



# Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

УДК 533.6.013.4

## Динамическая устойчивость деформируемых элементов конструкций при сверхзвуковом режиме обтекания

П. А. Вельмисов, А. В. Анкилов

Ульяновский государственный технический университет,  
Россия, 432027, Ульяновск, ул. Северный Венец, 32.

### Аннотация

Исследуется устойчивость деформируемого элемента конструкции в виде пластины-полосы при обтекании ее сверхзвуковым потоком идеального газа. Принятые в работе определения устойчивости соответствуют концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Для описания динамики упругого тела используется математическая модель, учитывающая поперечные и продольные деформации упругой пластины. Модель описывается связанной системой дифференциальных уравнений в частных производных для двух неизвестных функций деформаций. Аэродинамическое давление на пластину определяется согласно «поршневой» теории А. А. Ильюшина. На основе построенного функционала для случая шарнирного неподвижного закрепления концов пластины получены достаточные условия устойчивости решений предложенной системы уравнений, описывающей продольно-поперечные колебания пластины. Произведена оценка амплитуды деформаций в зависимости от начальных условий. На конкретном примере одной механической системы показано использование доказанных теорем и оценок.

**Ключевые слова:** аэрогидроупругость, математическое моделирование, динамическая устойчивость, упругая пластина, сверхзвуковой поток газа, система дифференциальных уравнений в частных производных, функционал.

### Научная статья

Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

### Образец для цитирования

Вельмисов П. А., Анкилов А. В. Динамическая устойчивость деформируемых элементов конструкций при сверхзвуковом режиме обтекания // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 1. С. 96–115. doi: [10.14498/vsgtu1588](https://doi.org/10.14498/vsgtu1588).

### Сведения об авторах

Петр Александрович Вельмисов <http://orcid.org/0000-0001-7825-7015>

доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. высшей математики; e-mail: [velmisov@ulstu.ru](mailto:velmisov@ulstu.ru)

Андрей Владимирович Анкилов <http://orcid.org/0000-0002-5946-8535>

кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. высшей математики; e-mail: [ankil@ulstu.ru](mailto:ankil@ulstu.ru)

Получение: 12 декабря 2017 г. / Исправление: 17 февраля 2018 г. /

Принятие: 12 марта 2018 г. / Публикация онлайн: 28 марта 2018 г.

---

**Введение.** При проектировании конструкций, приборов, устройств, аппаратов, систем различного назначения, находящихся во взаимодействии с газожидкостной средой, необходимо решать задачи, связанные с исследованием устойчивости деформируемых элементов, требуемой для их функционирования и надежности эксплуатации. Это связано с тем, что воздействие потока может не только возбуждать колебания, но и приводить к увеличению амплитуды или скорости колебаний до значений, при которых может произойти разрушение конструкции или ее элементов, или, по крайней мере, нарушение надежности эксплуатации и необходимой функциональной точности работы.

В работе приведены результаты исследования динамической устойчивости упругого элемента конструкции, представляющего собой пластину-полосу, при сверхзвуковом обтекании потоком идеального газа. Аэродинамическое давление на пластину определяется согласно «поршневой» теории А. А. Ильюшина.

Определение устойчивости упругого тела соответствует концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Проблема формулируется так: при каких значениях параметров, характеризующих систему «жидкость-тело», малым деформациям тела в начальный момент времени  $t = 0$  (т. е. малым начальным отклонениям от положения равновесия) будут соответствовать малые деформации и в любой момент времени  $t > 0$ .

В настоящее время аэрогидроупругость представляет собой хорошо развитый раздел механики сплошной среды. Много исследований посвящено динамике, устойчивости и флаттеру пластин и оболочек, находящихся в потоке жидкости или газа (среди последних в качестве примера отметим как российские [1–6], так и зарубежные [7–12] исследования). В связи с развитием компьютерных технологий в подавляющем большинстве последних работ для исследования динамики и устойчивости используются численные методы расчета. Однако много работ посвящено и аналитическому исследованию линейных моделей аэрогидроупругости с применением частотных методов.

В данной статье для описания динамики упругого элемента предлагается нелинейная модель, учитывающая как поперечные, так и продольные колебания пластины. Это делает невозможным использование частотных методов и усложняет численное решение поставленной задачи, так как приводит к продолжительным расчетам и большим погрешностям в них.

Отличие от приведенных выше работ, для исследования устойчивости используется прямой метод А. М. Ляпунова. На основе построения функционала, соответствующего нелинейной системе дифференциальных уравнений в частных производных, описывающей продольно-поперечные колебания пластины-полосы, получены достаточные условия устойчивости решений этой системы. Ранее проведено исследование динамики и устойчивости деформируемой пластины-полосы при обтекании ее сверхзвуковым потоком идеального газа на основе линейных моделей упругого [13, 14] и вязкоупругого [15] тела, учитывающих только поперечные колебания пластины.

**1. Математическая модель.** Рассматривается обтекание бесконечной упругой пластины, сечение которой в плоскости  $Oxy$  в недеформированном состоянии задается соотношениями  $y = 0$ ,  $x \in [0, l]$ , потоком идеального газа, при этом совместные колебания потока идеального газа и упругой пластины описываются функцией  $y = w(x, t)$ . Скорость потока параллельна оси  $Ox$  и равна  $V$  ( $V > a$ , где  $a$  — скорость звука в потоке,  $M = V/a > 1$  — число Маха). На рис. 1 представлены примеры обтекания конструкций с упругим деформированным элементом сверхзвуковым потоком газа.

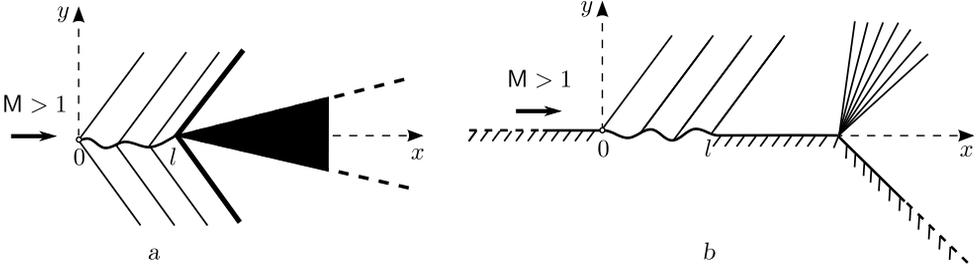


Рис. 1. Примеры обтекания конструкций с упругим элементом сверхзвуковым потоком газа: а — двустороннее обтекание рассекателя с образованием ударной волны; б — одностороннее обтекание защитного экрана с образованием волны разрежения

[Figure 1. Examples of flow past constructions with elastic element by the supersonic stream of the gas: a — bilateral flow around the splitter damper to form a shock wave; b — unilateral flow around the safety screen to form a rarefaction wave]

Функция  $w(x, t) \in C^{4,2}\{[0, l] \times \mathbb{R}^+\}$  определяет поперечную составляющую деформации пластины и принадлежит множеству четырежды непрерывно дифференцируемых функций по переменной  $x$  на отрезке  $[0, l]$  и дважды непрерывно дифференцируемых по переменной  $t$  при  $t \geq 0$  и принимает действительные значения; функция  $u(x, t) \in C^{2,2}\{[0, l] \times \mathbb{R}^+\}$  определяет продольную составляющую деформации пластины и принадлежит множеству дважды непрерывно дифференцируемых функций по переменной  $x$  на отрезке  $[0, l]$  и дважды непрерывно дифференцируемых по переменной  $t$  при  $t \geq 0$  и принимает действительные значения.

Будем использовать следующие обозначения:  $h$  — толщина пластины;  $E$ ,  $\rho$  — модуль упругости и плотность материала пластины;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $m = h\rho$  — погонная масса пластины;  $N(t)$  — продольное усилие;  $F = h/(1 - \nu)$ ;  $D = EI$  — изгибная жесткость пластины;  $I = h^3/(12(1 - \nu^2))$  — момент инерции;  $\beta_2, \beta_1$  — коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования;  $\beta_0$  — коэффициент жесткости слоя обжатия;  $\alpha = \alpha_0\rho_0a_0 = \text{const} > 0$ , где  $\rho_0, a_0$  — плотность газа и скорость звука в однородном невозмущенном потоке ( $\alpha_0 = 1$  при одностороннем обтекании,  $\alpha_0 = 2$  при двустороннем обтекании).

Сжимающая ( $N > 0$ ) или растягивающая ( $N < 0$ ) пластину сила  $N$  может зависеть от времени. Например, при изменении теплового воздействия на пластину с течением времени  $N(t)$  имеет вид

$$N(t) = N_0 + N_T(t), \quad N_T(t) = \frac{T_0(t)}{1 - \nu}, \quad T_0(t) = E\alpha_T \int_{-h/2}^{h/2} T(z, t) dz, \quad (1)$$

где  $\alpha_T$  — температурный коэффициент линейного расширения,  $T(z, t)$  — за-

кон изменения температуры по толщине пластины,  $N_0$  — постоянная составляющая усилия, созданная при закреплении пластины.

Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений, описывающую продольно-поперечные колебания упругой пластины при обтекании ее сверхзвуковым потоком газа:

$$\begin{cases} -EF(u'(x, t) + \frac{1}{2}w'^2(x, t))' + m\ddot{u}(x, t) - \beta_2 F \dot{u}''(x, t) = 0, \\ -EF[w'(x, t)(u'(x, t) + \frac{1}{2}w'^2(x, t))] + Dw''''(x, t) + m\ddot{w}(x, t) + \\ + N(t)w''(x, t) + \beta_2 I \dot{w}''''(x, t) + \beta_1 \dot{w}(x, t) + \beta_0 w(x, t) + \\ + \alpha(\dot{w}(x, t) + Vw'(x, t)) = 0, \quad x \in (0, l). \end{cases} \quad (2)$$

Здесь штрих обозначает производную по координате  $x$ , точка — производную по времени  $t$ .

Аэродинамическая нагрузка определяется выражением  $\alpha(\dot{w} + Vw')$ , справедливым при достаточно больших скоростях сверхзвукового потока  $V$ .

Граничные условия на концах пластины могут быть заданы любой комбинацией из представленных на рис. 2:

a) жесткое защемление:

$$w(x_b, t) = w'(x_b, t) = u(x_b, t) = 0; \quad (3)$$

b) шарнирное неподвижное закрепление:

$$w(x_b, t) = w''(x_b, t) = u(x_b, t) = 0; \quad (4)$$

c) жесткое подвижное защемление:

$$w(x_b, t) = w'(x_b, t) = u'(x_b, t) = 0; \quad (5)$$

d) шарнирное подвижное закрепление:

$$w(x_b, t) = w''(x_b, t) = u'(x_b, t) + 0.5w'^2(x_b, t) = 0, \quad (6)$$

где  $x_b$  — координата конца пластины: 0 или  $l$ .

Для определенности будем исследовать устойчивость пластины в случае шарнирного неподвижного закрепления (4) обоих концов пластины:

$$w(0, t) = w''(0, t) = u(0, t) = w(l, t) = w''(l, t) = u(l, t) = 0. \quad (7)$$

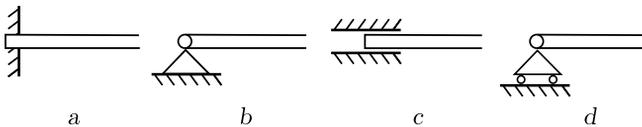


Рис. 2. Способы закрепления: а — жесткое защемление; б — шарнирное неподвижное закрепление; с — жесткое подвижное защемление; д — шарнирное подвижное закрепление [Figure 2. Support types: a — fixed support; b — pinned support; c — skid support; d — roller support]

Для остальных пятнадцати способов закрепления концов пластины, получающихся различными комбинациями (3)–(6), исследование устойчивости производится аналогично.

Зададим начальные условия

$$w(x, 0) = f_1(x), \quad \dot{w}(x, 0) = f_2(x), \quad u(x, 0) = f_3(x), \quad \dot{u}(x, 0) = f_4(x), \quad (8)$$

которые должны быть согласованы с граничными условиями (7).

Согласно определению,  $w(x, t)$  и функции  $f_1(x), f_2(x) \in C^4[0, l]$ , а функции  $f_3(x), f_4(x) \in C^2[0, l]$ . Норма в пространстве  $C^K[0, l]$ ,  $K = 2, 4$ , определяется равенством

$$\|f\| = \sup_{0 \leq k \leq K} \max_{x \in [0, l]} \left| \frac{\partial^k f(x)}{\partial x^k} \right|.$$

Таким образом, поставлена начально-краевая задача (2), (7), (8) для определения двух неизвестных функций  $w(x, t), u(x, t)$ .

**2. Исследование устойчивости.** Дадим следующие определения.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Решение задачи (2), (7) для двух неизвестных функций

$$w(x, t) \in C^{4,2}\{[0, l] \times \mathbb{R}^+\}, \quad u(x, t) \in C^{2,2}\{[0, l] \times \mathbb{R}^+\} \quad (9)$$

называется устойчивым по отношению к возмущениям начальных данных (8), если для любых сколь угодно малых положительных чисел  $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$  найдутся числа  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\delta_1, \delta_2) > 0, \varepsilon_2 = \varepsilon_2(\delta_1, \delta_2) > 0, \varepsilon_3 = \varepsilon_3(\delta_1, \delta_2) > 0, \varepsilon_4 = \varepsilon_4(\delta_1, \delta_2) > 0$  такие, что для любых функций  $f_1(x), f_2(x) \in C^4[0, l]$  и  $f_3(x), f_4(x) \in C^2[0, l]$ , удовлетворяющих граничным условиям и условиям малости по норме

$$\|f_1(x)\| < \varepsilon_1, \quad \|f_2(x)\| < \varepsilon_2, \quad \|f_3(x)\| < \varepsilon_3, \quad \|f_4(x)\| < \varepsilon_4,$$

будут выполнены неравенства  $|w(x, t)| < \delta_1, x \in [0, l]$  и  $|u(x, t)| < \delta_2, x \in [0, l]$  для любого момента времени  $t > 0$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Частные производные  $\dot{w}(x, t), \dot{u}(x, t)$  решения задачи (2), (7) для двух неизвестных функций  $w(x, t), u(x, t)$ , принадлежащих пространствам (9), называются устойчивыми по отношению к возмущениям начальных данных (8), если для любых сколь угодно малых положительных чисел  $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$  найдутся числа  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\delta_1, \delta_2) > 0, \varepsilon_2 = \varepsilon_2(\delta_1, \delta_2) > 0, \varepsilon_3 = \varepsilon_3(\delta_1, \delta_2) > 0, \varepsilon_4 = \varepsilon_4(\delta_1, \delta_2) > 0$  такие, что для любых функций  $f_1(x), f_2(x) \in C^4[0, l]$  и  $f_3(x), f_4(x) \in C^2[0, l]$ , удовлетворяющих граничным условиям и условиям малости по норме

$$\|f_1(x)\| < \varepsilon_1, \quad \|f_2(x)\| < \varepsilon_2, \quad \|f_3(x)\| < \varepsilon_3, \quad \|f_4(x)\| < \varepsilon_4,$$

будут выполнены неравенства  $|\dot{w}(x, t)| < \delta_1, x \in [0, l]$  и  $|\dot{u}(x, t)| < \delta_2, x \in [0, l]$  для любого момента времени  $t > 0$ .

Аналогичные определения можно дать для любых частных производных любого порядка от функций  $w(x, t), u(x, t)$ , являющихся решением задачи (2), (7).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Функционалом в пространствах (9) называется всякий закон, согласно которому любым функциям  $w(x, t)$ ,  $u(x, t)$  из (9) сопоставляется функция  $\Phi(t) \equiv \Phi(w, u) \in C^2 \{\mathbb{R}^+\}$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Дифференциальными операторами полиномиального вида будем называть следующие дифференциальные выражения:

$$F_k^{n_1, s_1, n_2, s_2}(w, u, x, t) = G_k(D^{0,0}w(x, t), D^{1,0}w(x, t), D^{0,1}w(x, t), \dots, D^{n_1, s_1}w(x, t), D^{0,0}u(x, t), D^{1,0}u(x, t), D^{0,1}u(x, t), \dots, D^{n_2, s_2}u(x, t)), \quad x \in [0, l], \quad t \geq 0,$$

где

$$D^{i,j}g(x, t) = \frac{\partial^{i+j}g(x, t)}{\partial x^i \partial t^j},$$

а функции  $G_k(x_1, x_2, \dots)$  — полиномы, все мономы которых не ниже второго порядка, с ограниченными коэффициентами, зависящими от переменных  $x$  и  $t$ . Все коэффициенты полиномов непрерывно дифференцируемы по времени  $t$ .

ЛЕММА 1. Если можно построить функционал  $\Phi(t)$  такой, что

- а)  $\dot{\Phi}(t) \leq 0$ ;
- б) для любого момента времени найдется положительно определенная нижняя оценка этого функционала:

$$\Phi(t) \geq \Phi_1(t) = \int_0^l F_1^{4,2,2,2}(w, u, x, t) dx \geq 0; \quad (10)$$

- в) найдется верхняя оценка начального значения этого функционала:

$$\Phi(0) \leq \Phi_2(0) = \int_0^l F_2^{4,2,2,2}(w, u, x, 0) dx, \quad (11)$$

где  $w(x, t)$ ,  $u(x, t)$  из (9) — решение начально-краевой задачи (2), (7), (8), то функции  $w(x, t)$ ,  $u(x, t)$  и (или) их производные, входящие в положительно определенный полином под знаком интеграла в выражении для  $\Phi_1(t)$ , устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных.

*Доказательство.* Интегрируя неравенство  $\dot{\Phi}(t) \leq 0$  от 0 до  $t$ , согласно (10), (11) получим

$$0 \leq \Phi_1(t) \leq \Phi(t) \leq \Phi(0) \leq \Phi_2(0). \quad (12)$$

Из неравенства  $\Phi_1(t) \leq \Phi_2(0)$  в (12), где  $\Phi_2(0)$  имеет вид (11), получим, что из малости по норме функций  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ ,  $f_3(x)$ ,  $f_4(x)$ , согласно определению 4, следует малость функционала  $\Phi_1(t)$ .

Неравенство  $\Phi_1(t) \geq 0$  в (12), где  $\Phi_1(t)$  имеет вид (10), означает, что, используя интегральные неравенства, в оценке функционала  $\Phi_1(t)$  можно выделить один или несколько положительно определенных полиномов (остальные будут положительно полуопределенными). И, следовательно, используя метод Лагранжа, можно получить оценку функционала снизу интегралом от

каждой функции в четной степени, входящим в полином и умноженным на ненулевую ограниченную величину.

Из малости функционала  $\Phi_1(t)$  получим малость этих интегралов, а следовательно, и малость самих функций. Тогда, согласно определениям 1 и 2, эти функции будут устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных.  $\square$

Получим достаточные условия устойчивости тривиального решения

$$w(x, t) \equiv 0, \quad u(x, t) \equiv 0$$

системы интегро-дифференциальных уравнений (2) по отношению к возмущениям начальных условий (8).

Пусть  $\lambda_1, \mu_1, \vartheta_1$  — наименьшие собственные значения [16] краевых задач для уравнений

$$\phi'''' = -\lambda\phi'', \quad \phi'''' = \mu\phi, \quad \phi'' = -\vartheta\phi \quad (13)$$

с краевыми условиями (7) на функцию  $w(x, t)$ ;  $\eta_1$  — наименьшее собственное значение краевой задачи для уравнения

$$\psi''(x) = -\eta\psi(x) \quad (14)$$

с краевыми условиями (7) на функцию  $u(x, t)$ .

**ТЕОРЕМА 1.** *Если функции  $w(x, t)$ ,  $u(x, t)$  удовлетворяют краевым условиям (7) и найдется число  $\theta > 0$  такое, что для любого момента времени  $t > 0$  выполняются условия*

$$m > 0, \quad D > 0, \quad \beta_0 \geq 0, \quad \beta_1 \geq 0, \quad \beta_2 \geq 0, \quad D\lambda_1 - N(t) > 0, \quad (15)$$

$$\beta_2 F \eta_1 - 2m\theta > 0, \quad \beta_0 + \beta_1\theta + \alpha\theta + \vartheta_1(\lambda_1(D + \beta_2 I\theta) - N(t)) > m\theta^2, \quad (16)$$

$$\beta_2 I \mu_1 + \beta_1 + \alpha - m\theta > 0, \quad (17)$$

$$2(\beta_2 I \mu_1 + \beta_1 + \alpha - m\theta)(2\theta D\lambda_1 + \dot{N}(t) - 2\theta N(t)) - \alpha^2 V^2 \geq 0, \quad (18)$$

то решение  $w(x, t)$ ,  $u(x, t)$  системы уравнений (2) и производные  $\dot{w}(x, t)$ ,  $\dot{u}(x, t)$  устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных (8).

*Доказательство.* Введем функционал

$$\begin{aligned} \Phi(t) = \int_0^l \left\{ EF \left( u'(x, t) + \frac{1}{2} w'^2(x, t) \right)^2 + m(\dot{u}^2(x, t) + \dot{w}^2(x, t)) + \right. \\ \left. + Dw''^2(x, t) - N(t)w'^2(x, t) + \beta_0 w^2(x, t) + 4m\theta u(x, t)\dot{u}(x, t) + \right. \\ \left. + 2m\theta \dot{w}(x, t)w(x, t) + 2\beta_2 F \theta u'^2(x, t) + \beta_1 \theta w^2(x, t) + \right. \\ \left. + \beta_2 I \theta w''^2(x, t) + \alpha \theta w^2(x, t) \right\} dx, \quad (19) \end{aligned}$$

где  $\theta$  — некоторый постоянный положительный параметр.

Проведем оценки для функционала с учетом граничных условий (7). Используя неравенство Рэля, получим

$$\begin{aligned} \int_0^l w''^2(x, t) dx \geq \lambda_1 \int_0^l w'^2(x, t) dx, \quad \int_0^l u'^2(x, t) dx \geq \eta_1 \int_0^l u^2(x, t) dx, \\ \int_0^l w'^2(x, t) dx \geq \vartheta_1 \int_0^l w^2(x, t) dx, \quad \int_0^l \dot{w}''^2(x, t) dx \geq \mu_1 \int_0^l \dot{w}^2(x, t) dx, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\lambda_1, \mu_1, \vartheta_1$  — наименьшие собственные значения краевых задач для уравнений (13) с краевыми условиями (7) на функцию  $w(x, t)$ ;  $\eta_1$  — наименьшее собственное значение краевой задачи для уравнения (14) с краевыми условиями (7) на функцию  $u(x, t)$ .

Учитывая, что первое слагаемое под знаком интеграла в функционале (19) неотрицательно и применяя первое неравенство (20), получим

$$\begin{aligned} \Phi(t) \geq \int_0^l \{ & m(\dot{u}^2(x, t) + \dot{w}^2(x, t)) + (\lambda_1(D + \beta_2 I\theta) - N(t))w'^2(x, t) + \\ & + (\beta_0 + \beta_1\theta + \alpha\theta)w^2(x, t) + 4m\theta u(x, t)\dot{u}(x, t) + \\ & + 2m\theta\dot{w}(x, t)w(x, t) + 2\beta_2 F\theta u'^2(x, t)\} dx. \end{aligned} \quad (21)$$

Пусть выполняются условия (15). Тогда, используя второе и третье неравенства (20), получим следующую оценку функционала:

$$\begin{aligned} \Phi(t) \geq \Phi_1(t) = \int_0^l \{ & m\dot{u}^2(x, t) + 4m\theta u(x, t)\dot{u}(x, t) + 2\beta_2 F\theta\eta_1 u^2(x, t) + \\ & + m\dot{w}^2(x, t) + 2m\theta w(x, t)\dot{w}(x, t) + \\ & + [\beta_0 + \beta_1\theta + \alpha\theta + \vartheta_1(\lambda_1(D + \beta_2 I\theta) - N(t))]w^2(x, t)\} dx. \end{aligned} \quad (22)$$

В итоге мы получили две квадратичные формы относительно  $u(x, t), \dot{u}(x, t)$  и  $w(x, t), \dot{w}(x, t)$  с матрицами

$$\begin{pmatrix} m & 2m\theta \\ 2m\theta & 2\beta_2 F\theta\eta_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m & m\theta \\ m\theta & \beta_0 + \beta_1\theta + \alpha\theta + \vartheta_1(\lambda_1(D + \beta_2 I\theta) - N(t)) \end{pmatrix}.$$

Согласно критерию Сильвестра квадратичные формы будут положительно определенными, если все угловые миноры положительны, т. е. выполняются условия (16). Следовательно, получено неравенство (10) леммы 1 для функций  $u(x, t), \dot{u}(x, t), w(x, t), \dot{w}(x, t)$ .

Начальное значение функционала  $\Phi(t)$  примет вид

$$\begin{aligned} \Phi(0) = \int_0^l \{ & EF\left(u'(x, 0) + \frac{1}{2}w'^2(x, 0)\right)^2 + m(\dot{u}^2(x, 0) + \dot{w}^2(x, 0)) + \\ & + (D + \beta_2 I\theta)w''^2(x, 0) - N(0)w'^2(x, 0) + (\beta_0 + \beta_1\theta + \alpha\theta)w^2(x, 0) + \\ & + 4m\theta u(x, 0)\dot{u}(x, 0) + 2m\theta w(x, 0)\dot{w}(x, 0) + 2\beta_2 F\theta u'^2(x, 0)\} dx. \end{aligned} \quad (23)$$

Следовательно, получено равенство (11) леммы 1.

Найдем производную от функционала (19) по переменной  $t$ :

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) = \int_0^l \{ & 2EF\left(u'(x, t) + \frac{1}{2}w'^2(x, t)\right)(\dot{u}'(x, t) + w'(x, t)\dot{w}'(x, t)) + \\ & + 2m\dot{u}(x, t)\ddot{u}(x, t) + 2m\dot{w}(x, t)\ddot{w}(x, t) + 2Dw''(x, t)\dot{w}''(x, t) - \\ & - \dot{N}(t)w'^2(x, t) - 2N(t)w'(x, t)\dot{w}'(x, t) + 2\beta_0 w(x, t)\dot{w}(x, t) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 4m\theta\dot{u}^2(x, t) + 4m\theta u(x, t)\ddot{u}(x, t) + 2m\theta\dot{w}^2(x, t) + \\
 & + 2m\theta w(x, t)\ddot{w}(x, t) + 4\beta_2 F\theta u'(x, t)\dot{u}'(x, t) + 2\beta_1\theta w(x, t)\dot{w}(x, t) + \\
 & + 2\beta_2 I\theta w''(x, t)\dot{w}''(x, t) + 2\alpha\theta w(x, t)\dot{w}(x, t) \Big\} dx. \quad (24)
 \end{aligned}$$

Для функций  $u(x, t)$ ,  $w(x, t)$ , удовлетворяющих системе (2), из (24) получим равенство

$$\begin{aligned}
 \dot{\Phi}(t) = & \int_0^l \left\{ 2EF \left( u'(x, t) + \frac{1}{2}w'^2(x, t) \right) \left( \dot{u}'(x, t) + w'(x, t)\dot{w}'(x, t) \right) + \right. \\
 & + 2\dot{u}(x, t) \left[ EF \left( u'(x, t) + \frac{1}{2}w'^2(x, t) \right)' + \beta_2 F \dot{u}''(x, t) \right] + \\
 & + 2\dot{w}(x, t) \left[ EF \left[ w'(x, t) \left( u'(x, t) + \frac{1}{2}w'^2(x, t) \right) \right]' - \right. \\
 & - Dw''''(x, t) - N(t)w''(x, t) - \beta_2 I \dot{w}''''(x, t) - \beta_1 \dot{w}(x, t) - \beta_0 w(x, t) - \\
 & \left. - \alpha \left( \dot{w}(x, t) + Vw'(x, t) \right) \right] + \\
 & + 2Dw''(x, t)\dot{w}''(x, t) - \dot{N}(t)w'^2(x, t) - 2N(t)w'(x, t)\dot{w}'(x, t) + \\
 & + 2\beta_0 w(x, t)\dot{w}(x, t) + 4m\theta\dot{u}^2(x, t) + \\
 & + 4\theta u(x, t) \left[ EF \left( u'(x, t) + \frac{1}{2}w'^2(x, t) \right)' + \beta_2 F \dot{u}''(x, t) \right] + 2m\theta\dot{w}^2(x, t) + \\
 & + 2\theta w(x, t) \left[ EF \left[ w'(x, t) \left( u'(x, t) + \frac{1}{2}w'^2(x, t) \right) \right]' - \right. \\
 & - Dw''''(x, t) - N(t)w''(x, t) - \beta_2 I \dot{w}''''(x, t) - \beta_1 \dot{w}(x, t) - \beta_0 w(x, t) - \\
 & \left. - \alpha \left( \dot{w}(x, t) + Vw'(x, t) \right) \right] + \\
 & + 4\beta_2 F\theta u'(x, t)\dot{u}'(x, t) + 2\beta_1\theta w(x, t)\dot{w}(x, t) + \\
 & \left. + 2\beta_2 I\theta w''(x, t)\dot{w}''(x, t) + 2\alpha\theta w(x, t)\dot{w}(x, t) \right\} dx. \quad (25)
 \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, с учетом граничных условий (7) находим

$$\begin{aligned}
 \int_0^l \dot{w}w'''' dx &= \dot{w}w'''' \Big|_0^l - \int_0^l \dot{w}'w''' dx = -\dot{w}'w'' \Big|_0^l + \int_0^l \dot{w}''w'' dx = \int_0^l \dot{w}''w'' dx, \\
 \int_0^l w\dot{w}'''' dx &= w\dot{w}'''' \Big|_0^l - \int_0^l w'w'''' dx = -w'w'' \Big|_0^l + \int_0^l w''^2 dx = \int_0^l w''^2 dx, \\
 \int_0^l \dot{w}\dot{w}'''' dx &= \int_0^l \dot{w}''^2 dx, & \int_0^l w\dot{w}'''' dx &= \int_0^l \dot{w}''w'' dx, \\
 \int_0^l \dot{u}\dot{u}'' dx &= -\int_0^l \dot{u}'^2 dx, & \int_0^l u\dot{u}'' dx &= -\int_0^l u'\dot{u}' dx, \\
 \int_0^l \dot{w}w'' dx &= -\int_0^l \dot{w}'w' dx, & \int_0^l \dot{w}\dot{w}'' dx &= -\int_0^l \dot{w}'^2 dx, & \int_0^l ww' dx &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^l u \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right)' dx &= u \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) \Big|_0^l - \int_0^l u' \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) dx = \\
 &= - \int_0^l u' \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) dx, \\
 \int_0^l \dot{u} \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right)' dx &= \dot{u} \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) \Big|_0^l - \int_0^l \dot{u}' \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) dx = \\
 &= - \int_0^l \dot{u}' \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) dx, \\
 \int_0^l w \left[ w' \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) \right]' dx &= w w' \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) \Big|_0^l - \int_0^l w'^2 \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) dx = \\
 &= - \int_0^l w'^2 \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) dx, \\
 \int_0^l \dot{w} \left[ w' \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) \right]' dx &= \dot{w} w' \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) \Big|_0^l - \int_0^l \dot{w}' w' \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) dx = \\
 &= - \int_0^l \dot{w}' w' \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) dx.
 \end{aligned}$$

Используя эти равенства, из (25) получим

$$\begin{aligned}
 \dot{\Phi}(t) &= -2 \int_0^l \left\{ \beta_2 F \dot{u}'^2(x, t) - 2m\theta \dot{u}^2(x, t) + (\beta_1 + \alpha - m\theta) \dot{w}^2(x, t) + \right. \\
 &+ \beta_2 I \dot{w}''^2(x, t) + \alpha V \dot{w}(x, t) w'(x, t) + 2\theta E F \left( u'(x, t) + \frac{1}{2} w'^2(x, t) \right)^2 + \\
 &\left. + \theta D w''^2(x, t) + \left( \frac{1}{2} \dot{N}(t) - \theta N(t) \right) w'^2(x, t) + \theta \beta_0 w^2(x, t) \right\} dx.
 \end{aligned}$$

Используя оценки (20), будем иметь

$$\begin{aligned}
 \dot{\Phi}(t) &\leq -2 \int_0^l \left\{ (\beta_2 F \eta_1 - 2m\theta) \dot{u}^2(x, t) + (\beta_2 I \mu_1 + \beta_1 + \alpha - m\theta) \dot{w}^2(x, t) + \right. \\
 &\left. + \alpha V \dot{w}(x, t) w'(x, t) + \left( \theta D \lambda_1 + \frac{1}{2} \dot{N}(t) - \theta N(t) \right) w'^2(x, t) \right\} dx. \quad (26)
 \end{aligned}$$

В итоге мы получили две квадратичные формы относительно  $\dot{u}(x, t)$  и  $\dot{w}(x, t)$ ,  $w'(x, t)$ . Вторая квадратичная форма имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} \beta_2 I \mu_1 + \beta_1 + \alpha - m\theta & \frac{1}{2} \alpha V \\ \frac{1}{2} \alpha V & \theta D \lambda_1 + \frac{1}{2} \dot{N}(t) - \theta N(t) \end{pmatrix}.$$

Квадратичные формы будут положительно полуопределенными, если все главные миноры неотрицательны, т. е. выполняются условия

$$\begin{aligned}
 \beta_2 F \eta_1 - 2m\theta \geq 0, \quad \beta_2 I \mu_1 + \beta_1 + \alpha - m\theta \geq 0, \\
 \theta D \lambda_1 + \frac{1}{2} \dot{N}(t) - \theta N(t) \geq 0
 \end{aligned} \quad (27)$$

и условие (18).

Первое условие (27) выполняется в силу первого условия (16). Так как слагаемое  $\alpha^2 V^2$  в условии (18) строго положительно, то второе и третье неравенства (27) должны быть строгими. Более того, в силу (18) достаточно строгого выполнения хотя бы одного из них. Потребуем выполнения условия (17).

Следовательно, при выполнении первого условия (16) и условий (17), (18) из (26) окончательно получим оценку

$$\dot{\Phi}(t) \leq 0. \quad (28)$$

Так как при условиях (15)–(18) функционал (19) удовлетворяет условиям леммы 1, т.е.  $\dot{\Phi}(t) \leq 0$  согласно (28),  $\Phi(t) \geq \Phi_1(t) \geq 0$  согласно (22),  $\Phi(0) \leq \Phi_2(0)$  согласно (23), то в соответствии с леммой 1 решение  $w(x, t)$ ,  $u(x, t)$  и производные  $\dot{w}(x, t)$ ,  $\dot{u}(x, t)$  устойчивы по отношению к возмущениям начальных условий.  $\square$

**3. Анализ условий устойчивости.** В условия (16)–(18) входит неизвестный параметр  $\theta > 0$ . Следовательно, применение теоремы 1 состоит в том, чтобы подобрать такое значение параметра  $\theta > 0$ , при котором одновременно выполняются все неравенства (15)–(18) в любой момент времени  $t > 0$ . Для удобства использования теоремы 1 исключим параметр  $\theta$  из системы (16)–(18):

$$\begin{cases} \beta_2 F \eta_1 - 2m\theta > 0, & \beta_2 I \mu_1 + \beta_1 + \alpha - m\theta > 0, \\ 2(\beta_2 I \mu_1 + \beta_1 + \alpha - m\theta)(2\lambda_1 \theta D + \dot{N}(t) - 2N(t)\theta) - \alpha^2 V^2 \geq 0, \\ \beta_0 + \beta_1 \theta + \alpha \theta + \vartheta_1 (\lambda_1 (D + \beta_2 I \theta) - N(t)) > m\theta^2. \end{cases} \quad (29)$$

Для этого разрешим каждое неравенство системы (29) относительно  $\theta$ :

$$\begin{cases} 2m\theta < \beta_2 F \eta_1, & m\theta < \beta_2 I \mu_1 + \beta_1 + \alpha, \\ 4m(\lambda_1 D - N(t))\theta^2 - 2[2(\beta_2 I \mu_1 + \beta_1 + \alpha)(\lambda_1 D - N(t)) - m\dot{N}(t)]\theta - \\ \quad - (2\dot{N}(t)(\beta_2 I \mu_1 + \beta_1 + \alpha) - \alpha^2 V^2) \leq 0, \\ m\theta^2 - (\beta_1 + \alpha + \vartheta_1 \lambda_1 \beta_2 I)\theta - [\beta_0 + \vartheta_1 (\lambda_1 D - N(t))] < 0. \end{cases} \quad (30)$$

Получили два линейных и два квадратных неравенства. Так как  $m > 0$ , линейные неравенства однозначно разрешаются относительно  $\theta$ :

$$\theta < \frac{\beta_2 F \eta_1}{2m}, \quad \theta < \frac{\beta_2 I \mu_1 + \beta_1 + \alpha}{m}.$$

Так как  $4m(\lambda_1 D - N(t)) > 0$  («ветви» параболы направлены вверх), для неположительности первого квадратного выражения его дискриминант должен быть положителен, т. е. должно выполняться условие

$$2(\beta_2 I \mu_1 + \beta_1 + \alpha)(\lambda_1 D - N(t)) + m\dot{N}(t) > 2\alpha V \sqrt{m(\lambda_1 D - N(t))}, \quad (31)$$

а параметр  $\theta$  должен находиться между корнями квадратного трехчлена.

Так как  $m > 0$ ,  $\beta_0 + \vartheta_1 (\lambda_1 D - N(t)) > 0$ , дискриминант второго квадратного выражения всегда положителен и больше, чем  $(\beta_1 + \alpha + \vartheta_1 \lambda_1 \beta_2 I)^2$ . Следовательно, один корень положительный, а другой отрицательный. Так как параметр  $\theta > 0$  должен находиться между корнями квадратного трехчлена, достаточно потребовать, чтобы он был меньше положительного корня.

Введем следующие обозначения:

– демпфирующие составляющие:

$$\alpha_1 = \beta_2 I \mu_1 + \beta_1 + \alpha, \quad \alpha_2 = \beta_2 I \vartheta_1 \lambda_1 + \beta_1 + \alpha; \quad (32)$$

– прочностная составляющая:

$$D_1(t) = D \lambda_1 - N(t). \quad (33)$$

С учетом введенных обозначений из (30) получим неравенства для параметра  $\theta$ :

$$\theta > 0, \quad \theta < \theta_1, \quad \theta < \theta_2, \quad \theta \geq \theta_3(t), \quad \theta \leq \theta_4(t), \quad \theta < \theta_5(t), \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\beta_2 F \eta_1}{2m}, \quad \theta_2 = \frac{\alpha_1}{m}, \\ \theta_3(t) &= \frac{2\alpha_1 D_1(t) - m\dot{N}(t) - \sqrt{(2\alpha_1 D_1(t) + m\dot{N}(t))^2 - 4m\alpha^2 V^2 D_1(t)}}{4m D_1(t)}, \\ \theta_4(t) &= \frac{2\alpha_1 D_1(t) - m\dot{N}(t) + \sqrt{(2\alpha_1 D_1(t) + m\dot{N}(t))^2 - 4m\alpha^2 V^2 D_1(t)}}{4m D_1(t)}, \\ \theta_5(t) &= \frac{\alpha_2 + \sqrt{\alpha_2^2 + 4m(\vartheta_1 D_1(t) + \beta_0)}}{2m} \end{aligned}$$

и условие

$$2\alpha_1 D_1(t) + m\dot{N}(t) > 2\alpha V \sqrt{m D_1(t)}, \quad (35)$$

откуда для  $\theta$  имеем

$$\max \left\{ 0, \sup_t \theta_3(t) \right\} < \theta < \min \left\{ \theta_1, \theta_2, \inf_t \theta_4(t), \inf_t \theta_5(t) \right\}. \quad (36)$$

Заметим, что в случае

$$\max \left\{ 0, \sup_t \theta_3(t) \right\} = \sup_t \theta_3(t), \quad \min \left\{ \theta_1, \theta_2, \inf_t \theta_4(t), \inf_t \theta_5(t) \right\} = \inf_t \theta_4(t)$$

неравенства будут нестрогими.

Исключая из (36) параметр  $\theta$  и добавляя условия (15), (31), из (34), (35) окончательно получим условия устойчивости:

$$\begin{cases} m > 0, \quad D > 0, \quad \beta_0 \geq 0, \quad \beta_1 \geq 0, \quad \beta_2 \geq 0, \quad D \lambda_1 - N(t) > 0, \\ 2\alpha_1 D_1(t) + m\dot{N}(t) > 2\alpha V \sqrt{m D_1(t)}, \\ \max \left\{ 0, \sup_t \theta_3(t) \right\} < \min \left\{ \theta_1, \theta_2, \inf_t \theta_4(t), \inf_t \theta_5(t) \right\}. \end{cases} \quad (37)$$

Таким образом, получена система неравенств (37), явно содержащая параметры механической системы, и теорему 1 можно записать в следующем виде.

**ТЕОРЕМА 2.** *Если функции  $w(x, t)$ ,  $u(x, t)$  удовлетворяют краевым условиям (7) и для любого момента времени  $t > 0$  выполняются условия (37), то решение  $w(x, t)$ ,  $u(x, t)$  системы уравнений (2) и производные  $\dot{w}(x, t)$ ,  $\dot{u}(x, t)$  устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных (8).*

**4. Оценка амплитуды деформаций.** В большинстве случаев при проектировании аэроупругих конструкций для обеспечения надежности эксплуатации и продления срока их службы необходимо знать информацию не только об устойчивости их упругих элементов, но и об амплитуде этих колебаний, которая не должна превышать предельно допустимых значений. Произведем оценку функций деформаций  $w(x, t)$ ,  $u(x, t)$  в случае устойчивости колебаний пластины в зависимости от начальных условий. Для этого введем переменный параметр  $\chi_1(t)$  и постоянный параметр  $\chi_2 \in (0, 1)$ . Тогда неравенство (21) запишем в виде

$$\begin{aligned} \Phi(t) \geq & \int_0^l \{ m(\dot{u}^2(x, t) + \dot{w}^2(x, t)) + (\lambda_1(D + \beta_2 I\theta) - N(t))\chi_1(t)w'^2(x, t) - \\ & - (\lambda_1(D + \beta_2 I\theta) - N(t))(1 - \chi_1(t))w'^2(x, t) + (\beta_0 + \beta_1\theta + \alpha\theta)w^2(x, t) + \\ & + 4m\theta u(x, t)\dot{u}(x, t) + 2m\theta\dot{w}(x, t)w(x, t) + \\ & + 2\beta_2 F\theta\chi_2 u'^2(x, t) + 2\beta_2 F\theta(1 - \chi_2)u'^2(x, t) \} dx. \quad (38) \end{aligned}$$

Пусть выполняются условия (15). Тогда, используя второе и третье неравенства (20), из (38) получим следующую оценку функционала:

$$\begin{aligned} \Phi(t) \geq & \int_0^l \{ (\lambda_1(D + \beta_2 I\theta) - N(t))\chi_1(t)w'^2(x, t) + 2\beta_2 F\theta\chi_2 u'^2(x, t) + \\ & + m\dot{u}^2(x, t) + 4m\theta u(x, t)\dot{u}(x, t) + 2\beta_2 F\theta(1 - \chi_2)\eta_1 u^2(x, t) + \\ & + m\dot{w}^2(x, t) + 2m\theta w(x, t)\dot{w}(x, t) + \\ & + [\beta_0 + \beta_1\theta + \alpha\theta + \vartheta_1(1 - \chi_1(t))(\lambda_1(D + \beta_2 I\theta) - N(t))]w^2(x, t) \} dx. \quad (39) \end{aligned}$$

Получили две квадратичные формы относительно  $u(x, t)$ ,  $\dot{u}(x, t)$  и  $w(x, t)$ ,  $\dot{w}(x, t)$  с матрицами

$$\begin{pmatrix} m & 2m\theta \\ 2m\theta & 2\beta_2 F\theta(1 - \chi_2)\eta_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} m & m\theta \\ m\theta & \beta_0 + \beta_1\theta + \alpha\theta + \vartheta_1(1 - \chi_1(t))(\lambda_1(D + \beta_2 I\theta) - N(t)) \end{pmatrix}.$$

Так как  $m > 0$ , для положительной полуопределенности квадратичных форм достаточно потребовать, чтобы определители матриц были равны нулю (условие полного квадрата). Следовательно, получим равенства

$$\beta_2 F\eta_1(1 - \chi_2) - 2m\theta = 0,$$

$$\beta_0 + \beta_1\theta + \alpha\theta + \eta_1(1 - \chi_1(t))(\lambda_1(D + \beta_2 I\theta) - N(t)) = m\theta^2.$$

Выражая отсюда параметры  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ , находим

$$\begin{aligned} \chi_1(t) &= \frac{\vartheta_1(\lambda_1(D + \beta_2 I\theta) - N(t)) - m\theta^2 + \beta_0 + \beta_1\theta + \alpha\theta}{\vartheta_1(\lambda_1(D + \beta_2 I\theta) - N(t))}, \\ \chi_2 &= \frac{\beta_2 F\eta_1 - 2m\theta}{\beta_2\eta_1}. \end{aligned} \quad (40)$$

Учитывая, что квадратичные формы положительно полуопределены, из (39) запишем:

$$\Phi(t) \geq \int_0^l \{(\lambda_1(D + \beta_2 I) - N(t))\chi_1(t)w'^2(x, t) + 2\beta_2 F\theta\chi_2 u'^2(x, t)\} dx. \quad (41)$$

Используя неравенство Коши—Буняковского, согласно краевым условиям (7) получим оценки

$$w^2(x, t) \leq l \int_0^l w'^2(x, t) dx, \quad u^2(x, t) \leq l \int_0^l u'^2(x, t) dx. \quad (42)$$

Применяя (42), из (41) имеем

$$\Phi(t) \geq \frac{1}{l}(\lambda_1(D + \beta_2 I\theta) - N(t))\chi_1(t)w^2(x, t) + \frac{2\beta_2 F\theta\chi_2}{l}u^2(x, t). \quad (43)$$

Следовательно, согласно (12), (43) получим оценку

$$\frac{1}{l}(\lambda_1(D + \beta_2 I\theta) - N(t))\chi_1(t)w^2(x, t) + \frac{2\beta_2 F\theta\chi_2}{l}u^2(x, t) \leq \Phi(0), \quad (44)$$

где  $\Phi(0)$  определено в (23),  $\chi_1(t)$ ,  $\chi_2$  определены в (40), параметр  $\theta$  принадлежит интервалу (36).

Рассматривая неравенство (44) относительно каждой составляющей деформации, окончательно получаем оценки амплитуд:

$$\begin{aligned} |w(x, t)| &\leq \inf_{\theta} \sqrt{\frac{l\Phi(0)}{(\lambda_1(D + \beta_2 I\theta) - N(t))\chi_1(t)}}, \\ |u(x, t)| &\leq \inf_{\theta} \sqrt{\frac{l\Phi(0)}{2\beta_2 F\theta\chi_2}}. \end{aligned} \quad (45)$$

**5. Пример механической системы.** Рассмотрим одностороннее обтекание пластины ( $\alpha_0 = 1$ ). Рабочая среда — воздух (плотность  $\rho_0 = 1$  кг/м<sup>3</sup>; скорость звука  $a_0 = 331$  м/с;  $\alpha = \alpha_0\rho_0 a_0 = 331$  Па · с/м). Пластина изготовлена из алюминия (модуль упругости  $E = 6.9 \cdot 10^{10}$  Па; плотность  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup>; температурный коэффициент линейного расширения  $\alpha_T = 2.22 \cdot 10^{-5}$  °C<sup>-1</sup>; коэффициент Пуассона  $\nu = 0.34$ ; коэффициент затухания  $\beta_{02} = 0.05$ ). Считаем, что слой обжатия отсутствует: коэффициент жесткости слоя обжатия  $\beta_0 = 0$  (Па/м); коэффициент затухания  $\beta_{01} = 0$  (с<sup>-1</sup>).

Возьмем следующие варьируемые параметры механической системы: толщина пластины  $h = 0.05$  м; длина пластины  $l = 1$  м, скорость потока воздуха  $V = 600$  м/с.

Следовательно, погонная масса пластины  $m = h\rho = 135$  кг/м<sup>2</sup>;  $F = h/(1 - \nu) = 7.58 \cdot 10^{-2}$  м; момент инерции  $I = h^3/(12(1 - \nu^2)) = 1.18 \cdot 10^{-5}$  м<sup>3</sup>; изгибная жесткость пластины  $D = EI = 8.13 \cdot 10^5$  Н·м; коэффициент внутреннего демпфирования  $\beta_2 = 2\beta_{02}\sqrt{Emh} = 6.82 \cdot 10^4$  Па·с; коэффициент внешнего демпфирования  $\beta_1 = 0$  (Па·с), так как  $\beta_{01} = 0$ .

Пусть температура изменяется по гармоническому закону:

$$T(z, t) = -(10 + \sin 10t) \text{ (}^\circ\text{C)}.$$

Тогда, согласно (1), получим

$$\begin{aligned} T_0(t) &= -Eh\alpha_T(10 + \sin 10t) = -7.66 \cdot 10^4 \cdot (10 + \sin 10t), \\ N_T(t) &= -1.16 \cdot 10^5 \cdot (10 + \sin 10t). \end{aligned}$$

Пусть при закреплении пластина растянута на 0.5%, тогда постоянная составляющая усилия, созданная при закреплении пластины,

$$N_0 = -EF \cdot 0.005 = -2.61 \cdot 10^7 \text{ (Па} \cdot \text{м)}.$$

Найдем продольное усилие  $N(t)$ :

$$N(t) = N_0 + N_T(t) = -2.73 \cdot 10^7 - 1.16 \cdot 10^5 \cdot \sin 10t \text{ (Па} \cdot \text{м)}$$

и его производную:

$$\dot{N}(t) = -1.16 \cdot 10^6 \cdot \cos 10t \text{ (Па} \cdot \text{м/с)},$$

которые принимают значения из множеств  $E(N) = [2.718 \cdot 10^7; 2.742 \cdot 10^7]$ ,  $E(\dot{N}) = [-1.16 \cdot 10^6; 1.16 \cdot 10^6]$ .

Наименьшие собственные значения краевых задач для уравнений (13) с краевыми условиями (7) на функцию  $w(x, t)$ , согласно [17], следующие:

$$\lambda_1 = \vartheta_1 = \pi^2/l^2 = \pi^2, \quad \mu_1 = \pi^4/l^4 = \pi^4;$$

наименьшее собственное значение краевой задачи для уравнения (14) с краевыми условиями (7) на функцию  $u(x, t)$ , согласно [17], такое:

$$\eta_1 = \pi^2/l^2 = \pi^2.$$

Подставим все параметры в (34), (35). Согласно (32), (33), рассчитаем демпфирующие и прочностные составляющие:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_2 I \mu_1 + \beta_1 + \alpha = 409.3, \quad \alpha_2 = \beta_2 I \vartheta_1 \lambda_1 + \beta_1 + \alpha = 409.3, \\ D_1(t) &= D \lambda_1 - N(t) = 3.53 \cdot 10^7 + 1.16 \cdot 10^5 \cdot \sin 10t. \end{aligned}$$

Очевидно, что  $D_1(t) > 0$  для любого момента времени  $t$ . Заметим также, что в отличие от случая дозвукового обтекания пластин [18–20], основное демпфирование идет от потока, а не за счет внутреннего трения.

С помощью системы **Mathcad** были рассчитаны коэффициенты системы неравенств (34), (35):

$$\begin{aligned} \theta < \theta_1 = \frac{\beta_2 F \eta_1}{2m} = 188.99, \quad \theta < \theta_2 = \frac{\alpha_1}{m} = 3.03, \\ \theta \geq \theta_3(t) \geq 1.07, \quad \theta \leq \theta_4(t) \leq 1.98, \quad \theta < \theta_5(t) \leq 1605.74; \\ 2\alpha_1 D_1(t) + m\dot{N}(t) - 2\alpha V \sqrt{mD_1(t)} \geq 1.32 \cdot 10^9 > 0. \end{aligned}$$

Параметр  $\theta \in (1,07; 1,98)$ , значит, неравенство (36) выполняется. Следовательно, согласно теореме 2, решение  $w(x, t)$ ,  $u(x, t)$  системы уравнений (2) и производные  $\dot{w}(x, t)$ ,  $\dot{u}(x, t)$  устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных (8).

Пусть начальные условия (8) имеют вид:

$$\begin{aligned} f_1(x) = 5 \cdot 10^{-6} \cdot \sin(2\pi x/l), \quad f_2(x) = -1 \cdot 10^{-5} \cdot \sin(2\pi x/l), \\ f_3(x) = 1 \cdot 10^{-7} \cdot \sin(2\pi x/l), \quad f_4(x) = -5 \cdot 10^{-8} \cdot \sin(2\pi x/l); \end{aligned}$$

они согласуются с краевыми условиями (7). Применяя (45), произведем оценку амплитуды деформаций:

$$|w(x, t)| \leq 2.93 \cdot 10^{-5}, \quad |u(x, t)| \leq 4.45 \cdot 10^{-3}.$$

**Заключение.** На основе предложенной математической модели продольно-поперечных колебаний упругого элемента конструкции в виде пластины-полосы при обтекании ее сверхзвуковым потоком идеального газа проведено исследование динамической устойчивости этого элемента. Модель описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений с частными производными для неизвестных функций деформации элемента. С помощью построенного функционала получены достаточные условия устойчивости решений этой системы уравнений. Полученные условия устойчивости накладывают ограничения на погонную массу и изгибную жесткость элемента, сжимающее (растягивающее) элемент усилие, скорость невозмущенного однородного потока, а также на коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования, коэффициент жесткости слоя обжатия. Эти условия явно содержат основные параметры механической системы, и в таком виде они наиболее приспособлены для решения задач оптимизации, автоматического управления, автоматизированного проектирования.

**Конкурирующие интересы.** Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

**Авторский вклад и ответственность.** Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

**Финансирование.** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 15-01-08599\_а, № 15-41-02455\_р-поволжье-а).

## Библиографический список

1. Алгазин С. Д., Кийко И. А. *Флаттер пластин и оболочек*. М.: Наука, 2006. 247 с.
2. Vedenev V. V. Effect of damping on flutter of simply supported and clamped panels at low supersonic speeds // *J. Fluids Struct.*, 2013. vol. 40. pp. 366–372. doi: [10.1016/j.jfluidstructs.2013.04.004](https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2013.04.004).
3. Гувернюк С. В., Зубков А. Ф., Симоненко М. М. Экспериментальное исследование сверхзвукового обтекания осесимметричной кольцевой каверны // *Инженерно-физический журнал*, 2016. Т. 89, № 3. С. 670–679.
4. Gounko Y. P. Patterns of steady axisymmetric supersonic compression flows with a Mach disk // *Shock Waves*, 2017. vol. 27, no. 3. pp. 495–506. doi: [10.1007/s00193-016-0700-x](https://doi.org/10.1007/s00193-016-0700-x).
5. Кийко И. А., Показеев В. В. К постановке задачи о колебаниях и устойчивости полосы в сверхзвуковом потоке газа // *Изв. РАН. МЖГ*, 2009. № 1. С. 159–166.
6. Ryakhovskiy A. I., Schmidt A. A. MHD supersonic flow control: OpenFOAM simulation // *Proc. ISP RAS*, 2016. vol. 28, no. 1. pp. 197–206. doi: [10.15514/ISPRAS-2016-28\(1\)-11](https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2016-28(1)-11).
7. Aulisa E., Ibragimov A., Kaya-Cekin E. Y. Fluid structure interaction problem with changing thickness beam and slightly compressible fluid // *Discrete & Continuous Dynamical Systems-S*, 2014. vol. 7, no. 6. pp. 1133–1148. doi: [10.3934/dcdss.2014.7.1133](https://doi.org/10.3934/dcdss.2014.7.1133).
8. Baghdasaryan G. Y., Mikilyan M. A., Saghoyan R. O. Influence of supersonic gas flow on the amplitude of non-linear oscillations of rectangular plates // *Mechanics-Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia*, 2016. vol. 69, no. 4. pp. 20–40, Retrieved from <http://mechanics.asj-oa.am/2168/> on 12 March 2018.
9. Brehm C., Housman J. A., Kiris C. C. Noise generation mechanisms for a supersonic jet impinging on an inclined plate // *J. Fluid Mech.*, 2016. vol. 797. pp. 802–850. doi: [10.1017/jfm.2016.244](https://doi.org/10.1017/jfm.2016.244).
10. Filippi A. A., Skews B. W. Supersonic flow fields resulting from axisymmetric internal surface curvature // *J. Fluid Mech.*, 2017. no. 831. pp. 271–288. doi: [10.1017/jfm.2017.643](https://doi.org/10.1017/jfm.2017.643).
11. Kounadis A. N. Flutter instability and other singularity phenomena in symmetric systems via combination of mass distribution and weak damping // *Internat. J. Nonlinear. Mech.*, 2007. vol. 42, no. 1. pp. 24–35. doi: [10.1016/j.ijnonlinmec.2006.11.009](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2006.11.009).
12. Willems S., Gülhan A. and Esser B. Shock induced fluid-structure interaction on a flexible wall in supersonic turbulent flow // *Progress in Flight Physics*, 2013. no. 5. pp. 285–308. doi: [10.1051/eucass/201305285](https://doi.org/10.1051/eucass/201305285).
13. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Исследование динамики и устойчивости упругого элемента конструкции при сверхзвуковом обтекании // *Вестник Саратовского государственного технического университета*, 2011. № 3(57). Вып. 1. С. 59–67.
14. Вельмисов П. А., Судаков В. А., Анкилов А. В. Об устойчивости решений начально-краевой задачи о динамике защитного экрана при взаимодействии со сверхзвуковым потоком газа // *Вестник Ульяновского государственного технического университета*, 2013. № 3. С. 45–52.
15. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Исследование устойчивости вязкоупругого элемента конструкции при сверхзвуковом обтекании // *Журнал Средневолжского математического общества*, 2016. Т. 18, № 3. С. 80–90.
16. Коллатц Л. *Задачи на собственные значения*. М.: Наука, 1968. 504 с.
17. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. *Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии*. Ульяновск: УлГТУ, 2009. 220 с.
18. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. *Функционалы Ляпунова в некоторых задачах динамической устойчивости аэроупругих конструкций*. Ульяновск: УлГТУ, 2015. 146 с.
19. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Казакова Ю. А. Устойчивость решений одной нелинейной начально-краевой задачи аэроупругости // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.*, 2013. № 2(31). С. 120–126. doi: [10.14498/vsgtu1180](https://doi.org/10.14498/vsgtu1180).
20. Ankilov A. V., Vel'misov P. A. Stability of solutions to an aerohydroelasticity problem // *J. Math. Sci.*, 2016. vol. 219, no. 1. pp. 14–26. doi: [10.1007/s10958-016-3079-4](https://doi.org/10.1007/s10958-016-3079-4).

MSC: 74F10

## Dynamic stability of deformable elements of designs at supersonic mode of flow

*P. A. Velmisov, A. V. Ankilov*Ulyanovsk State Technical University,  
32, Severny Venets st., Ulyanovsk, 432027, Russian Federation.

### Abstract

The stability of deformable element of a construction in the form of a plate-strip with its flowing by supersonic flow of ideal gas is investigated. Adopted in paper definitions of stability are consistent with the concept of stability of dynamical systems by Lyapunov. For the description of dynamics of an elastic body the nonlinear mathematical model taking into account transverse and longitudinal deformations of the elastic plate is used. The model describes the associated system of partial differential equations for two unknown functions of deformations. Aerodynamic pressure upon a plate is defined according to Ilyushin's "piston" theory. On the base of the built functional for the case of hinged motionless fixing the ends of the plate the sufficient conditions of stability of the solution of the system of equations describing the length-cross oscillations of the plate are obtained. The estimation of the amplitude of deformations depending on initial conditions is made. On a specific example of one mechanical system the using of the proved theorems and estimates is shown.

**Keywords:** aerohydroelasticity, mathematical modeling, dynamic stability, elastic plate, supersonic flow of gas, system of the partial differential equations, functional.

Received: 12<sup>th</sup> December, 2017 / Revised: 17<sup>th</sup> February, 2018 /Accepted: 12<sup>th</sup> March, 2018 / First online: 28<sup>th</sup> March, 2018

---

**Competing interests.** We declare that we have no conflicts of interests with the authorship and publication of this article.

### Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

#### Please cite this article in press as:

Velmisov P. A., Ankilov A. V. Dynamic stability of deformable elements of designs at supersonic mode of flow, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 1, pp. 96–115. doi: [10.14498/vsgtu1588](https://doi.org/10.14498/vsgtu1588) (In Russian).

#### Authors' Details:

*Petr A. Velmisov*  <http://orcid.org/0000-0001-7825-7015>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Department; Dept. of Higher Mathematics; e-mail: [velmisov@ulstu.ru](mailto:velmisov@ulstu.ru)

*Andrey V. Ankilov*  <http://orcid.org/0000-0002-5946-8535>

Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Associate Professor; Dept. of Higher Mathematics; e-mail: [ankil@ulstu.ru](mailto:ankil@ulstu.ru)

**Authors' contributions and responsibilities.** Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

**Funding.** This work was financially supported by the Russian Foundation for Basic Research (15-01-08599\_a and 15-41-02455\_r-povolzh'e-a).

## References

1. Algazin S. D., Kiiko I. A. *Flatter plastin i obolochek* [Flutter of plates and shells]. Moscow, Nauka, 2006, 247 pp. (In Russian)
2. Vedenev V. V. Effect of damping on flutter of simply supported and clamped panels at low supersonic speeds, *J. Fluids Structs.*, 2013, vol. 40, pp. 366–372. doi: [10.1016/j.jfluidstructs.2013.04.004](https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2013.04.004).
3. Guvernyuk S. V., Zubkov A. F., Simonenko M. M. Experimental Investigation of the Supersonic Flow over an Axisymmetric Ring Cavity, *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 2016, vol. 89, no. 3, pp. 678–687. doi: [10.1007/s10891-016-1426-4](https://doi.org/10.1007/s10891-016-1426-4).
4. Gounko Y. P. Patterns of steady axisymmetric supersonic compression flows with a Mach disk, *Shock Waves*, 2017, vol. 27, no. 3, pp. 495–506. doi: [10.1007/s00193-016-0700-x](https://doi.org/10.1007/s00193-016-0700-x).
5. Kiiko I. A., Pokazeev V. V. On the formulation of the problem of strip oscillations and stability in supersonic gas flow, *Fluid Dyn.*, 2009, vol. 44, no. 1, pp. 135–140. doi: [10.1134/S0015462809010141](https://doi.org/10.1134/S0015462809010141).
6. Ryakhovskiy A. I., Schmidt A. A. MHD supersonic flow control: OpenFOAM simulation, *Proc. ISP RAS*, 2016, vol. 28, no. 1, pp. 197–206. doi: [10.15514/ISPRAS-2016-28\(1\)-11](https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2016-28(1)-11).
7. Aulisa E., Ibragimov A., Kaya-Cekin E. Y. Fluid structure interaction problem with changing thickness beam and slightly compressible fluid, *Discrete & Continuous Dynamical Systems-S*, 2014, vol. 7, no. 6, pp. 1133–1148. doi: [10.3934/dcdss.2014.7.1133](https://doi.org/10.3934/dcdss.2014.7.1133).
8. Baghdasaryan G. Y., Mikilyan M. A., Saghoyan R. O. Influence of supersonic gas flow on the amplitude of non-linear oscillations of rectangular plates, *Mechanics–Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia*, 2016, vol. 69, no. 4, pp. 20–40, Retrieved from <http://mechanics.asj-oa.am/2168/> on 12 March 2018.
9. Brehm C., Housman J. A., Kiris C. C. Noise generation mechanisms for a supersonic jet impinging on an inclined plate, *J. Fluid Mech.*, 2016, vol. 797, pp. 802–850. doi: [10.1017/jfm.2016.244](https://doi.org/10.1017/jfm.2016.244).
10. Filippi A. A., Skews B. W. Supersonic flow fields resulting from axisymmetric internal surface curvature, *J. Fluid Mech.*, 2017, no. 831, pp. 271–288. doi: [10.1017/jfm.2017.643](https://doi.org/10.1017/jfm.2017.643).
11. Kounadis A. N. Flutter instability and other singularity phenomena in symmetric systems via combination of mass distribution and weak damping, *Internat. J. Nonlinear. Mech.*, 2007, vol. 42, no. 1, pp. 24–35. doi: [10.1016/j.ijnonlinmec.2006.11.009](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2006.11.009).
12. Willems S., Gülhan A. and Esser B. Shock induced fluid-structure interaction on a flexible wall in supersonic turbulent flow, *Progress in Flight Physics*, 2013, no. 5, pp. 285–308. doi: [10.1051/eucass/201305285](https://doi.org/10.1051/eucass/201305285).
13. Ankilov A. V., Velmisov P. A. Investigation of dynamic and stability of elastic element of construction in supersonic flow, *Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2011, no. 3(57), Issue 1, pp. 59–67 (In Russian).
14. Velmisov P. A., Sudakov V. A., Ankilov A. V. On the solution stability of initial value problem concerning evolution of a protective shield interacting with supersonic gas flow, *Vestnik Ulyanovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2013, no. 3, pp. 45–52 (In Russian).
15. Ankilov A. V., Velmisov P. A. Investigation of stability of viscoelastic element of construction in supersonic flow, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 2016, vol. 18, no. 3, pp. 80–90 (In Russian).

16. Kollatz L. *Zadachi na sobstvennye znachenia* [Problems on eigenvalues]. Moscow, Nauka, 1968, 504 pp. (In Russian)
17. Ankilov A. V., Vel'misov P. A. *Dinamika i ustoychivost' uprugikh plastin pri aerogidrodinamicheskom vozdeistvii* [Dynamics and stability of elastic plates at aerohydrodynamical influence]. Ulyanovsk, Ulyanovsk State Technical Univ., 2009, 220 pp. (In Russian)
18. Ankilov A. V., Vel'misov P. A. *Funktsionaly Liapunova v nekotorykh zadachakh dinamicheskoi ustoychivosti aerouprugikh konstruksii* [Lyapunov functionals in some problems of dynamic stability of aeroelastic structures]. Ulyanovsk, Ulyanovsk State Technical Univ., 2015, 146 pp. (In Russian)
19. Ankilov A. V., Vel'misov P. A. Stability of solution of one nonlinear initial-boundary problem of aeroelasticity, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2013, no.2(31), pp. 120–126 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu1180](https://doi.org/10.14498/vsgtu1180).
20. Ankilov A. V., Vel'misov P. A. Stability of solutions to an aerohydroelasticity problem, *J. Math. Sci.*, 2016, vol. 219, no. 1, pp. 14–26. doi: [10.1007/s10958-016-3079-4](https://doi.org/10.1007/s10958-016-3079-4).