear plastic potential defining in the space of principal stresses the plasticity condition for the maximum reduced tangential stresses, a solution is obtained for a one-dimensional quasistatic problem of the theory of temperature stresses about the local heating of a circular plate made of an ideal elastoplastic material. The yield point is assumed to be temperature dependent. A comparison is made in the distribution of the current and residual stresses during heating and cooling of the plate metal obtained both with the dependence of the elastic models on the temperature, and without taking this dependence into account. It is shown that, depending on the rate and temperature of heating, the regime of plastic flow can change under the transition of stressed states from one face of the loading surface to another. In this case, the possibility of an inclined prism of fluidity on the edge is excluded, the surface of which in the space of principal stresses is the loading surface.

Keywords: elasticity, plasticity, temperature stresses, piecewise linear loading surfaces, the temperature dependence of elastic constants and the yield point.

Received: 16th November, 2017 / Revised: 14th February, 2018 /Accepted: 12th March, 2018 / First online: 28th March, 2018

Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Burenin A. A., Tkacheva A. V., Scherbatyuk G. A. The use of piecewise linear plastic potentials in the nonstationary theory of temperature stresses, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 1, pp. 23–39. doi:[10.14498/vsgtu1576](https://doi.org/10.14498/vsgtu1576) (In Russian).

Authors' Details:

Anatoly A. Burenin  <http://orcid.org/0000-0003-4502-9547>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Corresponding Member of RAS; Director of the Institute; e-mail: burenin@iacp.dvo.ru

Anastasiya V. Tkacheva  <http://orcid.org/0000-0003-1795-0021>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Researcher; Lab. of Mechanics of Solids; e-mail: 4nansi4@mail.ru

Galina A. Scherbatyuk  <http://orcid.org/0000-0002-4297-1599>

Senior Lecturer; Dept. of Mechanics and Analysis of Structures and Processes; e-mail: vvv160278@mail.ru

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interests with the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This work was carried out in the framework of the state task (no. 007-00285-18-00).

References

1. Bland D. R. Elastoplastic thick-walled tubes of work-hardening material subject to internal and external pressures and to temperature gradients, *J. Mech. Phys. Solids*, 1956, vol. 4, no. 1, pp. 209–229. doi: [10.1016/0022-5096\(56\)90030-8](https://doi.org/10.1016/0022-5096(56)90030-8).
2. Perzyna P., Sawczuk A. Problems of thermoplasticity, *Nucl. Engng. Des.*, 1973, vol. 24, no. 1, pp. 1–55. doi: [10.1016/0029-5493\(73\)90017-4](https://doi.org/10.1016/0029-5493(73)90017-4).
3. Lippmann H. The effect of a temperature cycle on the stress distribution in a shrink fit, *Jnt. J. Plast.*, 1992, vol. 8, no. 5, pp. 567–582. doi: [10.1016/0749-6419\(92\)90031-7](https://doi.org/10.1016/0749-6419(92)90031-7).
4. Bengeri M., Mack W. The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic-plastic shrink fit, *Acta Mechanica*, 1994, vol. 103, no. 1–4, pp. 243–257. doi: [10.1007/BF01180229](https://doi.org/10.1007/BF01180229).
5. Kovács Á. Residual stresses in thermally loaded shrink fits, *Periodica Polytechnica, Mech. Engng.*, 1996, vol. 40, no. 2, pp. 103–112.
6. Kovtanjuk L. V. The modelling of finite elastic-plastic deformation in non-isothermal case, *Dal'nevost. Mat. Zh.*, 2004, vol. 5, no. 1, pp. 110–120 (In Russian).
7. Aleksandrov S. E., Lomakin E. V., Dzenig I.-R. Solution of the thermoelastoplastic problem for a thin disk of plastically compressible material subjected to thermal loading, *Dokl. Phys.*, 2012, vol. 57, no. 3, pp. 136–139. doi: [10.1134/S1028335812030081](https://doi.org/10.1134/S1028335812030081).
8. Aleksandrov S. E., Lyamina E. A., Novozhilova O. V. The influence of the relationship between yield strength and temperature on the stress state in a thin hollow disk, *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2013, vol. 42, no. 3, pp. 214–218. doi: [10.3103/S1052618813020027](https://doi.org/10.3103/S1052618813020027).
9. Burenin A. A., Dats E. P., Tkacheva A. V. On the modeling of shrink-fitting technology, *J. Appl. Ind. Math.*, 2014, vol. 8, no. 4, pp. 493–499. doi: [10.1134/S199047891404005X](https://doi.org/10.1134/S199047891404005X).
10. Dats E. P., Tkacheva A. V., Shport R. V. Assembly of a “Ring-in-Ring” Structure by a Shrink Fit, *Vestnik Chuvash. Gos. Ped. Univ. im I. Ya. Yakovleva. Ser. Mekh. Pred. Sost.*, 2014, no. 4(22), pp. 225–235 (In Russian).
11. Burenin A. A., Dats E. P., Murashkin E. V. Formation of the residual stress field under local thermal actions, *Mech. Solids*, 2014, vol. 49, no. 2, pp. 218–224. doi: [10.3103/S0025654414020113](https://doi.org/10.3103/S0025654414020113).
12. Burenin A. A., Tkacheva A. V., Scherbatyuk G. A. On the calculation of unsteady thermal stresses in elastoplastic solids, *Computational mechanics*, 2017, vol. 10, no. 3, pp. 245–259 (In Russian). doi: [10.7242/1999-6691/2017.10.3.20](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.3.20).
13. Tokiy N. V., Tokiy V. V., Pilipenko A. N., Pismenova N. E. Temperature dependence of elastic moduli of submicrocrystalline copper, *Phys. Solid State*, 2014, vol. 56, no. 5, pp. 1002–1005. doi: [10.1134/S106378341405031X](https://doi.org/10.1134/S106378341405031X).
14. Nadai A. *Theory of Flow and Fracture of Solids*, vol. 2. New York, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1963, xviii+705 pp.
15. Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. *Teoriia plastichnosti* [Theory of plasticity]. Vladivostok, Dal'nauka, 1998, 528 pp. (In Russian)
16. Ishlinskii A. Yu., Ivlev D. D. *Matematicheskaya teoriia plastichnosti* [Mathematical theory of plasticity]. Moscow, Fizmatlit, 2001, 704 pp. (In Russian)
17. Samsonov G. V. *Svoistva elementov. Ch. 2. Khimicheskie svoistva* [Properties of elements. Part 2. Chemical properties]. Moscow, Metallurgiya, 1976, 384 pp. (In Russian)