



УДК 539.372

## Анализ свойств кривых ползучести с произвольной начальной стадией нагружения, порождаемых линейной теорией наследственности

А. В. Хохлов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,  
Научно-исследовательский институт механики,  
Россия, 119192, Москва, Мичуринский проспект, 1.

### Аннотация

Выведено уравнение семейства кривых ползучести с произвольной неубывающей программой нагружения на начальной стадии, порождаемых линейным интегральным определяющим соотношением вязкоупругости Больцмана–Вольтерры с произвольной функцией ползучести (релаксации), аналитически изучены их общие качественные свойства и влияние на них длительности и формы начальной стадии нагружения и свойств функций ползучести. Исследованы интервалы монотонности и выпуклости кривых ползучести, их асимптотики, отклонения друг от друга кривых с разными начальными стадиями нагружения до заданного уровня напряжения, условия сходимости к нулю их отклонения от кривых ползучести при мгновенном нагружении с неограниченным увеличением времени (условия затухания памяти) и другие свойства. Получены точные двусторонние оценки для кривых ползучести и их абсолютных отклонений друг от друга и от кривых ползучести при мгновенном нагружении, доказана равномерная сходимость семейств кривых ползучести с фиксированной формой начальной стадии нагружения к кривой ползучести при мгновенном нагружении, когда длительность начальной стадии стремится к нулю.

Установленные общие свойства кривых ползучести, порождаемых линейной теорией наследственности, проиллюстрированы на примерах кривых ползучести классических реологических моделей (Максвелла, Фойгта, Кельвина), трехзвенных сингулярных моделей и «фрактальных» моделей с оператором дробного дифференцирования. Проанализированы специфические особенности поведения кривых ползучести регулярных и нерегулярных моделей, а также гибридных моделей, чьи функции ползучести склеены из нескольких функций. Проведенный анализ позволяет точнее очертить арсенал возможностей и область применимости линейной теории наследственности, выявить индикаторы ее (не)применимости, удобные для экспериментальной проверки, получить

### Научная статья

Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

### Образец для цитирования

Хохлов А. В. Анализ свойств кривых ползучести с произвольной начальной стадией нагружения, порождаемых линейной теорией наследственности // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 1. С. 65–95. doi: [10.14498/vsgtu1543](https://doi.org/10.14498/vsgtu1543).

### Сведения об авторе

*Андрей Владимирович Хохлов* <http://orcid.org/0000-0002-9212-2579>

кандидат технических наук; старший научный сотрудник; лаб. упругости и пластичности; e-mail: [andrey-khokhlov@ya.ru](mailto:andrey-khokhlov@ya.ru)

новые универсальные двусторонние оценки для функции ползучести через кривые ползучести с начальной стадией нагружения, регистрируемые в испытаниях материалов, и усовершенствовать методики выбора, идентификации, настройки и верификации линейных моделей.

**Ключевые слова:** линейная вязкоупругость, функция ползучести, кривые ползучести, влияние начальной стадии нагружения, форма начальной стадии нагружения, длительность начальной стадии, нагружение с постоянной скоростью, двусторонние оценки, асимптотика отклонения, сходимость, затухание памяти, регулярные и сингулярные модели, модели с дробной производной.

Получение: 23 апреля 2017 г. / Исправление: 11 августа 2017 г. /  
Принятие: 18 декабря 2017 г. / Публикация онлайн: 29 марта 2018 г.

**Введение.** Испытания материалов на релаксацию и ползучесть — простейшие виды квазистатических испытаний, позволяющие оценить их диссипативные свойства, скоростную чувствительность и глубину памяти, очертить область линейности их поведения, подобрать адекватное определяющее соотношение (ОС), найти материальные функции и параметры. Мгновенное нагружение до заданного уровня напряжения ( $\sigma(t) = \bar{\sigma}h(t)$ ,  $h(t)$  — функция Хевисайда) неосуществимо в испытаниях: на практике всегда имеется начальная стадия нагружения до постоянного уровня напряжения  $\bar{\sigma} > 0$  за время  $t_* > 0$ , как правило, — стадия с (примерно) постоянной скоростью нагружения:

$$\sigma(t) = bt \text{ при } t \in [0; t_*]; \quad \sigma(t) = \bar{\sigma} = \text{const при } t \geq t_*, \quad t_* > 0, \quad \bar{\sigma} = bt_*. \quad (1)$$

Такие квазистатические испытания (“ramp tests”) включены в европейские и американские стандарты протоколов испытаний. Влияние длительности  $t_*$  (“rise time”) начальных стадий (1) на экспериментальные и теоретические кривые ползучести (КП)  $\varepsilon(t; \bar{\sigma}, t_*)$ , на их отклонение от КП  $\varepsilon(t; \bar{\sigma}, 0)$  при мгновенном нагружении и на «окно наблюдения» ползучести  $t > kt_*$ ,  $k > 1$ , необходимо учитывать при обработке опытных данных и идентификации материальных функций и параметров ОС [1–25], а также при определении области линейности поведения материала (хотя бы на основе проверки независимости податливости  $\varepsilon(t; \bar{\sigma}, t_*)/\bar{\sigma}$  от  $\bar{\sigma}$ ). Так как предположение о постоянстве скорости нагружения — идеализация, чтобы оценивать влияние этих отклонений от идеального режима на данные испытаний, необходимо аналитически исследовать КП для произвольной непрерывной программы нагружения

$$\sigma(t) = \bar{\sigma}f(t/t_*) \text{ при } t \in [0, t_*], \quad \sigma(t) = \bar{\sigma} = \text{const при } t > t_*, \quad (2)$$

где  $t_* > 0$  и  $f(x)$  — произвольная непрерывная функция на  $[0; 1]$ , такая, что  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ .

Испытания на ползучесть при гамп-нагружениях (1) (и более общих нагружениях (2)) и грамотный учет влияния начальной стадии, зависящей от двух параметров, при обработке данных измерений позволяют обследовать разные аспекты поведения материала, собрать более богатую информацию для выбора, идентификации и верификации адекватной модели, выявить и

проверить необходимые условия применимости ОС к исследуемому материалу. Отсюда следует необходимость системного *аналитического* изучения влияния характеристик начальной стадии нагружений (2) на общие свойства теоретических кривых ползучести (и релаксации), которые порождает применяемое ОС (например, линейное ОС вязкоупругости или обобщающее его ОС «нелинейной теории наследственности» Ю. Н. Работнова [26–31]) с произвольными материальными функциями, а не только для их частных форм. Такое исследование не было выполнено (в общей постановке и в полном объеме) даже для линейного ОС (см. обзоры в [25, 32]), хотя оно весьма полезно для уточнения арсенала его возможностей и области (не)применимости и выявления индикаторов нелинейности поведения материалов по результатам испытаний.

Данная работа — очередной шаг в программе качественного анализа линейного ОС вязкоупругости (и нелинейного ОС Работнова) с произвольными функциями релаксации и ползучести (ФР и ФП) [23, 25, 31–35]:

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t - \tau) d\varepsilon(\tau), \quad \varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t - \tau) d\sigma(\tau), \quad t \geq 0. \quad (3)$$

ОС (3) описывает изотермические одноосные процессы в структурно-стабильных (не стареющих) вязкоупругопластичных материалах, характеризующиеся в данной точке тела историей напряжения  $\sigma(t)$  и деформации  $\varepsilon(t)$ . Взаимно обратными операторами вида (3) (с объемными и сдвиговыми ФР и ФП) задаются и трехмерные ОС вязкоупругости изотропных сред, а также зависимости между историями (обобщенных) нагрузок и перемещений при испытаниях образцов на растяжение, кручение, изгиб, индентирование и т. п. Основные способы идентификации ОС (3) — определение ФР и ФП по экспериментальным кривым релаксации или ползучести материала.

Задачи этой работы — вывод уравнения семейства кривых ползучести, порождаемых ОС (3) с произвольной функцией ползучести в случае произвольных *неубывающих* начальных стадий (НС) нагружения (2) до заданного уровня напряжения  $\bar{\sigma}$ , и аналитическое изучение их качественных свойств: интервалов монотонности и выпуклости КП, их асимптотики, влияния параметров НС, условий независимости асимптотики от НС, отклонения КП с разными НС друг от друга, характера и скорости сходимости семейств КП к идеальным КП  $\varepsilon = \bar{\sigma}\Pi(t)$  при мгновенном нагружении, когда длительность НС  $t_*$  стремится к нулю, создание теоретической базы для разработки методик идентификации функции ползучести по экспериментальным КП с начальной стадией в области линейности материала [23–25].

**1. Ограничения на функции ползучести и релаксации. Основные классы линейных моделей.** Функции ползучести и релаксации (ФП и ФР) в (3) предполагаются положительными и дифференцируемыми на интервале  $(0; \infty)$ , функция  $\Pi(t)$  — возрастающей и выпуклой вверх на  $(0; \infty)$  [32], а  $R(t)$  — убывающей и выпуклой вниз, ФР может иметь интегрируемую особенность и включать слагаемое  $\eta\delta(t)$ , где  $\delta(t)$  — дельта-функция,  $\eta > 0$ . Из положительности и монотонности ФП и ФР на  $(0; \infty)$  следует, что в точке  $t = 0$  существуют пределы справа  $\Pi(0+) = \inf \Pi(t) \geq 0$  и  $R(0+) = \sup R(t) > 0$  (возможно  $R(0+) = +\infty$ ) и предел  $R(+\infty) = \inf R(t) \geq 0$ . Входные процессы

$\sigma(t)$  или  $\varepsilon(t)$  предполагаются кусочно непрерывными и кусочно гладкими при  $t \geq 0$ .

Если  $\Pi(0) \neq 0$  (далее используется краткое обозначение  $y(0) := y(0+)$  для предела функции  $y(t)$  справа в точке  $t = 0$ ), то  $R(0) = 1/\Pi(0) < \infty$ , и на линейном пространстве *непрерывных* кусочно гладких при  $t \geq 0$  функций операторы (3) представимы в виде

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= R(0)\varepsilon(t) + \int_0^t \dot{R}(t - \tau)\varepsilon(\tau)d\tau, \\ \varepsilon(t) &= \Pi(0)\sigma(t) + \int_0^t \dot{\Pi}(t - \tau)\sigma(\tau)d\tau, \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Операторы (3) взаимно обратны, и поэтому ФП и ФР связаны уравнением

$$\int_0^t \Pi(t - \tau)R(\tau)d\tau = t, \text{ или } \int_0^t \dot{\Pi}(t - \tau)R(\tau)d\tau + \Pi(0)R(t) = 1, \quad t > 0, \tag{5}$$

а ОС (3) содержит только одну независимую материальную функцию. Зная ФР, можно найти ФП из уравнения (5), и наоборот. Применяв к (5) преобразование Лапласа—Карсона, получим связь между изображениями ФП и ФР:

$$\tilde{\Pi}(p)\tilde{R}(p) \equiv 1.$$

Свойства семейств основных теоретических квазистатических кривых (диаграмм деформирования при постоянных скоростях деформации или нагружения, кривых ползучести при ступенчатом нагружении, кривых ползучести и релаксации с произвольной начальной стадией нагружения и др.), порождаемых ОС (3) с произвольной ФП, необходимые математические и феноменологические ограничения на ФП и ФР проанализированы в цикле работ [23, 25, 32–35] и др. Анализ, в частности, показал, что среди моделей, задаваемых ОС (3) с различными ФР и ФП, необходимо выделять как минимум три основных класса, поскольку качественные свойства базовых теоретических кривых моделей этих классов в окрестности точки  $t = 0$  (а также особенности постановки и решения краевых задач) заметно отличаются.

- 1) Регулярные модели (РеМ) — модели, у которых  $\Pi(0) \neq 0$ . Тогда мгновенный модуль  $E = R(0) = 1/\Pi(0)$  диаграмм деформирования с постоянной скоростью конечен,  $\dot{\Pi}(0)/\Pi(0) = -\dot{R}(0)/R(0)$  [32], а ОС (3) и первое уравнение (5) сводятся к уравнениям Вольтерры *второго* рода (4) и (5) (если  $\dot{\Pi}(0+) < \infty$ , ядра ограничены, и уравнения (4) и (5) однозначно разрешимы в пространствах  $L_1[0, b]$ ).
- 2) Сингулярные модели (СиМ) — модели с ФР, содержащей слагаемое  $\eta\delta(t)$ ,  $\eta > 0$ ; тогда  $\Pi(0) = 0$  и  $\dot{\Pi}(0) = \eta^{-1}$ . ФР  $R = \eta\delta(t)$  задает ньютоновскую жидкость с ОС  $\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$  и входит слагаемым в ФР половины реологических моделей из линейных пружин и демпферов.
- 3) Модели с неограниченной ФР (НеМ), не содержащей слагаемого  $\eta\delta(t)$ , но имеющей интегрируемую особенность в точке  $t = 0$  ( $R(0+) = +\infty$ ). Как и СиМ, они нерегулярны:  $\Pi(0) = 0$ . В случае  $\Pi(0) = 0$  (4) и (5) — уравнения Вольтерры первого рода, что приводит к некорректным задачам, особенностям в нуле у КР, бесконечности мгновенного модуля, отсутствию мгновенной диаграммы деформирования и т. п. [32–34].

При малых временах или больших скоростях деформации (когда велико значение безразмерного параметра  $\dot{\epsilon}\tau$ ,  $\tau$  — минимальное время релаксации) РеМ ведут себя как твердые тела, а СиМ — как жидкости, но при больших временах и малых скоростях модели могут сменить поведение на «противоположное», например, модели Максвелла и все их параллельные соединения (РеМ- $2k$ ,  $k \geq 1$ ) ведут себя при  $t \rightarrow \infty$  как жидкости (в частности, у них  $R(+\infty) = 0$  и  $R(t)\Pi(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ), а модели Фойгта и их последовательные соединения (СиМ- $2k$ ) — как твердые тела (у них  $R(+\infty) > 0$  и  $R(t)\Pi(t) \rightarrow 1$  при  $t \rightarrow \infty$ ) [33].

Третий класс занимает промежуточное положение между первыми двумя. К нему относится, например, ФР  $R(t) = At^{-u}$ ,  $u \in (0; 1)$ ,  $A > 0$ , задающая так называемый «фрактальный» элемент (“spring-pot”) «фрактальных» моделей (“fractional models”) с оператором дробного дифференцирования порядка  $u$  (эту модель иногда называют моделью Скот—Блэра) [36–45, 26–28]. Соответствующая (в силу (5)) ФП имеет вид  $\Pi(t) = A^{-1}C(u)t^u$ ,  $C(u) := (u\pi)^{-1} \sin u\pi$ , и обладает не только свойством  $\Pi(0) = 0$ , как и СиМ, но и свойством  $\dot{\Pi}(0) = \infty$ , переходным к  $\Pi(0) \neq 0$ , характеризующему РеМ. Степенная модель интересна еще и тем, что  $R(t)\Pi(t) = C(u) = \text{const}$  при  $t > 0$ , причем  $C(u)$  может принимать любые значения из интервала  $(0; 1)$ ; при  $u \rightarrow 0$   $C(u) \rightarrow 1$  и степенная модель вырождается в упругий элемент (РеМ-1) с  $R(t) = A = \text{const}$ ,  $\Pi = A^{-1}$ , а при  $u \rightarrow 1 - 0$  и связи  $A = \eta(1 - u)$ ,  $\eta = \text{const} > 0$ , она вырождается в вязкий элемент (СиМ-1) с  $R(t) = \eta\delta(t)$ ,  $\Pi = t/\eta$ . Таким образом, двухпараметрическое семейство степенных моделей связывает «гомотопией» упругий элемент с вязким — так же, как их связывают семейства двухзвенных моделей Максвелла (РеМ-2) и Фойгта (СиМ-2). Отметим, что интерес к исследованию и разнообразным приложениям моделей, описываемых уравнениями с производными дробных порядков, обострился в последнее время, они считаются перспективными по сравнению с моделями с дискретным спектром релаксации (ФП и ФР которых представляются рядами Прони) [46–60, 19, 32–35].

Последовательное соединение РеМ с СиМ или РеМ с фрактальным элементом (ФП складываются) дает РеМ; в частности, фрактальная модель Максвелла ( $\Pi = \alpha t^u + \beta$ ) регулярна. Параллельное соединение РеМ с СиМ дает СиМ (ФР складываются), а РеМ с фрактальным элементом дает НеМ; в частности, фрактальная модель Фойгта ( $R = At^{-u} + r$ ) нерегулярна.

Три выделенных класса не исчерпывают все возможные типы поведения моделей вида (3) в окрестности точки  $t = 0$  и при больших скоростях (например, параллельное соединение моделей из второго и третьего класса даст модель с ФР, в которой имеется слагаемое с сингулярностью и слагаемое с интегрируемой особенностью), хотя охватывают все модели, используемые в практических приложениях, монографиях и учебной литературе.

Все структурные реологические модели, собранные из линейных пружин и демпферов посредством последовательных и параллельных соединений, описываются ОС (3). Любая такая модель задается уравнением вида  $\mathbf{P}[\mathbf{d}]\sigma = \mathbf{Q}[\mathbf{d}]\varepsilon$  с двумя дифференциальными операторами с постоянными коэффициентами, где порядки операторов (их характеристических многочленов)  $p = \deg \mathbf{P}$ ,  $p \geq 0$ , и  $q = \deg \mathbf{Q}$  либо равны, либо  $q = p + 1$ , а характеристические корни вещественны, различны и неотрицательны. Из теории линей-

ных дифференциальных уравнений следует, что функция ползучести любой реологической модели — сумма экспонент с отрицательными показателями и коэффициентами, и, возможно, функции  $\alpha t + \beta$ ,  $\alpha, \beta \geq 0$ , а функция релаксации — сумма экспонент с отрицательными показателями и положительными коэффициентами и, возможно, постоянной  $\beta \geq 0$  и сингулярности  $\eta\delta(t)$ ,  $\eta \geq 0$ . Схемы и названия всех двух-, трех- и четырехзвенных моделей (в терминологии нет единства) приведены в [32] на рис. 1. Можно доказать, что множество всех несократимых  $n$ -звенных моделей распадается ровно на два класса эквивалентности: РеМ- $n$  и СиМ- $n$  (структурно различные модели мы называем эквивалентными, если они задаются одинаковыми семействами ФП или ФР):

- 1) эквивалентны трехзвенные РеМ Пойнтинга—Томсона и Кельвина [32, рис. 1, а];
- 2) все четыре РеМ-4 [32, рис. 1, в] эквивалентны модели стандартного тела (последовательному соединению моделей Максвелла и Фойгта, т. е. РеМ-2 и СиМ-2);
- 3) все РеМ- $2k$  эквивалентны параллельному соединению  $k$  моделей Максвелла с разными временами релаксации;
- 4) все СиМ- $2k$  эквивалентны последовательному соединению  $k$  моделей Фойгта с разными временами ползучести (retardation time);
- 5) РеМ- $(2k + 1)$  получается из СиМ- $2k$  последовательным присоединением упругого элемента (РеМ-1), а СиМ- $(2k + 1)$  — из РеМ- $2k$  параллельным подключением вязкого элемента (СиМ-1).

Например, семейство ФП

$$\Pi(t) = \alpha t + \beta - \gamma e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad \gamma \in [0, \beta], \quad (6)$$

порождает все РеМ-4 при  $\gamma \in (0; \beta)$ ,  $\alpha, \beta > 0$  (ФР  $R = E_1 e^{-\mu_1 t} + E_2 e^{-\mu_2 t}$ ), а при  $\alpha = 0$  — РеМ-3 (модель Кельвина,  $R = E e^{-\mu t} + r$ ). Так как  $\Pi(0) = \beta - \gamma$ , ФП (6) порождает СиМ, когда  $\gamma = \beta$ : при  $\lambda\beta = 0$  — ньютоновскую жидкость, при  $\alpha = 0$  — модель Фойгта ( $R = \eta\delta(t) + E$ ), при  $\alpha > 0$  получаются (все) СиМ-3 ( $R = \eta\delta(t) + E e^{-\mu t}$ ). При  $\gamma = 0$  (6) дает модель Максвелла ( $R = E e^{-\mu t}$ ). Случай  $\gamma < 0$  приводит к нарушению ограничения  $\ddot{\Pi}(t) \leq 0$ , что влечет возрастание кривой обратной ползучести (противоречие с данными испытаний материалов) [32]. Эти классические модели будут использованы для иллюстрации общих свойств кривых ползучести ОС (3).

**2. Свойства кривых ползучести с произвольной монотонной начальной стадией нагружения.** Отклик ОС (3) на непрерывную программу нагружения (2) с выходом на постоянный уровень напряжения  $\bar{\sigma} > 0$  за время  $t_* > 0$  имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon(t; t_*) &= \bar{\sigma} t_*^{-1} \int_0^t \Pi(t - \tau) f'(\tau/t_*) d\tau = \\ &= \bar{\sigma} \int_0^{t/t_*} \Pi(t - t_* x) f'(x) dx \quad \text{при } t \in [0; t_*]: \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(t; t_*) &= \bar{\sigma} t_*^{-1} \int_0^{t_*} \Pi(t - \tau) f'(\tau/t_*) d\tau = \\ &= \bar{\sigma} \int_0^1 \Pi(t - t_* x) f'(x) dx \quad \text{при } t \geq t_*. \quad (8) \end{aligned}$$

Функция  $f(x)$ , задающая форму НС нагружения, предполагается *неубывающей* непрерывной кусочно дифференцируемой на  $[0; 1]$  ( $f'(x) \geq 0$ ), такой, что  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$  и  $0 < f(x) < 1$  при  $0 < x < 1$ .

На рис. 1, а приведены примеры функций  $f(x)$ , задающих НС нагружения (2). Синяя кривая 1 — график функции  $f = 4(x - 0.5)^3 + 0.5$ , голубая 2 —  $f = x^4$ , штриховые (голубые) кривые 3 и 4 —  $f = x^{1/3}$  и  $f = x^{1/10}$ , две черные кривые 5, 6 — графики первых двух членов последовательности функций

$$f_n(x) = \begin{cases} 0.5(2x)^{2n} & \text{при } x \in [0; 0.5], \\ -0.5(2(1-x))^{2n} + 1 & \text{при } x \in [0.5; 1]. \end{cases} \quad (9)$$

Все  $f_n(x)$  имеют точку перегиба  $x = 0.5$  ( $f_n(0.5) = 0.5$ ,  $f'_n(0.5) = 2n \rightarrow \infty$ ), последовательность  $\{f'_n\}$  дельтаобразна:  $f'_n(x) \rightarrow \delta(x - 0.5)$ ,  $\{f_n\}$  сходится на отрезке  $[0; 1]$  к функции  $f_*$ :  $f_*(x) = 0$  при  $[0; 0.5)$ ,  $f_*(x) = 1$  при  $(0.5; 1]$ ,  $f_*(0.5) = 0.5$ .

На рис. 1, б приведены графики производных  $y = f'(x)$ .

Поведение деформации (7) на НС  $[0; t_*]$ , естественно, зависит от поведения  $f'(x)$ . Общие свойства начальной стадии КП (7) для любой *неубывающей*  $f(x)$  таковы:

- 1)  $\varepsilon(0; t_*) = 0$ ,  $\dot{\varepsilon}(0; t_*) = \bar{\sigma} t_*^{-1} \Pi(0) f'(0) \geq 0$ ;
- 2)  $\varepsilon(t; t_*)$  нестрого возрастает по  $t$  на  $[0; t_*]$  (т. к.  $\dot{\varepsilon}(t; t_*) \geq 0$ , если  $f'(x) \geq 0$  на  $[0; 1]$ );
- 3)  $\varepsilon(t; t_*)$  убывает по  $t_*$  (т. к.  $\varepsilon'_{t_*}(t; t_*) \leq 0$ ).

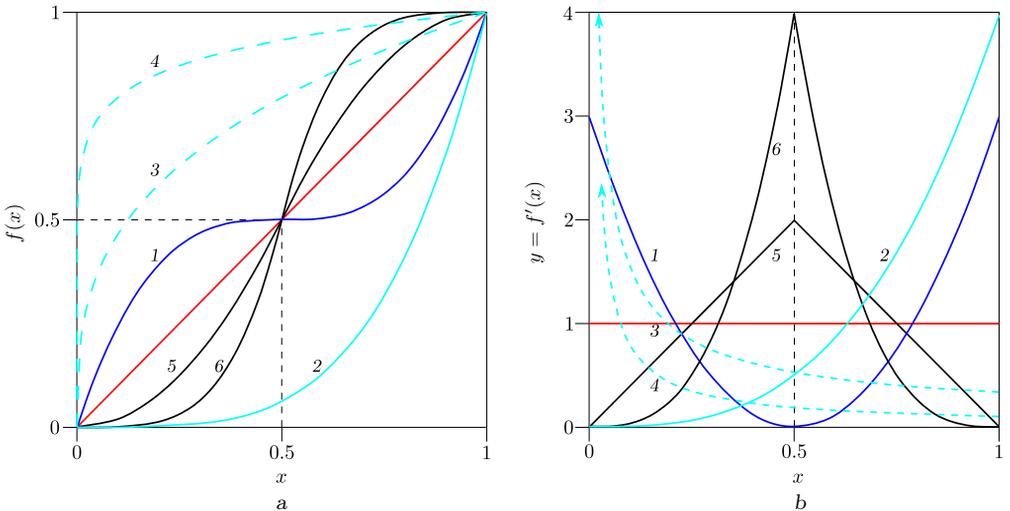


Рис. 1. а — графики функций  $f(x)$ , задающих форму начальных стадий нагружения; б — графики  $y = f'(x)$ : 1 —  $f(x) = 4(x - 0.5)^3 + 0.5$ , 2 —  $f(x) = x^4$ , 3 —  $f(x) = x^{1/3}$ , 4 —  $f(x) = x^{1/10}$ , 5 —  $f_1(x)$ , 6 —  $f_2(x)$  (см. (9); онлайн в цвете)

[Figure 1. a — the graphs of functions  $f(x)$  defining possible shapes of initial stages of loading; б — graphs of their derivatives  $y = f'(x)$ : 1 —  $f(x) = 4(x - 0.5)^3 + 0.5$ , 2 —  $f(x) = x^4$ , 3 —  $f(x) = x^{1/3}$ , 4 —  $f(x) = x^{1/10}$ , 5 —  $f_1(x)$ , 6 —  $f_2(x)$  (see Eq. (9); color online)]

В самом деле, при  $t \leq t_*$  имеем

$$\dot{\varepsilon}(t; t_*) = \bar{\sigma} t_*^{-1} \Pi(0) f'(t/t_*) + \bar{\sigma} \int_0^{t/t_*} \dot{\Pi}(t - t_* x) f'(x) dx \geq 0,$$

$$\varepsilon'_{t_*}(t; t_*) = -\bar{\sigma} t_*^{-2} \Pi(0) f'(t/t_*) - \bar{\sigma} \int_0^{t/t_*} \dot{\Pi}(t - t_* x) x f'(x) dx \leq 0,$$

$$\ddot{\varepsilon}(t; t_*) = \bar{\sigma} t_*^{-2} \Pi(0) f''(t/t_*) + \bar{\sigma} t_*^{-1} \ddot{\Pi}(0) f'(t/t_*) + \bar{\sigma} \int_0^{t/t_*} \ddot{\Pi}(t - t_* x) f'(x) dx.$$

Покажем, что качественные свойства КП (8) на втором участке, наоборот, от  $f$  зависят мало и практически совпадают со свойствами идеальной КП  $\varepsilon(t; 0)$  (при мгновенном нагружении  $\sigma(t) = \bar{\sigma} h(t)$ ,  $h(t)$  — функции Хевисайда), и отклонение  $|\varepsilon(t; t_*) - \varepsilon(t; 0)|$  стремится к нулю как при  $t_* \rightarrow 0$ , так и при  $t \rightarrow \infty$  (если только  $\dot{\Pi}(\infty) = 0$ ).

Действительно, на луче  $[t_*; \infty)$  КП (8) *возрастает по  $t$  и выгнута вверх*:

$$\dot{\varepsilon}(t; t_*) = \bar{\sigma} \int_0^1 \dot{\Pi}(t - t_* x) f'(x) dx > 0, \quad t \geq t_*,$$

$$\ddot{\varepsilon}(t; t_*) = \bar{\sigma} \int_0^1 \ddot{\Pi}(t - t_* x) f'(x) dx \leq 0,$$

так как  $\dot{\Pi}(t) > 0$ ,  $f'(x) \geq 0$ ,  $\ddot{\Pi}(t) \leq 0$ . Для модели Максвелла  $\ddot{\Pi}(t) \equiv 0$  и  $\ddot{\varepsilon}(t; t_*) \equiv 0$  при всех  $t \geq t_*$ ; если  $f(x)$  строго возрастает, то  $\ddot{\varepsilon}(t_0; t_*) = 0$  возможно только при  $\ddot{\Pi}(t) \equiv 0$  на  $[t_0 - t_*; t_*]$ , а  $\dot{\varepsilon}(t_0; t_*) = 0$  возможно только при  $\Pi(t) \equiv \text{const}$  на  $[t_0 - t_*; t_*]$ .

Так как  $\varepsilon_{t_*}(t; t_*) = -\bar{\sigma} \int_0^1 \dot{\Pi}(t - t_* x) x f'(x) dx$  и  $\dot{\Pi}(t) > 0$ ,  $f'(x) \geq 0$ , имеем  $\varepsilon_{t_*}(t; t_*) < 0$ , т. е.  $\varepsilon(t; t_*)$  *убывает по  $t_*$*  при любом фиксированном  $t \geq t_*$  (как и при  $t \leq t_*$ ): если  $t_2 < t_1$ , то  $\varepsilon(t; t_2) > \varepsilon(t; t_1)$ .

По теореме о среднем для интеграла (8) (т. к.  $f'(x)$  не меняет знак, а  $\Pi(t - t_* x)$  непрерывна) имеем  $\varepsilon(t; t_*) = \bar{\sigma} \Pi(t - \xi) [f(1) - f(0)] = \bar{\sigma} \Pi(t - \xi)$ ,  $\xi \in (0; t_*)$  (конечно,  $\xi$  зависит от  $t, t_*$  и  $f$ ). Так как ФП возрастает, для любой неубывающей функции  $f$  справедлива оценка

$$\bar{\sigma} \Pi(t - t_*) < \varepsilon(t; t_*) < \bar{\sigma} \Pi(t) \quad \text{при всех } t \geq t_* \quad (10)$$

(равенство в некоторый момент  $t = t_1$  возможно только при  $\Pi(t) \equiv \text{const}$  на  $[t_1 - t_*; t_1]$ ).

При  $t \rightarrow \infty$  из (10) следует, что  $\varepsilon(t; t_*) \rightarrow \bar{\sigma} \Pi(\infty)$  при любом фиксированном  $t_*$ , т. е. *все КП (8) имеют горизонтальную асимптоту  $\varepsilon = \bar{\sigma} \Pi(\infty)$ , если ФП ограничена*. Эта асимптота не зависит от  $t_*$  и  $f$  и совпадает с асимптотой идеальной КП (ИКП). Если же  $\Pi(\infty) = \infty$ , то  $\varepsilon(t; t_*) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$  и отклонение  $\varepsilon(t; t_*) - \varepsilon(t; 0)$  может не стремиться к нулю (если  $\dot{\Pi}(\infty) > 0$ ).

Выпишем значение КП (7) в точке сопряжения  $t = t_*$ :

$$\varepsilon(t_*) := \varepsilon(t_*; t_*) = \bar{\sigma} \int_0^1 \Pi(t_* - t_* x) f'(x) dx;$$

и ее производную по  $t_*$ :

$$\varepsilon'(t_*) = \bar{\sigma} \int_0^1 \dot{\Pi}(t - t_*x)(1 - x)f'(x)dx;$$

$\varepsilon'(t_*) \geq 0$ , значит,  $\varepsilon(t_*)$  возрастает.

При  $t_* \rightarrow 0$   $\varepsilon(t_*)$  стремится к  $\bar{\sigma}\Pi(0)[f(1) - f(0)] = \bar{\sigma}\Pi(0)$ , т. е. к начальному значению ИКП; при этом верна оценка  $\bar{\sigma}\Pi(0) < \varepsilon(t_*; t_*) < \bar{\sigma}\Pi(t_*)$  (см. (10)). В точке  $t = t_*$  все КП (8) непрерывны (ибо  $f(1) = 1$ ), но имеют изломы, так как скачок производной  $\dot{\varepsilon}(t; t_*)$  пропорционален скачку  $\dot{\sigma}(t)$  в точке  $t = t_*$ :  $\hat{\varepsilon}(t_*; t_*) = \Pi(0)\hat{\sigma}(t_*) = -\Pi(0)\bar{\varepsilon}t_*^{-1}f'(1)$  ( $\hat{y}(t_0)$  обозначает скачок  $y(t)$  в точке  $t_0$ ). Только в случаях  $f'(1) = 0$  или  $\Pi(0) = 0$  скорость деформации  $\dot{\varepsilon}(t; t_*)$  тоже непрерывна в точке  $t = t_*$ . Предел  $\dot{\varepsilon}(t; t_*)$  справа:

$$\dot{\varepsilon}(t_* + 0; t_*) = \bar{\sigma} \int_0^1 \dot{\Pi}(t_* - t_*x)f'(x)dx = \bar{\sigma}\dot{\Pi}(\theta t_*) > 0,$$

где  $\theta = \theta(t_*) \in (0; 1)$ .

Так как  $\dot{\Pi}(t)$  убывает, то  $\bar{\sigma}\dot{\Pi}(t_*) \leq \dot{\varepsilon}(t_* + 0; t_*) \leq \bar{\sigma}\dot{\Pi}(0)$ , откуда при  $t_* \rightarrow 0$  имеем  $\dot{\varepsilon}(t_* + 0; t_*) \rightarrow \bar{\sigma}\dot{\Pi}(0+)$  (в силу непрерывности  $\dot{\Pi}(t)$  в точке  $t = 0$ ). Легко доказать (дифференцированием по  $t_*$ ), что начальная скорость ползучести  $\dot{\varepsilon}(t_* + 0; t_*)$  монотонно убывает по аргументу  $t_*$ , ибо  $\dot{\Pi}(t)$  убывает (ФП выпукла вверх).

Исследуем поведение семейства КП (8) при  $t_* \rightarrow 0$  и при  $t \rightarrow \infty$ .

Из (10) следует, что для любой допустимой ФП и любой неубывающей  $f(x)$  КП (8) всегда лежит ниже идеальной КП  $\varepsilon(t; 0) = \bar{\sigma}\Pi(t)$  (но выше ее сдвига  $\bar{\sigma}\Pi(t - t_*)$ ), а при  $t_* \rightarrow 0$  семейство КП  $\varepsilon(t; t_*)$  (с фиксированной НС  $f$ ) сходится к ИКП для любого  $t > 0$  (в силу непрерывности ФП). Сходимость семейства (8) к  $\varepsilon(t; 0)$  равномерна на любом луче  $t \geq t_0$  с  $t_0 > 0$ . Действительно, так как ФП возрастает, то для любых  $f$  и  $\bar{\sigma} > 0$  из (10) следует оценка

$$0 < \varepsilon(t; 0) - \varepsilon(t; t_*) < \bar{\sigma}\Pi(t) - \bar{\sigma}\Pi(t - t_*) \text{ для всех } t \geq t_*. \quad (11)$$

В правой части неравенства стоит функция, описывающая кривую обратной ползучести (с полной разгрузкой в момент  $t_*$ ) [32]. Равномерная сходимость на любом отрезке следует из (11) и равномерной непрерывности ФП на отрезке (функция, непрерывная на компакте, равномерно непрерывна на нем). Для доказательства равномерной сходимости на любом луче  $t \geq t_0$  с  $t_0 > 0$  надо учесть, что  $\sup \dot{\Pi}(t) = \dot{\Pi}(t_0)$  (это следует из убывания и положительности  $\dot{\Pi}(t)$ ). Взяв  $t_* \leq t_0$ , получим, что оценка (11) справедлива для всех  $t \geq t_0$ . По теореме Лагранжа  $\Pi(t) - \Pi(t - t_*) = \dot{\Pi}(\zeta)t_* \leq Mt_*$ ,  $M := \sup \dot{\Pi}(t)$ ; значит,  $|\varepsilon(t; t_*) - \varepsilon(t; 0)| < \bar{\sigma}\dot{\Pi}(t_0)t_*$  на всем луче  $t > t_0$  и  $\sup |\varepsilon(t; t_*) - \varepsilon(t; 0)| = O(t_*) \rightarrow 0$  при  $t_* \rightarrow 0$  (для любой функции  $f(x)$ ). Если  $\Pi(0) > 0$ , то равномерной сходимости КП на луче  $[0; \infty)$  нет, так как при  $t = 0$   $\varepsilon(0; t_*) = 0$ , а  $\varepsilon(0; 0) = \bar{\sigma}\Pi(0) > 0$ .

Так как при  $t \rightarrow \infty$   $\Pi(t) - \Pi(t - t_*) \rightarrow vt_*$ ,  $v := \dot{\Pi}(\infty)$  [32], то из (11) следует, что в случае  $v = 0$  уклонение  $|\varepsilon(t; t_*) - \varepsilon(t; 0)|$  стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$  (при  $v > 0$  это не так).

Оценим *снизу* отклонение КП (8) от ИКП  $\varepsilon(t; 0) = \bar{\sigma}\Pi(t)$  при  $t \geq t_*$  и уточним скорость сходимости семейства  $\varepsilon(t; t_*)$  к ИКП при  $t_* \rightarrow 0$ . Так как  $\Pi(t - \tau) = \Pi(t) - \dot{\Pi}(t)\tau + q(t, \tau)\tau^2$ , где

$$q(t, \tau) := [\Pi(t - \tau) - \Pi(t) + \dot{\Pi}(t)\tau]\tau^{-2},$$

из (8) следует представление

$$\begin{aligned} \varepsilon(t; t_*) &= \bar{\sigma}\Pi(t) - \bar{\sigma}t_*^{-1}\dot{\Pi}(t) \int_0^{t_*} \tau f'(\tau/t_*)d\tau + Q(t, t_*), \\ \varepsilon(t; t_*) - \varepsilon(t; 0) &= \varepsilon(t; t_*) - \bar{\sigma}\Pi(t) = -\bar{\sigma}(1 - S)t_*\dot{\Pi}(t) + Q(t, t_*), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$Q := \bar{\sigma}t_*^{-1} \int_0^{t_*} q(t, \tau)\tau^2 f'(\tau/t_*)d\tau, \quad S := \int_0^1 f(x)dx.$$

По теореме Лагранжа  $q(t, \tau) = [\dot{\Pi}(t) - \dot{\Pi}(t - \xi)]/\tau$ ,  $\xi = \xi(t, \tau) \in (0; \tau) \subset (0; t_*)$ . Так как  $\dot{\Pi}(t)$  убывает,  $q(t, \tau) \leq 0$  для всех  $t > \tau > 0$ , и для любого  $\tau > 0$  имеем  $q(t, \tau) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  (ибо  $\dot{\Pi}(t - \xi) \rightarrow \dot{\Pi}(\infty) = v$ ). Из  $q(t, \tau) \leq 0$  следует, что  $Q(t, t_*) \leq 0$  для всех неубывающих функций  $f$  и  $t \geq t_*$  (равенство  $Q(t_1, t_*) = 0$  возможно лишь при  $\ddot{\Pi}(t) \equiv 0$  на  $[t_1 - t_*; t_1]$ ;  $q(t, \tau) \equiv 0$  и  $Q(t, t_*) \equiv 0$  при всех  $t \geq t_*$  только для модели Максвелла). Таким образом, для любой возрастающей  $f(x)$  имеем

$$S \in (0; 1), \quad -\bar{\sigma}(1 - S)\dot{\Pi}(t)t_* < 0 \text{ и } Q(t, t_*) \leq 0 \text{ при } t \geq t_*. \quad (13)$$

В силу (12) *скорость сходимости семейства КП к ИКП при  $t_* \rightarrow 0$  определяется слагаемым  $-\bar{\sigma}(1 - S)\dot{\Pi}(t)t_*$* , ибо  $Q(t, t_*) = O(t_*^2)$  при  $t_* \rightarrow 0$  (по теореме о среднем  $Q(t, t_*) = \bar{\varepsilon}q(t, \xi)\xi^2$ ,  $\xi \in (0; t_*)$ ). *Форма НС влияет на главный член отклонения (12)  $\delta := -\bar{\sigma}(1 - S)t_*\dot{\Pi}(t)$  только через интеграл  $S[f]$  от  $f(x)$* ; чем ближе  $S[f]$  к единице, тем меньше КП уклоняется от ИКП при малых  $t_*$ . Из (12) и (13) получаются следующие оценки для отклонения:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t; t_*) - \varepsilon(t; 0) &< -\bar{\sigma}\dot{\Pi}(t)(1 - S)t_* < 0, \\ \text{или} \quad |\varepsilon(t; t_*) - \varepsilon(t; 0)| &\geq \bar{\sigma}\dot{\Pi}(t)(1 - S)t_* > 0, \quad t \geq t_*. \end{aligned} \quad (14)$$

Так как  $\dot{\Pi}(t) \geq \dot{\Pi}(\infty) = v \geq 0$ , верна равномерная оценка снизу:

$$|\varepsilon(t; t_*) - \varepsilon(t; 0)| \geq \bar{\sigma}v(1 - S)t_*, \quad t \geq t_*. \quad (15)$$

Из нее следует, в частности, что  $|\varepsilon(t; t_*) - \varepsilon(t; 0)|$  не стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$  в случае  $v > 0$ . Таким образом, доказано, что *условие  $\dot{\Pi}(\infty) = 0$  не только достаточно, но и необходимо для сходимости семейства КП (8) к ИКП при  $t \rightarrow \infty$ , т. е. является критерием затухания памяти при ползучести [12, 20, 23, 28, 32, 61]*. Отметим, что ему не удовлетворяют, например, все параллельные соединения моделей Максвелла (т. е. все модели РеМ-2n с четным числом звеньев, включая модель стандартного тела) [32].

Из (11) следует, что разность КП (8) для двух неубывающих НС  $f_1$  и  $f_2$  допускает оценку

$$|\varepsilon_2(t; t_*) - \varepsilon_1(t; t_*)| \leq \bar{\sigma}\Pi(t) - \bar{\sigma}\Pi(t - t_*), \quad t \geq t_*, \quad (16)$$

через ФП и ее сдвиг. Отсюда для любого  $t_0 > 0$ :  $|\varepsilon_2(t; t_*) - \varepsilon_1(t; t_*)| \leq \dot{\Pi}(t - \zeta)t_* \leq \dot{\Pi}(t - t_*)t_* \leq \dot{\Pi}(t_0)t_*$  при  $t \geq t_0 + t_*$ , следовательно,  $|\varepsilon_2(t; t_*) - \varepsilon_1(t; t_*)|$  равномерно сходится к нулю при  $t_* \rightarrow 0$  на любом луче  $t \geq t_0$  (если  $\dot{\Pi}(0) \neq \infty$ , можно взять  $t_0 = 0$ ). Если  $v = 0$ , то для любого  $t_* > 0$   $|\varepsilon_2(t; t_*) - \varepsilon_1(t; t_*)| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  (так как  $\Pi(t) - \Pi(t - t_*) \rightarrow 0$ ). Если  $v > 0$ , то это верно лишь в том случае, если интегралы  $S_1$  и  $S_2$  совпадают, т. к. по (12)

$$|\varepsilon_2(t; t_*) - \varepsilon_1(t; t_*)| = |\bar{\sigma}t_*(S_2 - S_1)\dot{\Pi}(t) + Q_2(t, t_*) - Q_1(t, t_*)|,$$

и (по теореме о среднем)  $Q(t, t_*) = \bar{\sigma}q(t, \xi)\xi^2 \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , поскольку  $q(t, \tau) \rightarrow 0$ , а  $\xi \in (0; t_*)$  ( $\xi$  — ограниченная функция своих аргументов).

Таким образом, доказана следующая теорема о свойствах кривых ползучести (7), (8), порождаемых ОС (3) с произвольной ФП  $\Pi(t)$  в случае программ нагружения (2) с  $\bar{\sigma} > 0$ ,  $t_* > 0$  и произвольной *неубывающей* функцией формы НС  $f(x)$ .

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть  $\Pi(t)$  положительна, дифференцируема, возрастает, (нестрого) выпукла вверх на  $(0, \infty)$ ,  $t_* > 0$ , функция  $f(x)$  непрерывна, кусочно-дифференцируема,  $f'(x) \geq 0$  на  $[0; 1]$ ,  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 1$  и  $0 < f(x) < 1$  при  $0 < x < 1$ . Тогда кривые ползучести (7), (8) с  $\bar{\sigma} > 0$  обладают свойствами:

- 1) при  $t \in [0; t_*]$  функция (7) нестрого возрастает по  $t$  ( $\dot{\varepsilon}(t; t_*) \geq 0$ ) и убывает по  $t_*$ ;  $\varepsilon(0; t_*) = 0$ ,  $\dot{\varepsilon}(0; t_*) = \bar{\sigma}t_*^{-1}\Pi(0)f'(0) \geq 0$ ;
- 2) на луче  $t \geq t_*$  КП (8) возрастает по  $t$  и выпукла вверх; при  $t \rightarrow \infty$   $\varepsilon(t; t_*) \rightarrow \bar{\sigma}\Pi(\infty)$ ;
- 3) в точке  $t = t_*$  все КП (7), (8) непрерывны, значение  $\varepsilon(t_*; t_*)$  возрастает с ростом  $t_*$ ,  $\bar{\sigma}\Pi(0) < \varepsilon(t_*; t_*) < \bar{\sigma}\Pi(t_*)$ ,  $\varepsilon(t_*; t_*) \rightarrow \bar{\sigma}\Pi(0)$  при  $t_* \rightarrow 0$ ;
- 4) скачок скорости деформации в точке  $t = t_*$  равен  $\hat{\varepsilon}(t_*; t_*) = \Pi(0)\hat{\sigma}(t_*) = -\Pi(0)\bar{\sigma}t_*^{-1}f'(1) \leq 0$ ; он равен нулю для всех НС с  $f'(1) = 0$ , а у моделей с  $\Pi(0) = 0$  — для любых НС; у регулярных моделей  $\hat{\varepsilon}(t_*; t_*) < 0$  и отношение скачков для различных  $t_* = t_i$  не зависит от ФП:

$$\hat{\varepsilon}(t_1; t_1)/\hat{\varepsilon}(t_2; t_2) = t_2t_1^{-1}f'_1(1)/f'_2(1);$$

- 5) при всех  $t \geq t_*$  для КП (8) справедлива оценка (10), в частности, КП (8) лежит ниже КП  $\varepsilon(t; 0) = \bar{\sigma}\Pi(t)$  при мгновенном нагружении;
- 6)  $\varepsilon(t; t_*)$  убывает по  $t_*$ , т. е. с уменьшением  $t_*$  КП (7), (8) смещается вверх;
- 7) при  $t_* \rightarrow 0$  семейство КП (7), (8) равномерно сходится к ИКП  $\varepsilon(t; 0)$  на лучах  $t \geq t_0$  с  $t_0 > 0$ ;  $\varepsilon(t_*; t_*) \rightarrow \bar{\sigma}\Pi(0)$ ,  $\dot{\varepsilon}(t_* + 0; t_*) \rightarrow \bar{\sigma}\dot{\Pi}(0)$ ,  $\hat{\varepsilon}(t_*) \rightarrow -\infty$  (если  $\Pi(0) \neq 0$ );
- 8) для отклонения  $\Delta(t; t_*) := \varepsilon(t; t_*) - \varepsilon(t; 0)$  КП (8) от ИКП  $\varepsilon(t; 0)$  справедливо представление (12) и оценки (14) и (15); форма НС влияет на главный член  $\delta := -\bar{\sigma}(1 - S)t_*\dot{\Pi}(t)$  отклонения (12) при  $t_* \rightarrow 0$  только через интеграл  $S[f]$  от  $f(x)$ ;

- 9) для любых двух неубывающих функций  $f_1$  и  $f_2$  разность соответствующих КП (8) удовлетворяет оценке (16), при  $t_* \rightarrow 0$  разность  $|\varepsilon_2(t; t_*) - \varepsilon_1(t; t_*)|$  равномерно сходится к нулю на любом луче  $t \geq t_0$ ,  $t_0 > 0$ ; если  $v = 0$  ( $v := \dot{\Pi}(\infty)$ ), то  $|\varepsilon_2(t; t_*) - \varepsilon_1(t; t_*)| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  (для любого  $t_* > 0$ ), а если  $v > 0$ , то  $|\varepsilon_2(t; t_*) - \varepsilon_1(t; t_*)| \rightarrow 0$  лишь в случае  $S[f_1] = S[f_2]$ ;
- 10)  $\Delta(t; t_*) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  (память о НС затухает) тогда и только тогда, когда  $v = 0$ ;
- 11) если функция ползучести ограничена, то  $v = 0$ , и все КП (8) с фиксированным  $\bar{\sigma}$  имеют при  $t \rightarrow \infty$  общую горизонтальную асимптоту  $\varepsilon = \bar{\sigma}\Pi(\infty)$  (не зависящую от  $t_*$ ).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Большинство установленных свойств КП (7), (8) вытекает только из дифференцируемости и возрастания ФП на полуоси  $t > 0$ , но утверждения пунктов 2, 7–10 существенно опираются на требование выпуклости вверх ФП. В частности, из п. 10 теоремы следует, что память затухает у половины реологических моделей (у всех СиМ- $2k$  и РеМ- $(2k + 1)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ) и не затухает у второй половины (РеМ- $2k$  и СиМ- $(2k - 1)$ ).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При последовательном соединении моделей их ФП складываются, поэтому суммируются и КП (7), (8) и отклонения  $\Delta(t; t_*)$ . Линейная комбинация (с положительными коэффициентами) ФП с  $v = 0$  наследует свойство  $v = 0$ , а наличие хотя бы одного слагаемого с  $v > 0$  обеспечивает  $v > 0$  у суммы ФП.

**3. Примеры кривых ползучести реологических моделей. Их зависимость от начальной стадии нагружения и материальных параметров.** Обнаруженные общие свойства КП (7), (8) с НС проиллюстрируем на примерах моделей Кельвина, Максвелла и Фойгта и фрактальных моделей. В качестве функции формы НС  $f$  будут использованы  $f_0(x) = x$ ,

$$f_1(x) = 4(x - 0.5)^3 + 0.5, \\ f_2(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{при } x \in [0; 0.5], \\ -2(1 - x)^2 + 1 & \text{при } x \in [0.5; 1]. \end{cases} \quad (17)$$

Функции  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  из (17) имеют точку перегиба  $x = 0.5$ ,  $y = 0.5$ , но разные направления выпуклости (см. (9) и кривые 1 и 5 на рис. 1, а). Так как  $f_2'(0) = f_2'(1) = 0$ , у КП с НС  $f_2$   $\dot{\varepsilon}(0; t_*) = 0$ , а в точке  $t = t_*$  у КП нет излома для любой ФП (см. пп. 1, 4 теоремы). У  $f_0 = x$  и функций (17)  $S[f_i] = 1/2$ , и поэтому в силу п. 9 теоремы  $|\varepsilon_i(t; t_*) - \varepsilon_0(t; t_*)| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  для любой ФП.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим кривые ползучести моделей Кельвина–Пойнтинга–Томсона (РеМ-3), состоящей из одного вязкого элемента и двух упругих, и Фойгта (СиМ-2). Подставив ФП  $\Pi = \beta - \gamma e^{-\lambda t}$  с  $\lambda, \beta > 0$  и  $\gamma \in (0, \beta]$  в уравнения КП (7), (8), получим для любой НС с  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ :

$$\varepsilon(t; t_*) = -\bar{\sigma}\gamma e^{-\lambda t} \int_0^{t/t_*} e^{\lambda t_* x} f'(x) dx + \bar{\sigma}\beta[f(t/t_*) - f(0)] = \\ = -\bar{\sigma}\gamma e^{-\lambda t} I(t/t_*) + \bar{\sigma}\beta f(t/t_*), \quad t \leq t_*, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(t; t_*) &= -\bar{\sigma}\gamma e^{-\lambda t} \int_0^1 e^{\lambda t_* x} f'(x) dx + \bar{\sigma}\beta[f(1) - f(0)] = \\ &= -\bar{\sigma}\gamma e^{-\lambda t} I(1) + \bar{\sigma}\beta, \quad t \geq t_*, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$I(z) := \int_0^z e^{\lambda t_* x} f'(x) dx, \quad z \in (0; 1]. \quad (20)$$

При  $\gamma = \beta$  получаются КП модели Фойгта, при  $\gamma = 0$  — упругого элемента (РеМ-1) с ФП  $\Pi = \beta$  и модулем упругости  $1/\beta$ :

$$\varepsilon(t; t_*) = \begin{cases} \bar{\sigma}\beta f(t/t_*) & \text{при } t \leq t_*, \\ \bar{\sigma}\beta & \text{при } t \geq t_*. \end{cases} \quad (21)$$

Интеграл  $I$  зависит от  $z$ ,  $f$  и параметра  $t_*\lambda$  (отношения  $t_*/\tau$ ,  $\tau = 1/\lambda$  — время ретардации модели). Для любых  $t_* > 0$  и неубывающей  $f(x)$   $I(z)$  возрастает (нестрого, если есть участки с  $f'(x) = 0$ ). По интегральной теореме о среднем для любого  $z \in (0; 1]$  имеем  $I(z) = e^{\lambda t_* \xi} (f(z) - f(0)) = e^{\lambda t_* \xi} f(z)$ , где  $\xi = \xi(z) \in (0; z)$ , и поэтому

$$f(z) \leq I(z) \leq e^{\lambda t_* z} f(z) \quad \text{при } z \in (0; 1], \quad 1 \leq I(1) \leq e^{\lambda t_*}$$

(равенство возможно только при  $f(z) = 0$ , т. е.  $f(x) \equiv 0$  при  $x \in [0; z]$ ). Отсюда следует неравенство  $f(t/t_*) \leq I(t/t_*) \leq e^{\lambda t} f(t/t_*)$  и двусторонняя оценка для КП (18), (19):

$$\bar{\sigma}(\beta - \gamma)f(t/t_*) \leq \varepsilon(t; t_*) \leq \bar{\sigma}(\beta - \gamma e^{-\lambda t})f(t/t_*), \quad t \leq t_*,$$

и

$$\bar{\sigma}(\beta - \gamma e^{\lambda t_*} e^{-\lambda t}) \leq \varepsilon(t; t_*) \leq \bar{\sigma}(\beta - \gamma e^{\lambda t}), \quad t \geq t_*,$$

а также — более грубые оценки:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(\beta - \gamma)f(t/t_*) \leq \varepsilon(t; t_*) < \bar{\sigma}\beta f(t/t_*) \quad \text{при } t \leq t_*, \\ \bar{\sigma}(\beta - \gamma) < \varepsilon(t; t_*) < \bar{\sigma}\beta \quad \text{при } t > t_*. \end{aligned} \quad (22)$$

Неравенства (22) означают, что все КП (18), (19) моделей РеМ-3 с любыми значениями  $\lambda$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  для любых  $t_* > 0$  и  $f(x)$  лежат в секторе между КП двух упругих элементов с ФП  $\Pi = \beta - \gamma$  и  $\Pi = \beta$  (с модулями упругости  $1/(\beta - \gamma)$  и  $1/\beta$ ). Можно доказать, что при  $\lambda \rightarrow \infty$  (и фиксированных  $t_*$ ,  $t$ ) семейство КП (18), (19) сходится к КП упругого элемента (21), а при  $\lambda \rightarrow 0$  — к КП вида (21) с заменой  $\beta$  на  $\beta - \gamma$ . В самом деле,  $I(z, \lambda)$  возрастает по  $\lambda$ , при  $\lambda \rightarrow 0$   $I(z) \rightarrow f(z)$ ,  $I(t/t_*) \rightarrow f(t/t_*)$  и  $e^{-\lambda t} \rightarrow 1$  для каждого  $t \geq 0$ , а при  $\lambda \rightarrow \infty$   $e^{-\lambda t} I(t/t_*) \rightarrow 0$  и  $e^{-\lambda t} I(1) \rightarrow 0$  для каждого фиксированного  $t > 0$ . В случае модели Фойгта (при  $\gamma = \beta$ ) предельная КП при  $\lambda \rightarrow \infty$  тождественно равна нулю.

На рис. 2, а приведены кривые ползучести (18), (19) трех моделей РеМ-3 с  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0.5$  и различными  $\lambda = 0.01; 0.1; 1$  для нагружений с  $\bar{\sigma} = 0.01$  и  $t_* = 10$  и двумя разными начальными стадиями (17):  $f = f_1$  (кривые 1)

и  $f = f_2$  (кривые 2, без излома в точке  $t_*$ ). Синие кривые — КП модели с  $\lambda = 0.01$ , голубые — с  $\lambda = 0.1$ , черные — с  $\lambda = 1$ . Отношения продолжительности НС к временам ретардации моделей  $\tau = 1/\lambda$ :  $t_*\lambda = 0.1$ ; 1; 10. При увеличении  $\lambda$  КП смещаются вверх и при  $\lambda \rightarrow \infty$  семейство сходится к КП РеМ-1 (21) (две верхние красные штрих-пунктирные кривые — для каждой НС). При  $\lambda \rightarrow 0$  семейство КП РеМ-3 сходится (сверху) к КП РеМ-1 с ФП  $\Pi = \beta - \gamma$  (две нижние штрих-пунктирные кривые). При  $t \rightarrow \infty$  все КП стремятся к общей асимптоте  $\varepsilon = \bar{\sigma}\beta$  (она не зависит от  $\lambda$ ,  $t_*$  и НС), т. е.  $\varepsilon = 0.01$ . Штриховые кривые — идеальные КП РеМ-3 с  $\lambda = 0.01$ ; 0.1; 1, каждая из них будет предельной кривой семейства КП с любой НС при  $t_* \rightarrow 0$ .

На рис. 2, b приведены кривые ползучести (18), (19) моделей Фойгта (Сим-2) с  $\gamma = \beta = 1$  и такими же  $\lambda = 0.01$ ; 0.1; 1, что и на рис. 2, a (синие, голубые и черные кривые соответственно), для тех же программ нагружений с  $\bar{\sigma} = 0.01$ ,  $t_* = 10$  и двумя начальными стадиями (17):  $f = f_1$  (кривые 1) и  $f = f_2$  (кривые 2). Три штриховые кривые — идеальные КП. При  $t \rightarrow \infty$  отклонение КП от ИКП стремится к нулю (ибо  $\alpha = 0$  влечет  $v = 0$ ). При увеличении  $\lambda$  (т. е. уменьшении вязкости и времени ретардации) КП поднимается вверх и при  $\lambda \rightarrow \infty$  семейство сходится к КП упругого элемента (21) (предельные КП для каждой НС намечены красным штрих-пунктиром). Отметим два качественных отличия КП моделей Фойгта от КП РеМ-3 (рис. 2, a):

- 1) так как  $\Pi(0) = 0$ , то для любой НС  $f$  КП модели Фойгта не имеют излома в точке  $t = t_*$  (СД  $\dot{\varepsilon}(t; t_*)$  непрерывна) и обладают свойством  $\dot{\varepsilon}(0; t_*) = 0$ ;
- 2) так как  $\beta - \gamma = 0$ , то для любой НС при  $\lambda \rightarrow 0$  семейство КП моделей Фойгта сходится к нулевой функции  $\varepsilon \equiv 0$  (сходимость монотонна и равномерна на любом отрезке  $[0; T]$ ).

Розовая кривая 3 — КП модели Фойгта с  $\lambda = 0.01$  для НС  $f(x) = x$ , т. е.

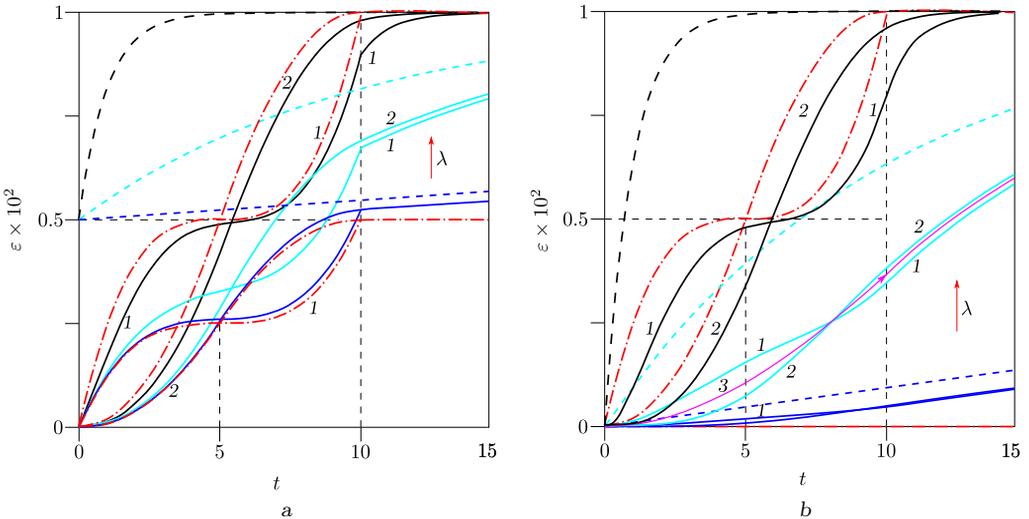


Рис. 2. Кривые ползучести (18), (19) для моделей Кельвина—Пойнтинга (a) и Фойгта (b) с разными  $\lambda$  для двух начальных стадий (онлайн в цвете)

[Figure 2. The creep curves (18), (19) generated by the Kelvin–Poynting (a) and Voigt (b) models with different  $\lambda$  for two initial stages (color online)]

нагружения с постоянной скоростью.

Чтобы выявить зависимость КП РеМ-3 (19) от  $t_*$  и  $\lambda$  и оценить скорость сходимости семейства  $\varepsilon(t; t_*)$  к идеальной КП при  $t_* \rightarrow 0$ , преобразуем интеграл (20) при  $z = 1$ :

$$\begin{aligned} I(1) &= \int_0^1 (1 + \lambda t_* x) f'(x) dx + \int_0^1 (e^{\lambda t_* x} - 1 - \lambda t_* x) f'(x) dx = \\ &= (1 + \lambda t_* x) f(x) \Big|_0^1 - \lambda t_* \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 (\lambda t_* x)^2 q(\lambda t_* x) f'(x) dx, \end{aligned}$$

где  $q(z) := (e^z - 1 - z)z^{-2}$  — возрастающая аналитическая функция на вещественной оси,  $q(0) = 0.5 \neq 0$ ,  $q(x) > 0.5$  при  $x > 0$ ,  $q(\infty) = \infty$ . Так как  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ , имеем

$$I(1) = 1 + \lambda t_*(1 - S) + (\lambda t_*)^2 Q(\lambda t_*),$$

где

$$S := \int_0^1 f(x) dx, \quad Q(u) := \int_0^1 x^2 q(ux) f'(x) dx.$$

Тогда КП (19) представима в форме

$$\varepsilon(t; t_*) = \bar{\sigma}(\beta - \gamma e^{-\lambda t}) - \bar{\sigma} \gamma [\lambda t_*(1 - S) + (\lambda t_*)^2 Q(\lambda t_*)] e^{-\lambda t}, \quad t \geq t_*.$$

Отклонение КП от идеальной КП  $\varepsilon(t; 0) = \bar{\sigma}(\beta - \gamma e^{-\lambda t})$  при  $t \geq t_*$  имеет вид

$$\varepsilon(t; t_*) - \varepsilon(t; 0) = -\bar{\sigma} \gamma [\lambda t_*(1 - S) + (\lambda t_*)^2 Q(\lambda t_*)] e^{-\lambda t};$$

его асимптотика при  $\lambda t_* \rightarrow 0$  (т. е.  $t_* \rightarrow 0$  или  $\lambda \rightarrow 0$ ) и фиксированном  $t \geq t_*$  имеет вид

$$[\varepsilon(t; t_*) - \varepsilon(t; 0)] / \bar{\sigma} = \delta + \gamma e^{-\lambda t} O((\lambda t_*)^2), \quad \delta := \gamma(1 - S) e^{-\lambda t} \lambda t_*.$$

Таким образом, скорость сходимости семейства  $\varepsilon(t; t_*)$  к идеальной КП при  $t_* \rightarrow 0$  определяется слагаемым  $\delta := \gamma(1 - S) \lambda t_* e^{-\lambda t}$  (сходимость равномерна на любом луче  $[t_0; \infty)$ ). Очевидно,  $\delta < \gamma(1 - S) \lambda t_* e^{-\lambda t_*} < \gamma(1 - S) \lambda t_*$  при всех  $t \geq t_*$ , а форма НС нагружения влияет на главный член отклонения  $\delta$  только через интеграл от  $f(x)$ , и чем ближе  $S[f]$  к единице, тем меньше КП уклоняется от идеальной КП при малых  $\lambda t_*$  (для  $f = x^u$ , например,  $S[f] = (u + 1)^{-1}$  и  $S[f] \rightarrow 1$  при  $u \rightarrow 0$ ). Так как  $\lambda, \gamma > 0$  и  $S \in (0; 1)$  (для неубывающих  $f(x)$  с  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ ), слагаемое  $\delta(t_*, t, \lambda, \gamma)$  возрастает по  $t_*$  и  $\gamma$ , убывает по  $t$  (на луче  $t \geq t_*$ ), возрастает по  $\lambda$  при  $\lambda \in (0; 1/t)$  и убывает по  $\lambda$  при  $\lambda > 1/t$  (т. е. при  $t/\tau > 1$ , где  $\tau = 1/\lambda$  — время ретардации модели РеМ-3). Последнее утверждение следует из наличия точки максимума  $\lambda = 1/t$  у функции  $y(\lambda) = \lambda e^{-\lambda t}$  с фиксированным  $t \geq t_*$  ( $y'(\lambda) = (1 - \lambda t) e^{-\lambda t}$ ). Так как  $y_{\max} = y(1/t) = e^{-1} t^{-1}$ , при любых  $\lambda > 0$  и  $t \geq t_*$  справедлива оценка  $0 < \delta \leq \gamma(1 - S) e^{-1} t_* t^{-1}$ , не зависящая от  $\lambda$ .

**ПРИМЕР 2.** Рассмотрим КП (7), (8) модели Максвелла ( $\Pi = \alpha t + \beta$ ,  $\alpha, \beta > 0$ ). При  $t \leq t_*$  (интегрируя (7) по частями и учитывая  $f(0) = 0$ ):

$$\begin{aligned}\varepsilon(t; t_*) &= \bar{\sigma} \int_0^{t/t_*} [\alpha(t - t_*x) + \beta] f'(x) dx = \\ &= \bar{\sigma} [\alpha(t - t_*t/t_*) + \beta] f(t/t_*) + \bar{\sigma} \alpha t_* \int_0^{t/t_*} f(x) dx;\end{aligned}$$

при  $t \geq t_*$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon(t; t_*) &= \bar{\sigma} \int_0^1 (\alpha(t - t_*x) + \beta) f'(x) dx = \\ &= \bar{\sigma} (\alpha t + \beta) [f(1) - f(0)] - \bar{\sigma} \alpha t_* \int_0^1 x f'(x) dx.\end{aligned}$$

Итак,

$$\varepsilon(t; t_*) = \begin{cases} \bar{\sigma} \beta f(t/t_*) + \bar{\sigma} \alpha t_* \int_0^{t/t_*} f(x) dx & \text{при } t \leq t_*, \\ \bar{\sigma} (\alpha t + \beta) - \bar{\sigma} \alpha t_* (1 - S) & \text{при } t \geq t_*. \end{cases} \quad (23)$$

При  $t \geq t_*$  КП (23) линейна по времени, как и ИКП модели Максвелла  $\varepsilon(t; 0) = \bar{\sigma}(\alpha t + \beta)$ , скорость (установившейся) ползучести та же:  $\dot{\varepsilon} = \bar{\sigma}\alpha$ . Функция формы НС влияет на КП при  $t \geq t_*$  только через значение интеграла  $S[f]$ ; в частности, КП для двух НС (17) совпадают при  $t \geq t_*$ , так как у них одинаковые значения  $S$ . Чем ближе  $S[f]$  к единице, тем меньше КП уклоняется от ИКП модели Максвелла; это отклонение не зависит от  $t$  (равно  $-\bar{\sigma}\alpha t_*(1 - S)$ ) и не стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$  ( $v = \alpha > 0$ , см. п. 10 теоремы). При  $\beta = 0$  КП (23) вырождается в КП вязкого элемента Ньютона (СнМ-1), при  $\alpha = 0$  — в КП РеМ-1 (21).

На рис. 3 приведены кривые ползучести (23) для трех моделей Максвелла с  $\alpha = 0.05$  и  $\beta = 0; 0.5; 1$  (голубые, синие и черные КП; времена релаксации  $\tau = \beta/\alpha = 0; 10; 20$ ) для  $t_* = 10$ ,  $\bar{\sigma} = 0.01$  с тремя начальными стадиями: 1)  $f = f_1$  из (17) (кривые 1), 2)  $f = f_2$  из (17) (кривые 2), 3)  $f = x^{0.1}$  (кривые 3). При  $\beta = 0$  (голубые КП) модель Максвелла вырождается в вязкий элемент (ньютоновскую жидкость). Штриховые (красные) кривые — идеальные КП моделей Максвелла при  $\beta = 0; 0.5; 1$ . Так как  $S[f_1] = 0.5 = S[f_2]$ , КП (23) с НС  $f_1$  и  $f_2$  совпадают при  $t \geq t_*$ , а отклонения КП с НС  $f_1$  или  $f_2$  от идеальной КП при  $t \geq t_*$  имеют значение  $-\bar{\sigma}\alpha t_*(1 - S) = -0.0025$  (не зависят от  $t$  и  $\beta$ ). Для НС  $f_3 = x^{0.1}$  имеем  $S[f_3] = 10/11 > 0.5$ , и потому КП (23) значительно ближе к ИКП чем для НС  $f = f_1$  и  $f = f_2$  (отклонение КП от идеальных при  $t \geq t_*$  равно  $-0.005/11$ ).

На рис. 4 приведены кривые ползучести для  $\bar{\sigma} = 0.01$ ,  $t_* = 10$  и двух начальных стадий (17), порожденные четырьмя моделями вида (6) с одним и тем же значением  $\beta = 1$ :

- 1) упругим элементом с  $E = 1/\beta$  (красные штрих-пунктирные КП (21));
- 2) моделью Максвелла с  $\alpha = 0.05$  (черные КП);
- 3) моделью Фойгта ( $\Pi = \beta - \beta e^{-\lambda t}$ ) с  $\lambda = 1$  (синие КП);
- 4) СнМ-3 с ФП  $\Pi = \alpha t + \beta - \beta e^{-\lambda t}$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\alpha = 0.05$ , полученной из модели Фойгта последовательным подключением вязкого элемента с  $\alpha = 0.05$  (голубые КП).

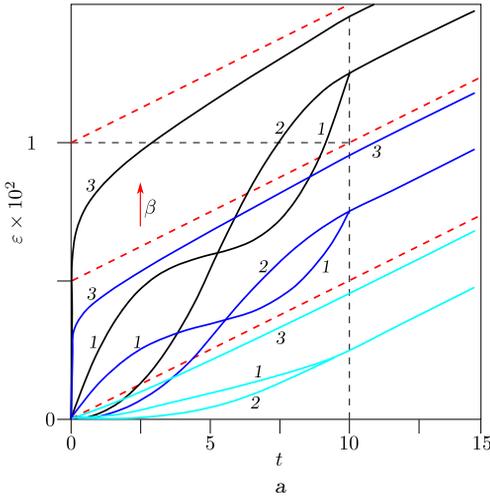


Рис. 3. Кривые ползучести (23) для модели Максвелла и вязкого элемента для трех начальных стадий (онлайн в цвете) [Figure 3. The creep curves (23) generated by the Maxwell model and for a viscous element for three initial stages (color online)]

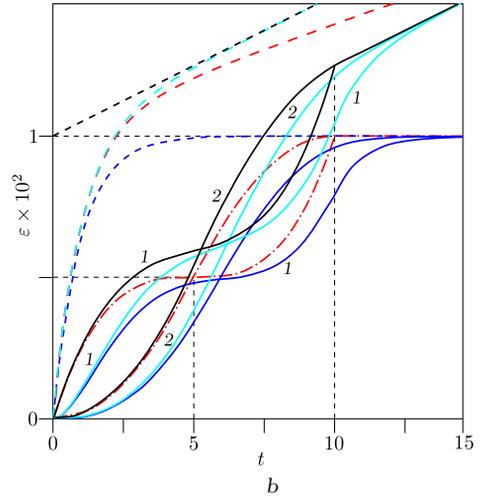


Рис. 4. Кривые ползучести для моделей Максвелла, Фойгта и СиМ-3 для двух начальных стадий (онлайн в цвете) [Figure 4. The creep curves generated by the Maxwell, Voigt, and SiM-3 models for two initial stages (color online)]

Штриховые линии — идеальные КП СиМ-3, моделей Фойгта и Максвелла. При  $\alpha \rightarrow 0$  (когда вязкость  $\eta = 1/\alpha \rightarrow \infty$ ) семейство КП модели Максвелла (23) сходится (сверху) к КП РеМ-1 (21). Семейство КП модели Фойгта сходится к КП РеМ-1 (21) при  $\lambda \rightarrow \infty$  (когда вязкость  $\eta = 1/(\beta\lambda) \rightarrow 0$ ), причем сходится снизу. КП СиМ-3 лежит между КП Фойгта и Максвелла, при малых  $t$  сливается с КП Фойгта, при достаточно больших — с КП Максвелла (ее асимптота при  $t \rightarrow \infty$  совпадает с КП Максвелла) и может пресекать КП РеМ-1. Красная штриховая линия — идеальная КП фрактальной модели с ФП  $\Pi = \alpha t^u + \beta - \beta e^{-\lambda t}$ , полученной последовательным соединением модели Фойгта и фрактального элемента  $\Pi = \alpha t^u$  с  $\alpha = 0.05, u = 0.9$ ; у нее  $\Pi(0) = 0, \Pi(\infty) = \infty, \dot{\Pi}(0) = \infty, \dot{\Pi}(\infty) = 0$ .

**4. Кривые ползучести гибридных моделей.** Если  $\Pi(t) \equiv C = \text{const}$  при  $t \geq T$  (в расчетах часто прибегают к такому усечению ФП), то все КП (8) постоянны при  $t - t_* > T$ :  $\varepsilon(t; t_*) = \bar{\sigma}C$ .

Если  $\Pi = \alpha t + B$  при  $t \geq T$ , то все КП (8) также будут прямолинейны при  $t > T + t_*$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon(t; t_*) &= \bar{\sigma} \int_0^1 [\alpha(t - t_*x) + B] f'(x) dx = \\ &= \bar{\sigma}(\alpha t + B) - \bar{\sigma} \alpha t_* \int_0^1 x f'(x) dx = \bar{\sigma}(\alpha t + B) - \bar{\sigma} \alpha t_* (1 - S). \end{aligned} \quad (24)$$

Вообще, если ФП  $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$  склеена из двух функций в точке  $t = T$  (с любой гладкостью), то при  $t > T + t_*$  функция  $\Pi_1$  уже не влияет на КП (8), ибо в интеграле аргумент ФП  $t - \tau$  удовлетворяет неравенству  $t - \tau > t - t_* > T$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon(t; t_*) &= \bar{\sigma} t_*^{-1} \int_0^{t_*} \Pi(t - \tau) f'(\tau/t_*) d\tau = \\ &= \bar{\sigma} t_*^{-1} \int_0^{t_*} \Pi_2(t - \tau) f'(\tau/t_*) d\tau = \bar{\sigma} \int_0^1 \Pi_2(t - t_* x) f'(x) dx, \end{aligned}$$

то есть при замене  $\Pi_1$  КП не изменится. Таким способом можно менять  $\Pi(0)$ , регулируя  $\dot{\varepsilon}(0; t_*) = \bar{\sigma} t_*^{-1} \Pi(0) f'(0)$ , скачок СД  $\hat{\varepsilon}(t_*) = \Pi(0) \hat{\sigma}(t_*) = = -\Pi(0) \bar{\varepsilon} t_*^{-1} f'(1)$  (делая его нулевым, если нужно) и мгновенный модуль  $E = 1/\Pi(0)$ . Например, гладкая склейка модели Фойгта или РеМ-3 с моделью Максвелла позволяет к стадии установившейся ползучести (24), характерной для модели Максвелла, добавить первую стадию ползучести с упрочнением:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \beta - \gamma e^{-\lambda t}, \quad t \leq T, \quad \Pi_2 = \alpha t + B, \quad \alpha = \dot{\Pi}_1(T) = \gamma \lambda e^{-\lambda T}, \\ B &= \Pi_1(T) - \alpha T = \beta - \gamma e^{-\lambda T} (1 + \lambda T). \end{aligned}$$

**5. Кривые ползучести при гамр-нагружении.** Для НС с постоянной скоростью нагружения  $b > 0$  (когда  $f(x) = x$ ,  $\bar{\sigma} = b t_*$ ) семейство КП (7), (8) имеет вид

$$\varepsilon(t; t_*) = \begin{cases} b \int_0^t \Pi(x) dx & \text{при } t \leq t_*; \\ \bar{\sigma} t_*^{-1} \int_{t-t_*}^t \Pi(x) dx & \text{при } t \geq t_*. \end{cases} \quad (25)$$

Естественно, что в частном случае  $f(x) = x$  КП (7), (8) обладает специфическими дополнительными свойствами, помимо общих свойств КП с произвольной НС, их удаётся изучить детальнее и получить более точные двусторонние оценки отклонений КП (25) от идеальной КП. Основные результаты анализа [23] собраны в теореме 2.

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть ФП положительна, дифференцируема, возрастает, (нестрого) выпукла вверх на  $(0; \infty)$  и непрерывна в точке  $t = 0$  и  $t_* > 0$ . Тогда КП (25) с  $\bar{\sigma} = b t_* > 0$  обладают следующими свойствами:

- 1) при  $t \in [0; t_*]$  функция (25) возрастает по  $t$ , выпукла вниз и убывает по  $t_*$ ;  $\dot{\varepsilon}(0; t_*) = b \Pi(0)$ ;
- 2) на луче  $t \geq t_*$  КП (25) возрастает по  $t$  и выпукла вверх, при  $t \rightarrow \infty$   $\varepsilon(t; t_*) \rightarrow \bar{\sigma} \Pi(\infty)$ ;
- 3) скачок скорости деформации в точке  $t = t_*$  равен  $\hat{\varepsilon}(t_*) = -\Pi(0) \bar{\sigma} t_*^{-1}$ ; у регулярных моделей  $\hat{\varepsilon}(t_*) < 0$  и отношение скачков для различных  $t_* = t_i$  не зависит от функции ползучести и от скорости  $b$ :  $\hat{\varepsilon}(t_1)/\hat{\varepsilon}(t_2) = t_2/t_1$ ;
- 4) значение  $\varepsilon(t_*; t_*)$  возрастает с ростом  $t_*$ ,  $\varepsilon(t_*; t_*) < \bar{\sigma} \Pi(t_*)$ ,  $\varepsilon(t_*; t_*) \rightarrow \bar{\sigma} \Pi(0)$  при  $t_* \rightarrow 0$ ;
- 5) при всех  $t \geq t_*$  справедлива оценка  $\bar{\sigma} \Pi(t - t_*) < \varepsilon(t; t_*) < \bar{\sigma} \Pi(t)$ , в частности, КП (25) лежит ниже ИКП  $\varepsilon(t; 0) = \bar{\sigma} \Pi(t)$  при мгновенном нагружении;
- 6)  $\varepsilon(t; t_*)$  убывает по  $t_*$ , т. е. с уменьшением  $t_*$  КП (25) смещается вверх; и для производной по  $t_*$  верна оценка  $|\varepsilon_{t_*}(t; t_*)| < \varepsilon_t(t; t_*)$ ;

- 7) при  $t_* \rightarrow 0$  семейство КП (25) равномерно сходится к ИКП на лучах  $t \geq t_0$  с  $t_0 > 0$ ;  $\varepsilon(t_*, t_*) \rightarrow \bar{\sigma}\Pi(0)$ ,  $\dot{\varepsilon}(t_* + 0; t_*) \rightarrow \bar{\sigma}\dot{\Pi}(0)$ ,  $\hat{\varepsilon}(t_*) \rightarrow -\infty$  (если  $\Pi(0) \neq 0$ );
- 8) для отклонения  $\Delta(t; t_*) := |\varepsilon(t; t_*) - \varepsilon(t; 0)|$  КП (25) от ИКП  $\varepsilon(t; 0)$  справедливы оценки

$$0.5\dot{\Pi}(t)\bar{\sigma}t_* \leq \Delta(t; t_*) \leq \dot{\Pi}(t - t_*)\bar{\sigma}t_*, \quad t \geq t_*,$$

и

$$0.5\dot{\Pi}(\infty)\bar{\sigma}t_* \leq \Delta(t; t_*) \leq \dot{\Pi}(0)\bar{\sigma}t_*;$$

- 9) при  $t \rightarrow \infty$   $\Delta(t; t_*) \rightarrow 0.5v\bar{\sigma}t_*$ , где  $v := \dot{\Pi}(\infty)$ , и  $\varepsilon(t; t_*) - \bar{\sigma}\Pi(t - t_*) \rightarrow 0.5v\bar{\sigma}t_*$ ;
- 10)  $\Delta(t; t_*) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  (память о НС затухает) тогда и только тогда, когда  $v = 0$ ;
- 11) если ФП ограничена, то  $v = 0$ , и все КП (25) с фиксированным  $\bar{\sigma}$  имеют при  $t \rightarrow \infty$  общую горизонтальную асимптоту  $\varepsilon = \bar{\sigma}\Pi(\infty)$  (не зависящую от  $t_*$ ).

ПРИМЕР 3. Рассмотрим степенную («фрактальную») модель

$$\begin{aligned} R(t) &= At^{-u}, \quad u \in (0; 1), \quad A > 0; \\ \Pi(t) &= Bt^u, \quad B := A^{-1}C(u), \quad C(u) := (u\pi)^{-1} \sin u\pi. \end{aligned} \quad (26)$$

Очевидно,  $\Pi(0) = 0$ ,  $\Pi(\infty) = \infty$ ,  $\dot{\Pi}(0) = \infty$ ,  $\dot{\Pi}(\infty) = 0$ ,  $R(t)\Pi(t) = C(u)$ ,  $C(u)$  убывает,  $C(0+) = 1$ ,  $C(1 - 0) = 0$ . При  $u \rightarrow 0$  семейство ФП (26) сходится к ФП упругого элемента, а при  $u \rightarrow 1$  (и  $B = \text{const}$ ) — к ФП вязкого элемента. КП (25) для ФП (26) принимает вид

$$\begin{aligned} \varepsilon(t; t_*) &= \bar{\sigma}t_*^{-1}B(u)(u+1)^{-1}t^{u+1}, \quad t \leq t_* \\ \varepsilon(t; t_*) &= \bar{\sigma}t_*^{-1}B(u)(u+1)^{-1}[t^{u+1} - (t - t_*)^{u+1}], \quad t \geq t_*. \end{aligned}$$

При всех  $u \in (0; 1)$  и  $t_* \geq 0$  эти КП не ограничены,  $\varepsilon(t; t_*) = ct^u + O(t^{u-1})$  при  $t \rightarrow \infty$ , отклонение КП от ИКП стремится к нулю (память затухает), так как  $\dot{\Pi}(\infty) = 0$ ; с ростом  $u$  скорость сходимости снижается, а в случае  $u = 1$  ( $B > 0$ ) — отсутствует, ибо нарушается условие  $\dot{\Pi}(\infty) = 0$ . Из  $\Pi(0) = 0$  следует  $\dot{\varepsilon}(0; t_*) = b\Pi(0) = 0$  и отсутствие у КП излома в точке  $t = t_*$ .

Для фрактальной модели Максвелла  $\Pi = Bt^u + \beta$ ,  $B, \beta > 0$ ,  $u \in (0; 1)$ , и КП (25) принимает вид

$$\begin{aligned} \varepsilon(t; t_*) &= \bar{\sigma}t_*^{-1}[B(u+1)^{-1}t^{u+1} + \beta t], \quad t \leq t_*, \\ \varepsilon(t; t_*) &= \bar{\sigma}t_*^{-1}B(u+1)^{-1}[t^{u+1} - (t - t_*)^{u+1}] + \bar{\sigma}\beta, \quad t \geq t_*. \end{aligned} \quad (27)$$

и

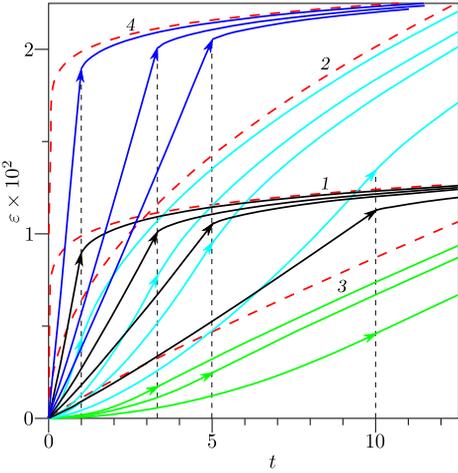


Рис. 5. Кривые ползучести (25) для трех степенных моделей (26) и фрактальной модели Максвелла при  $\bar{\sigma} = 0.01$  и  $t_* = 10; 5; 10/3; 1$  (онлайн в цвете) [Figure 5. The creep curves (25) generated by three power-law models (26), and generated by the fractal Maxwell model, when  $\bar{\sigma} = 0.01$  and  $t_* = 10; 5; 10/3; 1$  (color online)]

Так как  $\Pi(0) = \beta \neq 0$ , КП имеет излом в точке  $t = t_*$  (см. п. 3 теоремы 2).

На рис. 5 приведены кривые ползучести (25) для трех степенных моделей (26) с  $A = 1$ ,  $u = 0.1$  (черные КП),  $u = 0.5$  (голубые КП) и  $u = 0.9$  (зеленые КП) для начальных стадий с различными скоростями нагружения  $b = 0.001; 0.002; 0.003; 0.01$  до уровня напряжения  $\bar{\sigma} = 0.01$  (длительности НС  $t_* = 10; 5; 10/3; 1$ ). Красные штриховые линии (кривые 1–3) — идеальные КП для  $u = 0.1; 0.5; 0.9$  (у них  $\dot{\epsilon}(0) = \infty$  — в отличие от  $\dot{\epsilon}(0; t_*) = 0$ ), каждая из них будет предельной кривой семейства КП при  $t_* \rightarrow 0$  на всем луче  $[0; \infty)$ . КП для  $u = 0.9$  (визуально) близки к прямолинейным, они растут быстрее и при больших  $t$  лежат выше КП с меньшим  $u$ . Синие КП и кривая 4 — КП (27) фрактальной модели Максвелла с  $\beta = 1$ ,  $u = 0.1$  для  $t_* = 5; 10/3; 1$  и  $t_* = 0$ .

**6. О свойствах кривых ползучести с немонотонной начальной стадией нагружения.** Уравнения КП (7), (8) остаются в силе и для немонотонного закона нагружения на НС  $f(x)$ . Однако качественные свойства КП существенно меняются в случае перегрузки на НС и разгрузки для выхода на заданный постоянный уровень  $\bar{\sigma} > 0$  (когда  $m := \max f(x) > 1$ , т. е.  $\sigma_{\max} = m\bar{\sigma} > \bar{\sigma}$ ). В частности, в этом случае могут нарушаться оценки (10), (11) и оценки  $S \in (0; 1)$  и  $Q(t, t_*) \leq 0$  в представлении (12) и следствия из них.

Аналитическое исследование свойств семейств КП (и КР) и их зависимости от характеристик НС в этом случае — тема отдельных статей, но кратко можно перечислить следующие основные результаты:

- 1) КП (8) уже не обязаны быть монотонными на интервале  $t > t_*$ , возможны три типовых поведения: если параметр перегрузки  $m - 1 = (\sigma_{\max} - \bar{\sigma})/\bar{\sigma}$  мал (т. е.  $m - 1 \leq \mu$ ), то КП возрастает при всех  $t > t_*$ ; если  $m - 1$  достаточно велик ( $m - 1 \geq M$ ), то, наоборот, КП убывает при всех  $t > t_*$ ; если  $m - 1 \in (\mu, M)$ , то КП сначала убывает, а потом возрастает (имеет точку минимума); критические значения  $\mu$  и  $M$  зависят от ФП, возможны случаи  $\mu = 0$ ,  $\mu = M$  и  $M = \infty$ , каждый из которых запрещает один из типов поведения КП;
- 2) КП (8) не обязательно лежит ниже ИКП;
- 3) сходимость к нулю при  $t \rightarrow \infty$  отклонений КП от ИКП (если  $v = 0$ ) сохраняется;
- 4) сходимость при  $t_* \rightarrow 0$  семейства КП (7), (8) к ИКП сохраняется.

Такое поведение КП (свойства 1 и 2) в случае перегрузки на НС неоднократно наблюдалось в испытаниях различных полимерных и композитных материалов (с постоянными скоростями нагружения и разгрузки) в последние два десятка лет [20, 62–68]. Однако в литературе отсутствует понимание универсальности (типичности для широкого класса материалов) и корней этого эффекта (он именуется по-разному: *anomalous stress relaxation*, *inverse relaxation*, *unusual mechanical response in creep*, *non-monotonic creep behavior*, *rate reversal in creep and relaxation tests*, *rate-reversal behavior in creep and relaxation*), что порождает неверные интерпретации и оценки. Этот эффект приписывается разными авторами только отдельным классам материалов (“The existence of this phenomenon has been demonstrated in a small number of papers involving a few polymers. . .” [67]) и считается признаком нелинейности их поведения, а воспроизведение этого эффекта новым (предлагаемым) нелинейным ОС подается как достижение и его большое преимущество по сравнению с остальными моделями (“This behavior lies beyond the realm of most numerical models. . .” [67], “This characteristic poses a considerable challenge for modeling. . .” [67]). Остается незамеченным, что этот эффект воспроизводится линейным ОС вязкоупругости (3) и потому вовсе не является признаком нелинейности, что он вытекает лишь из наличия наследственности (памяти) и оказывается присущим *всем* (почти всем) материалам с наследственностью, работающим в линейной области (при достаточно малых деформациях и скоростях), а не только отдельным классам новых материалов. И потому его (как и описанные в данной статье качественные свойства семейств КП и КР с монотонной НС нагружения), в принципе, обязаны воспроизводить все ОС и все их численные реализации.

**7. Заключение.** В данной работе аналитически изучены общие свойства семейства кривых ползучести (7), (8), порождаемых линейным определяющим соотношением вязкоупругости (3) с произвольной функцией ползучести в случае произвольной неубывающей начальной стадии нагружения (2) до заданного уровня напряжения  $\bar{\sigma}$ . Исследованы их зависимости от длительности и формы начальной стадии (от  $t_*$  и  $f(x)$ ) и свойств функции ползучести, условия и скорость сходимости семейства кривых ползучести (КП) к «идеальной» КП (при мгновенном нагружении) при  $t_* \rightarrow 0$ , асимптотическое поведение при  $t \rightarrow \infty$ .

Основные сведения о свойствах КП (7), (8) собраны в теореме 1 (доказанной в п. 2), а свойства КП (25) для начальной стадии нагружения с постоянной скоростью перечислены в теореме 2 (п. 5). В частности, доказано, что для любой допустимой функции ползучести (возрастающей и выпуклой вверх на  $(0; \infty)$ ) основные качественные свойства КП (8) при  $t > t_*$  практически совпадают со свойствами идеальной КП, что семейство кривых ползучести с любой фиксированной формой начальной стадии (заданной неубывающей функцией  $f(x)$ ,  $x \in [0; 1]$ ) целиком лежит ниже идеальной КП, а при  $t_* \rightarrow 0$  сходится к ней равномерно на любом луче внутри интервала  $(0; \infty)$ . Получены универсальные оценки (10)–(15) для отклонения КП (8) от идеальной КП и для скорости его сходимости к нулю при  $t_* \rightarrow 0$  (в любой момент времени  $t$ ). В частности, доказано, что главный член отклонения (12) равен  $-\bar{\sigma}(1 - S)\dot{\Pi}(t)_*$  и форма начальной стадии нагружения влияет на него (на скорость сходимости отклонения (12) к нулю при  $t_* \rightarrow 0$ ) только через вели-

чину интеграла  $S$  от функции формы начальной стадии  $f(x)$  ( $S \in (0; 1)$  для неубывающей  $f(x)$ ). Анализ асимптотики отклонения КП (8) от идеальной КП при  $t \rightarrow \infty$  позволил доказать, что если  $\dot{P}(\infty) = 0$ , то для любой начальной стадии  $f(x)$  отклонение КП (8) от идеальной КП стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , т. е. имеет место затухание памяти при ползучести, а при  $\dot{P}(\infty) > 0$  (как у половины всех реологических моделей из линейных демпферов и пружин) отклонение к нулю не стремится (память не затухает).

Эти свойства кривых ползучести (7), (8), порождаемых определяющим соотношением (3), проиллюстрированы (см. п. 3 и п. 5) на примерах кривых ползучести классических реологических моделей (Максвелла, Фойгта, Кельвина), трехзвенных сингулярных моделей и «фрактальных» моделей с дробной производной, полученных заменой вязкого элемента на (двухпараметрический) степенной элемент, т. е. на примерах из всех трех основных классов линейных моделей, рассмотренных в п. 2. Проанализированы специфические особенности поведения кривых ползучести моделей этих классов.

Обнаруженные общие качественные свойства семейств кривых ползучести с произвольной начальной стадией нагружения позволяют точнее очертить арсенал возможностей и область применимости определяющего соотношения (3) и усовершенствовать методики выбора, идентификации и настройки линейных моделей; часть из них могут служить индикаторами применимости линейной теории (или достаточными признаками её неадекватности), удобными для экспериментальной проверки. На основе полученных результатов в последующих статьях будут выведены универсальные двусторонние оценки для функции ползучести (в любой момент времени) через кривые ползучести с начальной стадией нагружения, регистрируемые в испытаниях материалов, и предложены эффективные формулы («коррекции») для определения функции ползучести по экспериментальным кривым ползучести КП, аналогичные полученным для функции релаксации в [25]. Будут также исследованы кривые ползучести и релаксации с немонотонными начальными стадиями нагружения, в частности, будет доказано, что «аномальное» поведение кривых ползучести и релаксации в случае перегрузки на начальной стадии (которое неоднократно наблюдалось в испытаниях различных материалов) качественно воспроизводится линейным определяющим соотношением (3) и вытекает лишь из наличия наследственных свойств (памяти) у материала, а вовсе не является признаком нелинейности поведения отдельных материалов, как принято считать [20, 62–68].

**Конкурирующие интересы.** У меня нет конкурирующих интересов.

**Авторская ответственность.** Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

**Финансирование.** Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 17-08-01146\_a).

## Библиографический список

1. Колтунов М. А. Определение характеристик упруго-вязких сред по данным квазистатических опытов // *Механика полимеров*, 1967. №5. С. 803–811.
2. Zapas L. J., Phillips J. C. Simple shearing flows in polyisobutylene solutions // *J. Res. Nat. Bur. Stds. A*, 1971. vol.75, no.1. pp. 33–41, Retrieved from <https://archive.org/details/jresv75An1p33> (August 11, 2017).
3. Findley W. N., Lai J. S., Onaran K. *Creep And Relaxation Of Nonlinear Viscoelastic Materials*. Amsterdam: North Holland, 1976. xii+368 pp.
4. Уржумцев Ю. С., Майборода В. П. *Технические средства и методы определения прочностных характеристик конструкций из полимеров*. М.: Машиностроение, 1984. 168 с.
5. Tschoegl N. W. *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior*. Berlin: Springer, 1989. xxv+769 pp.
6. Drozdov A. D. *Mechanics of viscoelastic solids*. New York: Wiley, 1998. 484 pp.
7. Lee S., Knauss W. G. A note on the determination of relaxation and creep data from ramp tests // *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2000. vol.4, no.1. pp. 1–7. doi: [10.1023/A:1009827622426](https://doi.org/10.1023/A:1009827622426).
8. Адамов А. А., Матвеев В. П., Труфанов Н. А., Шардаков И. Н. *Методы прикладной вязкоупругости*. Екатеринбург: УрО РАН, 2003. 411 с.
9. Lu H., Wang B., Ma J., Huang G., Viswanathan H. Measurement of Creep Compliance of Solid Polymers by Nanoindentation // *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2003. vol. 7, no. 3–4. pp. 189–207. doi: [10.1023/B:MTDM.0000007217.07156.9b](https://doi.org/10.1023/B:MTDM.0000007217.07156.9b).
10. Oyen M. L. Spherical indentation creep following ramp loading // *J. Mater. Res.*, 2005. vol.20, no. 8. pp. 2094–2100. doi: [10.1557/JMR.2005.0259](https://doi.org/10.1557/JMR.2005.0259).
11. Oyen M.L. Sensitivity of polymer nanoindentation creep properties to experimental variables // *Acta Mater.*, 2007. vol. 55, no. 11. pp. 3633–3639. doi: [10.1016/j.actamat.2006.12.031](https://doi.org/10.1016/j.actamat.2006.12.031).
12. Хохлов А. В. Определяющее соотношение для реологических процессов: свойства теоретических кривых ползучести и моделирование затухания памяти // *Изв. РАН. МТТ*, 2007. №2. С. 147–166.
13. Khan F. Loading history effects on the creep and relaxation behavior of thermoplastics // *J. Eng. Mater. Technol.*, 2006. vol.128, no. 4. pp. 564–571. doi: [10.1115/1.2345448](https://doi.org/10.1115/1.2345448).
14. Sorvari J., Malinen M., Hämäläinen J. Finite ramp time correction method for non-linear viscoelastic material model // *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2006. vol.41, no.9. pp. 1050–1056. doi: [10.1016/j.ijnonlinmec.2006.10.015](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2006.10.015).
15. Sorvari J., Malinen M. On the direct estimation of creep and relaxation functions // *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2007. vol. 11, no. 2. pp. 143–157. doi: [10.1007/s11043-007-9038-1](https://doi.org/10.1007/s11043-007-9038-1).
16. Duenwald S. E, Vanderby R., Lakes R. S. Constitutive equations for ligament and other soft tissue: evaluation by experiment // *Acta Mech.*, 2009. vol. 205, no. 1–4. pp. 23–33. doi: [10.1007/s00707-009-0161-8](https://doi.org/10.1007/s00707-009-0161-8).
17. Lakes R. S. *Viscoelastic Materials*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. xvi+462 pp. doi: [10.1017/CB09780511626722](https://doi.org/10.1017/CB09780511626722).
18. Choi S., Cha S. W., Oh B. H. Identification of viscoelastic behavior for early-age concrete based on measured strain and stress histories // *Mater. Struct.*, 2010. vol. 43, no. 8. pp. 1161–1175. doi: [10.1617/s11527-009-9574-z](https://doi.org/10.1617/s11527-009-9574-z).
19. Di Paola M, Fiore V., Pinnola F., Valenza A. On the influence of the initial ramp for a correct definition of the parameters of fractional viscoelastic materials // *Mech. Mater.*, 2014. vol. 69, no. 1. pp. 63–70. doi: [10.1016/j.mechmat.2013.09.017](https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2013.09.017).
20. Fernandes V. A., De Focatiis D. S. The role of deformation history on stress relaxation and stress memory of filled rubber // *Polymer Testing*, 2014. vol. 40. pp. 124–132. doi: [10.1016/j.polymeresting.2014.08.018](https://doi.org/10.1016/j.polymeresting.2014.08.018).
21. Zhang H., Lamnawar K., Maazouz A., Maia J. M. Experimental considerations on the step shear strain in polymer melts: sources of error and windows of confidence // *Rheol. Acta*, 2015. vol. 54, no. 2. pp. 121–138. doi: [10.1007/s00397-014-0814-y](https://doi.org/10.1007/s00397-014-0814-y).

22. Jalocha D., Constantinescu A., Neviere R. Revisiting the identification of generalized Maxwell models from experimental results // *Int. J. Solids Struct.*, 2015. vol. 67–68. pp. 169–181. doi: [10.1016/j.ijsolstr.2015.04.018](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.04.018).
23. Хохлов А. В. Свойства семейств кривых ползучести для нагружения с постоянной скоростью на начальной стадии, порождаемых линейным соотношением вязкоупругости // *Проблемы прочности и пластичности*, 2016. Т. 78, № 2. С. 164–176.
24. Хохлов А. В. Идентификация нелинейной модели упруговязкопластичности типа Максвелла по кривым ползучести с начальной стадией нагружения. Часть 1. Математический фундамент // *Деформация и разрушение материалов*, 2017. № 9. С. 2–9.
25. Хохлов А. В. Двусторонние оценки для функции релаксации линейной теории наследственности через кривые релаксации при гамп-деформировании и методики её идентификации // *Изв. РАН. МТТ*, 2018. № 3. С. 81–104. doi: [10.7868/S0572329918030108](https://doi.org/10.7868/S0572329918030108).
26. Работнов Ю. Н. Некоторые вопросы теории ползучести // *Вестник МГУ*, 1948. № 10. С. 81–91.
27. Работнов Ю. Н. *Ползучесть элементов конструкций*. М.: Наука, 1966. 752 с.
28. Работнов Ю. Н. *Элементы наследственной механики твердых тел*. М.: Наука, 1977. 384 с.
29. Fung Y. C. *Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues*. New York: Springer-Verlag, 1993. 568 pp.
30. Работнов Ю. Н., Паперник Л. Х., Степанычев Е. И. Приложение нелинейной теории наследственности к описанию временных эффектов в полимерных материалах // *Механика полимеров*, 1971. № 1. С. 74–87.
31. Хохлов А. В. Анализ общих свойств кривых ползучести при ступенчатом нагружении, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для вязкоупругопластичных материалов // *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2017. № 3. С. 93–123. doi: [10.18698/1812-3368-2017-3-93-123](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2017-3-93-123).
32. Хохлов А. В. Качественный анализ общих свойств теоретических кривых линейного определяющего соотношения вязкоупругости // *Наука и образование*, 2016. № 5. С. 187–245. doi: [10.7463/0516.0840650](https://doi.org/10.7463/0516.0840650).
33. Хохлов А. В. Свойства произведения функции ползучести и функции релаксации в линейной вязкоупругости // *Проблемы прочности и пластичности*, 2014. Т. 76, № 4. С. 343–356, режим доступа: <http://ppp.mech.unn.ru/ru/nomera?anum=283> (дата обращения: 11.08.2017).
34. Хохлов А. В. Общие свойства диаграмм деформирования линейных моделей вязкоупругости при постоянной скорости деформации // *Проблемы прочности и пластичности*, 2015. Т. 77, № 1. С. 60–74, режим доступа: <http://ppp.mech.unn.ru/ru/nomera?anum=296> (дата обращения: 11.08.2017).
35. Хохлов А. В. Кривые длительной прочности, порождаемые линейной теорией вязкоупругости в сочетании с критериями разрушения, учитывающими историю деформирования // *Труды МАИ*, 2016. № 91. С. 1–32, режим доступа: <http://trudymai.ru/published.php?ID=75559> (дата обращения: 11.08.2017).
36. Nutting P. G. A new general law of deformation // *J. Frankline Inst.*, 1921. vol. 191, no. 5. pp. 679–685. doi: [10.1016/S0016-0032\(21\)90171-6](https://doi.org/10.1016/S0016-0032(21)90171-6).
37. Gemant A. On fractional differentials // *Phil. Mag., Ser. 7*, 1938. vol. 25, no. 168. pp. 540–549. doi: [10.1080/14786443808562036](https://doi.org/10.1080/14786443808562036).
38. Nutting P. A general stress-strain-time formula // *J. Frankline Inst.*, 1943. vol. 235, no. 5. pp. 513–524. doi: [10.1016/S0016-0032\(43\)91483-8](https://doi.org/10.1016/S0016-0032(43)91483-8).
39. Scott-Blair G. W., Copen F. The classification of rheological properties of industrial materials in the light of power-law relations between stress, strain, and time // *J. Sci. Instrum.*, 1942. vol. 19, no. 6. pp. 88–93. doi: [10.1088/0950-7671/19/6/303](https://doi.org/10.1088/0950-7671/19/6/303).
40. Scott-Blair G. W., Caffyn J. Significance of power-law relations in rheology // *Nature*, 1945. vol. 155. pp. 171–172. doi: [10.1038/155171c0](https://doi.org/10.1038/155171c0).

41. Герасимов А. Н. Обобщение линейных законов деформирования и его применение к задачам внутреннего трения // *ПММ*, 1948. Т. 12, № 3. С. 251–260.
42. Слонимский Г. Л. О законе деформации высокоэластичных полимерных тел // *Докл. АН СССР*, 1961. Т. 140, № 2. С. 343–346.
43. Мешков С. И. Интегральное представление дробно-экспоненциальных функций и их применение к динамическим задачам линейной вязко-упругости // *ПМТФ*, 1970. Т. 91, № 1. С. 103–110, режим доступа: [http://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=157447&ARTICLE\\_ID=157473](http://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=157447&ARTICLE_ID=157473) (дата обращения: 11.08.2017).
44. Meshkov S. I., Pachevskaya G. N., Postnikov V. S., Rossikhin U. A. Integral representations of  $\varepsilon_\gamma$ -functions and their application to problems in linear viscoelasticity // *Int. J. Eng. Sci.*, 1971. vol. 9, no. 4. pp. 387–398. doi: [10.1016/0020-7225\(71\)90059-0](https://doi.org/10.1016/0020-7225(71)90059-0).
45. Caputo M., Mainardi F. Linear models of dissipation in anelastic solids // *Riv. Nuovo Cimento*, 1971. vol. 1, no. 2. pp. 161–198. doi: [10.1007/BF02820620](https://doi.org/10.1007/BF02820620).
46. Koeller R. Application of fractional calculus to the theory of viscoelasticity // *J. Appl. Mech.*, 1984. vol. 51, no. 2. pp. 299–307. doi: [10.1115/1.3167616](https://doi.org/10.1115/1.3167616).
47. Koeller R. Polynomial operators, Stieltjes convolution, and fractional calculus in hereditary mechanics // *Acta Mech.*, 1986. vol. 58, no. 3–4. pp. 251–264. doi: [10.1007/BF01176603](https://doi.org/10.1007/BF01176603).
48. Bagley R. L., Torvik P. J. On the fractional calculus model of viscoelastic behavior // *J. Rheology*, 1986. vol. 30, no. 1. pp. 133–155. doi: [10.1122/1.549887](https://doi.org/10.1122/1.549887).
49. Bagley R. L. Power law and fractional calculus model of viscoelasticity // *AIAA J.*, 1989. vol. 27, no. 10. pp. 1412–1417. doi: [10.2514/3.10279](https://doi.org/10.2514/3.10279).
50. Friedrich Chr. Mechanical stress relaxation in polymers: fractional integral model versus fractional differential model // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 1993. vol. 46, no. 2–3. pp. 307–314. doi: [10.1016/0377-0257\(93\)85052-C](https://doi.org/10.1016/0377-0257(93)85052-C).
51. Podlubny I. *Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications* / Mathematics in Science and Engineering. vol. 198. San Diego: Academic Press, 1999. xxiv+340 pp. doi: [10.1016/s0076-5392\(99\)x8001-5](https://doi.org/10.1016/s0076-5392(99)x8001-5).
52. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations* / North-Holland Mathematics Studies. vol. 204. Amsterdam: Elsevier, 2006. xx+523 pp. doi: [10.1016/s0304-0208\(06\)x8001-5](https://doi.org/10.1016/s0304-0208(06)x8001-5).
53. Rossikhin Yu., Shitikova M. Comparative analysis of viscoelastic models involving fractional derivatives of different orders // *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2007. vol. 10, no. 2. pp. 111–121, Retrieved from <https://eudml.org/doc/11320> (August 11, 2017).
54. Rossikhin Yu., Shitikova M. V. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: Novel trends and recent results // *Appl. Mech. Rev.*, 2010. vol. 63, no. 1, 010801. 52 pp. doi: [10.1115/1.4000563](https://doi.org/10.1115/1.4000563).
55. Mainardi F. *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. An introduction to mathematical models*. Hackensack: World Scientific, 2010. xx+347 pp. doi: [10.1142/9781848163300](https://doi.org/10.1142/9781848163300).
56. Sasso M., Palmieri G., Amodio G. Application of fractional derivative models in linear viscoelastic problems // *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2011. vol. 15, no. 4. pp. 367–387. doi: [10.1007/s11043-011-9153-x](https://doi.org/10.1007/s11043-011-9153-x).
57. Огородников Е. Н., Радченко В. П., Яшагин Н. С. Реологические модели вязкоупругого тела с памятью и дифференциальные уравнения дробных осцилляторов // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 1 (22). С. 255–268. doi: [10.14498/vsgtu932](https://doi.org/10.14498/vsgtu932).
58. Katicha S. W., Apeageyi A. K., Flintsch G. W., Loulizi A. Universal linear viscoelastic approximation property of fractional viscoelastic models with application to asphalt concrete // *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2014. vol. 18, no. 3. pp. 555–571. doi: [10.1007/s11043-014-9241-9](https://doi.org/10.1007/s11043-014-9241-9).
59. Pirrotta A., Cutrona S., Di Lorenzo S. Fractional visco-elastic Timoshenko beam from elastic Euler–Bernoulli beam // *Acta Mech.*, 2015. vol. 226, no. 1. pp. 179–189. doi: [10.1007/s00707-014-1144-y](https://doi.org/10.1007/s00707-014-1144-y).

60. Огородников Е. Н., Радченко В. П., Унгарова Л. Г. Математическое моделирование наследственно упругого деформируемого тела на основе структурных моделей и аппарата дробного интегро-дифференцирования Римана–Лиувилля // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 1. С. 167–194. doi: [10.14498/vsgtu1456](https://doi.org/10.14498/vsgtu1456).
61. Christensen R. *Theory of Viscoelasticity. An Introduction*. New York: Academic Press, 1982. xii+364 pp. doi: [10.1016/b978-0-12-174252-2.x5001-7](https://doi.org/10.1016/b978-0-12-174252-2.x5001-7).
62. Drozdov A. D. Modelling an anomalous stress relaxation in glassy polymers (the Kitagawa effect) // *Math. Comput. Model.*, 1998. vol. 27, no. 12. pp. 45–67. doi: [10.1016/S0895-7177\(98\)00072-7](https://doi.org/10.1016/S0895-7177(98)00072-7).
63. Löwe H., Müller P., Zippelius A. Dynamics of gelling liquids: A short survey (Review) // *J. Phys. Cond. Matter*, 2005. vol. 17, no. 20. pp. S1659–S1680. doi: [10.1088/0953-8984/17/20/002](https://doi.org/10.1088/0953-8984/17/20/002).
64. Ghauri I. M., Afzal N., Anwar M., Siddique S. A. Anomalous stress relaxation behavior of polycrystalline aluminum at low temperature // *Int. J. Mod. Phys. B*, 2007. vol. 21, no. 10. pp. 1745–1754. doi: [10.1142/S0217979207036977](https://doi.org/10.1142/S0217979207036977).
65. Drozdov A. D. Time-dependent response of polypropylene after strain reversal // *Int. J. Solids Struct.*, 2010. vol. 47, no. 24. pp. 3221–3233. doi: [10.1016/j.ijsolstr.2010.08.001](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.08.001).
66. Khan F., Yeakle C. Experimental investigation and modeling of non-monotonic creep behavior in polymers // *Int. J. Plasticity*, 2011. vol. 27, no. 4. pp. 512–521. doi: [10.1016/j.ijplas.2010.06.007](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2010.06.007).
67. Khan F., Yeakle C., Gomaa S. Characterization of the mechanical properties of a new grade of ultra high molecular weight polyethylene and modeling with the viscoplasticity based on overstress // *J. Mech. Behav. Biomed. Mater.*, 2012. vol. 6, no. 2. pp. 174–180. doi: [10.1016/j.jmbbm.2011.10.009](https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2011.10.009).
68. Drozdov A. D., Dusunceli N. Unusual mechanical response of carbon black-filled thermoplastic elastomers // *Mech. Mater.*, 2014. vol. 69, no. 1. pp. 116–131. doi: [10.1016/j.mechmat.2013.09.019](https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2013.09.019).

MSC: 74D05, 74A20

## Analysis of properties of creep curves generated by the linear viscoelasticity theory under arbitrary loading programs at initial stage

**A. V. Khokhlov**

Lomonosov Moscow State University,  
Institute of Mechanics,  
1, Michurinsky prospekt, Moscow, 119192, Russian Federation.

### Abstract

The general equation of creep curves family generated by the linear integral constitutive relation of viscoelasticity (with an arbitrary creep compliance function) under arbitrary non-decreasing stress histories at initial stage of loading up to a given stress level is derived and analyzed. Basic qualitative properties of the theoretic creep curves and their dependence on a rise time magnitude, on a loading program shape at initial stage and on creep function characteristics are studied analytically in the uni-axial case assuming creep compliance is an increasing convex-up function of time. Monotonicity and convexity intervals of creep curves, their asymptotic behavior at infinity and conditions for convergence to zero of the deviation from the creep curve under instantaneous (step) loading to a constant stress with time tending to infinity are examined. Two-sided bounds have been obtained for such creep curves and for deviation from the creep curve under step loading and for differences of creep curves with different initial programs of loading up to a given stress level. The uniform convergence of the theoretic creep curves family (with fixed loading law at initial stage) to the creep curve under step loading with the rise time tending to zero has been proved. The analysis revealed the importance of convexity restriction imposed on a creep compliance and the key role of its derivative limit value at infinity. It is proved that the derivative limit value equality to zero is the criterion for memory fading.

General properties and peculiarities of the theoretic creep curves and their dependence on loading program shape at initial stage are illustrated by the examination of the classical rheological models (consisting of two or three spring and dashpot elements), fractional models and hybrid models (with piecewise creep function). The main classes of linear models are considered and specific features of their theoretic creep curves are marked. The results of the analysis are helpful to examine the linear viscoelasticity theory abilities to provide an adequate description of basic rheological phenomena

---

### Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

#### Please cite this article in press as:

Khokhlov A. V. Analysis of properties of creep curves generated by the linear viscoelasticity theory under arbitrary loading programs at initial stage, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 1, pp. 65–95. doi: [10.14498/vsgtu1543](http://doi.org/10.14498/vsgtu1543) (In Russian).

#### Author's Details:

*Andrew V. Khokhlov*  <http://orcid.org/0000-0002-9212-2579>  
Cand. Techn. Sci.; Senior Researcher; Lab. of Elasticity and Plasticity;  
e-mail: [andrey-khokhlov@ya.ru](mailto:andrey-khokhlov@ya.ru)

related to creep and to indicate the field of applicability or non-applicability of the linear theory considering creep test data for a given material. The results constitutes the analytical foundation for obtaining precise two-sided bounds and correction formulas for creep compliance via theoretic or experimental creep curves with initial stage of loading (ramp loading, in particular) and for development of identification, fitting and verification techniques.

**Keywords:** linear viscoelasticity, creep compliance, theoretic creep curves, initial loading stage influence, loading program shape, rise time, ramp loading, two-sided bounds, deviation asymptotics, convergence, fading memory, regular and singular models, fractional models.

Received: 23<sup>rd</sup> April, 2017 / Revised: 11<sup>th</sup> August, 2017 /

Accepted: 18<sup>th</sup> December, 2017 / First online: 29<sup>th</sup> March, 2018

**Competing interests.** I have no competing interests.

**Author's Responsibilities.** I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

**Funding.** This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 17-08-01146\_a).

## References

1. Koltunov M. A. Determination of the characteristics of viscoelastic media from the data of quasi-static tests, *Polymer Mechanics*, 1967, vol. 3, no. 5, pp. 530–534. doi: [10.1007/BF00859235](https://doi.org/10.1007/BF00859235).
2. Zapas L. J., Phillips J. C. Simple shearing flows in polyisobutylene solutions, *J. Res. Nat. Bur. Stds. A*, 1971, vol. 75, no. 1, pp. 33–41, Retrieved from <https://archive.org/details/jresv75An1p33> (August 11, 2017).
3. Findley W. N., Lai J. S., Onaran K. *Creep And Relaxation Of Nonlinear Viscoelastic Materials*. Amsterdam, North Holland, 1976, xii+368 pp.
4. Urzhumtsev Yu. S., Maiboroda V. P. *Tekhnicheskie sredstva i metody opredeleniia prochnostnykh kharakteristik konstruksii iz polimerov* [Technical means and methods for determining the strength characteristics of structures made of polymers]. Moscow, Mashinostroenie, 1984, 168 pp. (In Russian)
5. Tschoegl N. W. *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior*. Berlin, Springer, 1989, xxv+769 pp.
6. Drozdov A. D. *Mechanics of viscoelastic solids*. New York, Wiley, 1998, 484 pp.
7. Lee S., Knauss W. G. A note on the determination of relaxation and creep data from ramp tests, *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2000, vol. 4, no. 1, pp. 1–7. doi: [10.1023/A:1009827622426](https://doi.org/10.1023/A:1009827622426).
8. Adamov A. A., Matveenko V. P., Trufanov N. A., Shardakov I. N. *Metody prikladnoy vyazkouprugosti* [Methods of Applied Viscoelasticity]. Ekaterinburg, UrO RAN, 2003, 411 pp. (In Russian)
9. Lu H., Wang B., Ma J., Huang G., Viswanathan H. Measurement of Creep Compliance of Solid Polymers by Nanoindentation, *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2003, vol. 7, no. 3–4, pp. 189–207. doi: [10.1023/B:MTDM.0000007217.07156.9b](https://doi.org/10.1023/B:MTDM.0000007217.07156.9b).
10. Oyen M. L. Spherical indentation creep following ramp loading, *J. Mater. Res.*, 2005, vol. 20, no. 8, pp. 2094–2100. doi: [10.1557/JMR.2005.0259](https://doi.org/10.1557/JMR.2005.0259).
11. Oyen M.L. Sensitivity of polymer nanoindentation creep properties to experimental variables, *Acta Mater.*, 2007, vol. 55, no. 11, pp. 3633–3639. doi: [10.1016/j.actamat.2006.12.031](https://doi.org/10.1016/j.actamat.2006.12.031).

12. Khokhlov A. V. Constitutive relation for rheological processes: Properties of theoretic creep curves and simulation of memory decay, *Mech. Solids*, 2007, vol. 42, no. 2, pp. 291–306. doi: [10.3103/S0025654407020148](https://doi.org/10.3103/S0025654407020148).
13. Khan F. Loading history effects on the creep and relaxation behavior of thermoplastics, *J. Eng. Mater. Technol.*, 2006, vol. 128, no. 4, pp. 564–571. doi: [10.1115/1.2345448](https://doi.org/10.1115/1.2345448).
14. Sorvari J., Malinen M., Hämäläinen J. Finite ramp time correction method for non-linear viscoelastic material model, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2006, vol. 41, no. 9, pp. 1050–1056. doi: [10.1016/j.ijnonlinmec.2006.10.015](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2006.10.015).
15. Sorvari J., Malinen M. On the direct estimation of creep and relaxation functions, *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2007, vol. 11, no. 2, pp. 143–157. doi: [10.1007/s11043-007-9038-1](https://doi.org/10.1007/s11043-007-9038-1).
16. Duenwald S. E., Vanderby R., Lakes R. S. Constitutive equations for ligament and other soft tissue: evaluation by experiment, *Acta Mech.*, 2009, vol. 205, no. 1–4, pp. 23–33. doi: [10.1007/s00707-009-0161-8](https://doi.org/10.1007/s00707-009-0161-8).
17. Lakes R. S. *Viscoelastic Materials*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2009, xvi+462 pp. doi: [10.1017/CB09780511626722](https://doi.org/10.1017/CB09780511626722).
18. Choi S., Cha S. W., Oh B. H. Identification of viscoelastic behavior for early-age concrete based on measured strain and stress histories, *Mater. Struct.*, 2010, vol. 43, no. 8, pp. 1161–1175. doi: [10.1617/s11527-009-9574-z](https://doi.org/10.1617/s11527-009-9574-z).
19. Di Paola M., Fiore V., Pinnola F., Valenza A. On the influence of the initial ramp for a correct definition of the parameters of fractional viscoelastic materials, *Mech. Mater.*, 2014, vol. 69, no. 1, pp. 63–70. doi: [10.1016/j.mechmat.2013.09.017](https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2013.09.017).
20. Fernandes V. A., De Focatiis D. S. The role of deformation history on stress relaxation and stress memory of filled rubber, *Polymer Testing*, 2014, vol. 40, pp. 124–132. doi: [10.1016/j.polymertesting.2014.08.018](https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2014.08.018).
21. Zhang H., Lamnawar K., Maazouz A., Maia J. M. Experimental considerations on the step shear strain in polymer melts: sources of error and windows of confidence, *Rheol. Acta*, 2015, vol. 54, no. 2, pp. 121–138. doi: [10.1007/s00397-014-0814-y](https://doi.org/10.1007/s00397-014-0814-y).
22. Jalocha D., Constantinescu A., Neviere R. Revisiting the identification of generalized Maxwell models from experimental results, *Int. J. Solids Struct.*, 2015, vol. 67–68, pp. 169–181. doi: [10.1016/j.ijsolstr.2015.04.018](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.04.018).
23. Khokhlov A. V. Properties of creep curves families generated by the linear viscoelasticity theory at ramp stress histories, *Problems of Strength and Plasticity*, 2016, vol. 78, no. 2, pp. 164–176 (In Russian).
24. Khokhlov A. V. Identification methods of Maxwell-type nonlinear viscoelastoplastic model, based on creep curves with initial ramp loading. Part I. Mathematical base, *Deformatsiya i Razrushenie materialov*, 2017, no. 9, pp. 2–9 (In Russian).
25. Khokhlov A. V. Two-sided estimates for the relaxation function of the linear heredity theory through the relaxation curves for the ramp-deformation and the method of its identification, *Izv RAN. MTT*, 2018, no. 3, pp. 81–104 (In Russian). doi: [10.7868/S0572329918030108](https://doi.org/10.7868/S0572329918030108).
26. Rabotnov Yu. N. *Some problems on the theory of creep*, info naca-tm-1353, NACA, 1953.
27. Rabotnov Yu. N. *Creep problems in structural members*. Amsterdam, London, North-Holland Publ., 1969, xiv+822 pp.
28. Rabotnov Yu. N. *Elements of hereditary solid mechanics*. Moscow, Mir Publ., 1980, 388 pp.
29. Fung Y. C. *Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues*. New York, Springer-Verlag, 1993, 568 pp.
30. Rabotnov Yu. N., Papernik L. Kh., Stepanychev E. I. Applications of the linear theory of heredity to the description of temporal effects in polymer materials, *Mekhanika Polymerov*, 1971, no. 1, pp. 74–87 (In Russian).
31. Khokhlov A. V. Analysis of creep curves general properties under step loading generated by the rabotnov nonlinear relation for viscoelastic plastic materials, *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2017, no. 3, pp. 93–123 (In Russian). doi: [10.18698/1812-3368-2017-3-93-123](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2017-3-93-123).

32. Khokhlov A. V. The qualitative analysis of theoretic curves generated by linear viscoelasticity constitutive equation, *Science & Education*, 2016, no. 5, pp. 187–245 (In Russian). doi: [10.7463/0516.0840650](https://doi.org/10.7463/0516.0840650).
33. Khokhlov A. V. General properties and peculiarities of creep and relaxation functions product in linear viscoelasticity, *Problems of Strength and Plasticity*, 2014, vol. 76, no. 4, pp. 343–356 (In Russian), Retrieved from <http://ppp.mech.unn.ru/ru/nomera?anum=283> (August 11, 2017).
34. Khokhlov A. V. General properties of stress-strain curves at constant strain rate yielding from linear theory of viscoelasticity, *Problems of Strength and Plasticity*, 2015, vol. 77, no. 1, pp. 60–74 (In Russian), Retrieved from <http://ppp.mech.unn.ru/ru/nomera?anum=296> (August 11, 2017).
35. Khokhlov A. V. Long-term strength curves produced by linear viscoelasticity theory combined with failure criteria accounting for strain history, *Trudy MAI*, 2016, no. 91, pp. 1–32 (In Russian), Retrieved from <http://trudymai.ru/published.php?ID=75559> (August 11, 2017).
36. Nutting P. G. A new general law of deformation, *J. Frankline Inst.*, 1921, vol. 191, no. 5, pp. 679–685. doi: [10.1016/S0016-0032\(21\)90171-6](https://doi.org/10.1016/S0016-0032(21)90171-6).
37. Gemant A. On fractional differentials, *Phil. Mag., Ser. 7*, 1938, vol. 25, no. 168, pp. 540–549. doi: [10.1080/14786443808562036](https://doi.org/10.1080/14786443808562036).
38. Nutting P. A general stress-strain-time formula, *J. Frankline Inst.*, 1943, vol. 235, no. 5, pp. 513–524. doi: [10.1016/S0016-0032\(43\)91483-8](https://doi.org/10.1016/S0016-0032(43)91483-8).
39. Scott-Blair G. W., Coppen F. The classification of rheological properties of industrial materials in the light of power-law relations between stress, strain, and time, *J. Sci. Instrum.*, 1942, vol. 19, no. 6, pp. 88–93. doi: [10.1088/0950-7671/19/6/303](https://doi.org/10.1088/0950-7671/19/6/303).
40. Scott-Blair G. W., Caffyn J. Significance of power-law relations in rheology, *Nature*, 1945, vol. 155, pp. 171–172. doi: [10.1038/155171c0](https://doi.org/10.1038/155171c0).
41. Gerasimov A. N. A generalization of linear laws of deformation and its applications to problems of internal friction, *Prikl. Matem. Mekh.*, 1948, vol. 12, no. 3, pp. 251–260 (In Russian).
42. Slonimskii G. L. On the law of deformation of highly elastic polymeric bodies, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1961, vol. 140, no. 2, pp. 343–346 (In Russian).
43. Meshkov S. I. The integral representation of fractionally exponential functions and their application to dynamic problems of linear viscoelasticity, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1970, vol. 11, no. 1, pp. 100–107. doi: [10.1007/bf01102681](https://doi.org/10.1007/bf01102681).
44. Meshkov S. I., Pachevskaya G. N., Postnikov V. S., Rossikhin U. A. Integral representations of  $\varepsilon_\gamma$ -functions and their application to problems in linear viscoelasticity, *Int. J. Eng. Sci.*, 1971, vol. 9, no. 4, pp. 387–398. doi: [10.1016/0020-7225\(71\)90059-0](https://doi.org/10.1016/0020-7225(71)90059-0).
45. Caputo M., Mainardi F. Linear models of dissipation in anelastic solids, *Riv. Nuovo Cimento*, 1971, vol. 1, no. 2, pp. 161–198. doi: [10.1007/BF02820620](https://doi.org/10.1007/BF02820620).
46. Koeller R. Application of fractional calculus to the theory of viscoelasticity, *J. Appl. Mech.*, 1984, vol. 51, no. 2, pp. 299–307. doi: [10.1115/1.3167616](https://doi.org/10.1115/1.3167616).
47. Koeller R. Polynomial operators, Stieltjes convolution, and fractional calculus in hereditary mechanics, *Acta Mech.*, 1986, vol. 58, no. 3–4, pp. 251–264. doi: [10.1007/BF01176603](https://doi.org/10.1007/BF01176603).
48. Bagley R. L., Torvik P. J. On the fractional calculus model of viscoelastic behavior, *J. Rheology*, 1986, vol. 30, no. 1, pp. 133–155. doi: [10.1122/1.549887](https://doi.org/10.1122/1.549887).
49. Bagley R. L. Power law and fractional calculus model of viscoelasticity, *AIAA J.*, 1989, vol. 27, no. 10, pp. 1412–1417. doi: [10.2514/3.10279](https://doi.org/10.2514/3.10279).
50. Friedrich Chr. Mechanical stress relaxation in polymers: fractional integral model versus fractional differential model, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 1993, vol. 46, no. 2–3, pp. 307–314. doi: [10.1016/0377-0257\(93\)85052-C](https://doi.org/10.1016/0377-0257(93)85052-C).
51. Podlubny I. *Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 198. San Diego, Academic Press, 1999, xxiv+340 pp. doi: [10.1016/s0076-5392\(99\)x8001-5](https://doi.org/10.1016/s0076-5392(99)x8001-5).

52. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 204. Amsterdam, Elsevier, 2006, xx+523 pp. doi: [10.1016/s0304-0208\(06\)x8001-5](https://doi.org/10.1016/s0304-0208(06)x8001-5).
53. Rossikhin Yu., Shitikova M. Comparative analysis of viscoelastic models involving fractional derivatives of different orders, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2007, vol. 10, no. 2, pp. 111–121, Retrieved from <https://eudml.org/doc/11320> (August 11, 2017).
54. Rossikhin Yu., Shitikova M. V. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: Novel trends and recent results, *Appl. Mech. Rev.*, 2010, vol. 63, no. 1, 010801, 52 pp. doi: [10.1115/1.4000563](https://doi.org/10.1115/1.4000563).
55. Mainardi F. *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. An introduction to mathematical models*. Hackensack, World Scientific, 2010, xx+347 pp. doi: [10.1142/9781848163300](https://doi.org/10.1142/9781848163300).
56. Sasso M., Palmieri G., Amodio G. Application of fractional derivative models in linear viscoelastic problems, *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2011, vol. 15, no. 4, pp. 367–387. doi: [10.1007/s11043-011-9153-x](https://doi.org/10.1007/s11043-011-9153-x).
57. Ogorodnikov E. N., Radchenko V. P., Yashagin N. S. Rheological model of viscoelastic body with memory and differential equations of fractional oscillator, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2011, no. 1 (22), pp. 255–268 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu932](https://doi.org/10.14498/vsgtu932).
58. Katicha S. W., Apeageyi A. K., Flintsch G. W., Loulizi A. Universal linear viscoelastic approximation property of fractional viscoelastic models with application to asphalt concrete, *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2014, vol. 18, no. 3, pp. 555–571. doi: [10.1007/s11043-014-9241-9](https://doi.org/10.1007/s11043-014-9241-9).
59. Pirrotta A., Cutrona S., Di Lorenzo S. Fractional visco-elastic Timoshenko beam from elastic Euler–Bernoulli beam, *Acta Mech.*, 2015, vol. 226, no. 1, pp. 179–189. doi: [10.1007/s00707-014-1144-y](https://doi.org/10.1007/s00707-014-1144-y).
60. Ogorodnikov E. N., Radchenko V. P., Ungarova L. G. Mathematical modeling of hereditary elastically deformable body on the basis of structural models and fractional integro-differentiation Riemann–Liouville apparatus, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 1, pp. 167–194 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu1456](https://doi.org/10.14498/vsgtu1456).
61. Christensen R. *Theory of Viscoelasticity. An Introduction*. New York, Academic Press, 1982, xii+364 pp. doi: [10.1016/b978-0-12-174252-2.x5001-7](https://doi.org/10.1016/b978-0-12-174252-2.x5001-7).
62. Drozdov A. D. Modelling an anomalous stress relaxation in glassy polymers (the Kitagawa effect), *Math. Comput. Model.*, 1998, vol. 27, no. 12, pp. 45–67. doi: [10.1016/S0895-7177\(98\)00072-7](https://doi.org/10.1016/S0895-7177(98)00072-7).
63. Löwe H., Müller P., Zippelius A. Dynamics of gelling liquids: A short survey (Review), *J. Phys. Cond. Matter*, 2005, vol. 17, no. 20, pp. S1659–S1680. doi: [10.1088/0953-8984/17/20/002](https://doi.org/10.1088/0953-8984/17/20/002).
64. Ghauri I. M., Afzal N., Anwar M., Siddique S. A. Anomalous stress relaxation behavior of polycrystalline aluminum at low temperature, *Int. J. Mod. Phys. B*, 2007, vol. 21, no. 10, pp. 1745–1754. doi: [10.1142/S0217979207036977](https://doi.org/10.1142/S0217979207036977).
65. Drozdov A. D. Time-dependent response of polypropylene after strain reversal, *Int. J. Solids Struct.*, 2010, vol. 47, no. 24, pp. 3221–3233. doi: [10.1016/j.ijsolstr.2010.08.001](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.08.001).
66. Khan F., Yeakle C. Experimental investigation and modeling of non-monotonic creep behavior in polymers, *Int. J. Plasticity*, 2011, vol. 27, no. 4, pp. 512–521. doi: [10.1016/j.ijplas.2010.06.007](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2010.06.007).
67. Khan F., Yeakle C., Gomaa S. Characterization of the mechanical properties of a new grade of ultra high molecular weight polyethylene and modeling with the viscoplasticity based on overstress, *J. Mech. Behav. Biomed. Mater.*, 2012, vol. 6, no. 2, pp. 174–180. doi: [10.1016/j.jmbbm.2011.10.009](https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2011.10.009).
68. Drozdov A. D., Dusunceli N. Unusual mechanical response of carbon black-filled thermoplastic elastomers, *Mech. Mater.*, 2014, vol. 69, no. 1, pp. 116–131. doi: [10.1016/j.mechmat.2013.09.019](https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2013.09.019).