Е. И. Понькин, Построение автомодельного решения системы уравнений газовой динамики, описывающей истечение политропного газа в вакуум с косой стенки в несогласованном случае, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023, номер 2, 336–356

DOI: 10.14498/vsgtu1999

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 27, № 2. С. 336–356
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1999
EDN: EYOBZI

УДК 517.958:531.332

Построение автомодельного решения системы уравнений газовой динамики, описывающей истечение политропного газа в вакуум с косой стенки в несогласованном случае

Е. И. Понькин

Снежинский физико-технический институт НИЯУ МИФИ,
Россия, 456776, Снежинск, ул. Комсомольская, 8.

Аннотация

Рассматривается начально-краевая задача для системы уравнений газовой динамики в постановке характеристической задачи Коши стандартного вида, описывающая при $t > 0$ разлет политропного газа в вакуум на косой стенке в пространстве физических автомодельных переменных $\xi = x/t$, $\eta = y/t$, а при $t < 0$ — сильное сжатие газа в призматическом объеме.

Решение начально-краевой задачи строится в виде рядов функций $c(\xi, \vartheta)$, $u(\xi, \vartheta)$ и $v(\xi, \vartheta)$ по степеням ϑ, где ϑ — известная функция независимых переменных. Нахождение неизвестных коэффициентов $c_1(\xi)$, $u_1(\xi)$ и $v_1(\xi)$ рядов функций $c(\xi, \vartheta)$, $u(\xi, \vartheta)$ и $v(\xi, \vartheta)$ сводится к решению транспортного уравнения для коэффициента $c_1(\xi)$.

В настоящей работе построено аналитическое решение транспортного уравнения для коэффициента $c_1(\xi)$ решения системы уравнений газовой динамики, описывающего изэнтропическое истечение политропного газа с косой стенки, в общем несогласованном случае, когда $\operatorname{tg}^2 \alpha \neq (\gamma + 1)/(3 - \gamma)$. Когда $\gamma = 5/3$ — случай водорода, для коэффициента $c_1(\xi)$ впервые построено аналитическое решение транспортного уравнения в явном виде.

Полученное решение применено к описанию сжатия специального призматического объема, представляющего собой в сечении правильный треугольник. Указана особенность полученного решения $c_1(\xi)$: значение $c_1 \to \infty$ при $\xi \to \xi_*$, где значение ξ_* задается уравнением $c_0(\xi_*) = 3.9564$. Сделан вывод, что на звуковой характеристике, через которую стыкуются течения вида центрированная и двойная волна, в точке с координатами $\xi = \xi_*$ и $\vartheta = 0$ наступает градиентная катастрофа, что приводит

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

Образец для цитирования
Понькин Е. И. Построение автомодельного решения системы уравнений газовой динамики, описывающей истечение политропного газа в вакуум с косой стенки в несогласованном случае // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 2. С. 336–356. EDN: EYOBZI. DOI: 10.14498/vsgtu1999.

Сведения об авторе
Евгений Игоревич Понькин https://orcid.org/0000-0002-7848-3167
аспирант; e-mail: epnk@rambler.ru

к возникновению в безударном течении сильного разрыва и формированию ударной волны.

Ключевые слова: характеристическая задача Коши стандартного вида, аналог теоремы Ковалевской, косая стенка, транспортное уравнение.

Получение: 9 февраля 2023 г. / Исправление: 18 мая 2023 г. /
Принятие: 25 мая 2023 г. / Публикация онлайн: 26 июня 2023 г.

Введение. Рассмотрим политропный газ, покоящийся в клиновидной области BOF плоскости xOy (выделено серым цветом и отмечено цифрой *0* на рис. 1, *a*), образованной двумя непроницаемыми стенками OB и OF. Полубесконечная вертикальная стенка OB задается уравнением $x = 0$ (при $y \geqslant 0$). Бесконечная косая стенка OF задается уравнением $y = x \operatorname{tg} \alpha$. Линия BF не является непроницаемой стенкой, поэтому на ней никакие условия на газ не накладываются. Часть плоскости xOy слева от вертикальной стенки OB и выше косой стенки OF — вакуум (отмечено цифрой *3* на рис. 1, *a*).

Газодинамические параметры в покоящемся газе (значения функций $c(t, x, y)$, $u(t, x, y)$ и $v(t, x, y)$) следующие:

$$c = 1, \quad u = 0, \quad v = 0.$$

В момент времени $t = 0$ вертикальная стенка OB убирается, после чего начинается истечение газа в вакуум вдоль косой стенки OF.

На рис. 1, *b* приведена конфигурация течения газа в момент времени $t > 0$. В области ABF находится покоящийся однородный газ, который отделен звуковой характеристикой AB от области центрированной волны Римана — $ABCD$, помеченной на рис. 1, *b* цифрой *1*. Звуковая характеристика AB является вертикальной прямой, уравнение которой в координатах t, x, y имеет следующий вид [1, 2]:

$$x = t.$$

Звуковая характеристика AB двигается по покоящемуся газу слева направо со скоростью, равной 1. Центрированная волна примыкает к вакууму через свободную границу, являющуюся вертикальной прямой CD. Движение границы CD в вакуум описывается по закону [1, 2]

$$x = -\frac{2t}{\gamma - 1}.$$

Скорость движения границы CD равна $-2/(\gamma - 1)$. Значения газодинамических параметров течения в области центрированной волны задаются следующими формулами [1, 2]:

$$c = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\frac{x}{t} + \frac{2}{\gamma + 1}, \quad u = \frac{2}{(\gamma + 1)}\frac{x}{t} - \frac{2}{(\gamma + 1)}, \quad v = 0.$$

В области ADE, помеченной на рис. 1, *b* цифрой *2*, находится двойная волна — искомое двумерное течение. Это течение отделено от центрированной волны звуковой характеристикой C^+ — линия AD. Область двойной волны примыкает к вакууму через свободную границу — линия DE. Стенка AE

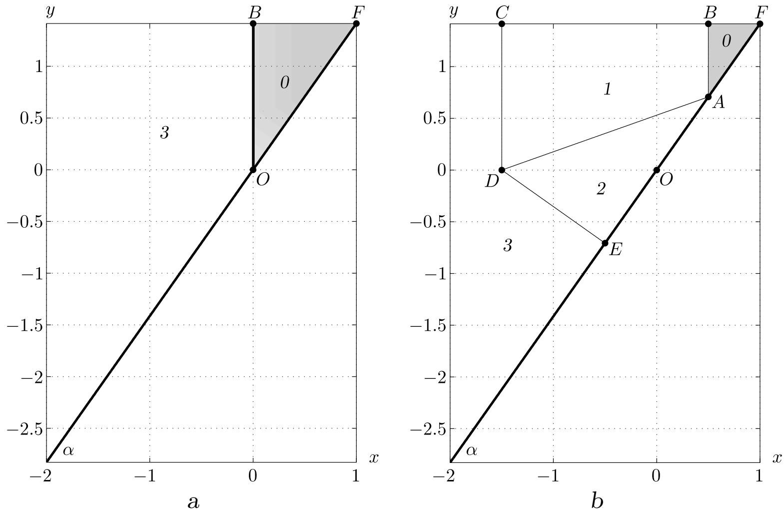

Рис. 1. Начальная конфигурация в момент $t = 0$ (a) и конфигурация потока в момент $t > 0$ (b): *0* — область, в которой находится покоящийся газ; *1* — область течения в виде центрированной волны; *2* — область течения в виде двойной волны; *3* — область вакуума

[Figure 1. (a) Initial configuration ($t = 0$); (b) the flow configuration at $t > 0$: *0* — the quiescent gas region; *1* — the flow region in the form of a centered wave; *2* — the flow region in the form of a double wave; *3* — the vacuum region]

является непроницаемой, поэтому на этой стенке выполняется условие непротекания:

$$v\big|_{AE} = u \operatorname{tg} \alpha\big|_{AE}.$$

Закон движения газа в области двойной волны неизвестен, требуется найти параметры течения газа в области двойной волны как решение следующей начально-краевой задачи:

$$\begin{cases} c_t + uc_x + vc_y + \varkappa c(u_x + v_y) = 0, \\ u_t + uu_x + vu_y + \dfrac{c}{\varkappa} c_x = 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + \dfrac{c}{\varkappa} c_y = 0, \\ c\big|_{C^+} = c_0, \quad u\big|_{C^+} = u_0, \quad v\big|_{C^+} = 0, \\ v\big|_{y = x \operatorname{tg}\alpha} = u \operatorname{tg}\alpha\big|_{y = x \operatorname{tg}\alpha}, \end{cases} \tag{1}$$

где c — скорость звука в газе, отн.ед.; u — горизонтальная компонента скорости газа, отн.ед.; v — вертикальная компонента скорости газа, отн.ед; $\varkappa = (\gamma - 1)/2$; γ — показатель политропы газа, отн.ед. Значения c_0 и u_0 — параметры газа на характеристике C^+:

$$c_0 = \frac{\varkappa}{\varkappa + 1} \frac{x}{t} + \frac{1}{\varkappa + 1}, \quad u_0 = \frac{1}{\varkappa + 1} \frac{x}{t} - \frac{1}{\varkappa + 1},$$

соответствующие параметрам газа в плоском течении.

Традиционно для этой и аналогичных задач с целью уменьшения объема выкладок искомое двумерное течение строится как решение уравнения для функции $\Phi(t, x_1, x_2)$ — потенциала скорости газа в двумерном случае [1,2]. То есть, чтобы описать разлет газа в вакуум, в качестве независимых переменных выбираются

$$t, \quad u_1 = \Phi_{x_1}, \quad u_2 = \Phi_{x_2} \tag{2}$$

и в результате замены (2) первые три уравнения системы (1) сводятся к одному уравнению:

$$\Phi_{tt} + 2\sum_{i=1}^{2}\Big[\Phi_{x_i}\Phi_{x_it} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(1-\delta_{ik})\Phi_{x_i}\Phi_{x_k}\Phi_{x_ix_k} - \frac{1}{2}(c^2 - \Phi_{x_i}^2)\Phi_{x_ix_i}\Big] = 0, \tag{3}$$

где

$$c^2 = (\gamma - 1)\Big[M - \Phi_t - \frac{1}{2}(\Phi_{x_1}^2 + \Phi_{x_2}^2)\Big], \quad M = \mathrm{const}.$$

Далее с помощью преобразования Лежандра

$$\Psi(t, u_1, u_2) = x_1u_1 + x_2u_2 - \Phi(t, x_1, x_2) + Mt \tag{4}$$

делается переход к новой неизвестной функции $\Psi(t, u_1, u_2)$. Уравнение для $\Psi(t, u_1, u_2)$ строится из (3) с учетом (4) и введенных обозначений $u = u_1$, $v = u_2$:

$$\begin{aligned}\Psi_{tt}(\Psi_{uu}\Psi_{vv} - \Psi_{uv}^2) + [c^2 - (\Psi_{ut} - u)^2]\Psi_{vv} +\\ + 2(\Psi_{ut} - u)(\Psi_{vt} - v)\Psi_{uv} + [c^2 - (\Psi_{vt} - v)^2]\Psi_{uu} = 0,\end{aligned} \tag{5}$$

где $c^2 = 2\varkappa\big(\Psi_t - (u^2 + v^2)/2\big)$.

Начальное и граничное условия задачи (1), записанные для функции $\Psi(t, u, v)$, имеют вид

$$\Psi(t, u, 0) = t\Big\{\frac{u^2}{2} + \frac{\varkappa}{2}\Big[c_0 + \frac{u}{\varkappa}\Big]^2\Big\} \tag{6}$$

и

$$\Psi_v(t, u, u\operatorname{tg}\alpha) = \Psi_u(t, u, u\operatorname{tg}\alpha)\operatorname{tg}\alpha, \tag{7}$$

где $c_0 = \mathrm{const} > 0$.

Решение задачи (5)–(7) строится в пространстве годографа u, v в виде ряда по степеням v. Для нахождения значений газодинамических параметров c, u, v в пространстве физических переменных t, x, y необходимо выполнять обратное преобразование Лежандра (4), а затем обратную замену (2).

В работе [3] получено частное точное решение задачи (5)–(7), описывающее двумерное течение газа при выполнении конкретного соотношения между показателем политропы γ газа и тангенсом угла α наклона косой стенки:

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\gamma + 1}{3 - \gamma}. \tag{8}$$

Здесь и далее случай выполнения равенства (8) будем называть случаем согласованного течения, и наоборот, когда соотношение (8) не выполняется, тогда рассматриваемый случай двумерного течения будет несогласованным.

Решение (5)–(7) в согласованном случае (8) в координатах u, v имеет следующий вид [3]:

$$c(u,v) = 1 + \varkappa u + \varkappa\sqrt{\beta} v, \tag{9}$$

где $\beta = (\varkappa + 1)/(1 - \varkappa)$. Видно, что решение (9) линейно относительно независимой переменной v, то есть коэффициенты $c_i(u) = \partial^i c/\partial v^i\big|_{v=0}$ ряда

$$c(u,v) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(u)\frac{v^i}{i!}$$

при $i \geqslant 2$ равны 0.

С. П. Баутиным и С. Л. Дерябиным [2, с. 196–214] в пространстве специальных независимых переменных (решение строилось для функции Ψ в пространстве годографа) рассмотрена задача об истечении газа в вакуум при произвольном значении угла α: $0 < \alpha < \pi/2$ — наклона косой стенки, не связанным со значением γ (несогласованный случай). Доказано существование и единственность локально-аналитических решений соответствующих начально-краевых задач, построено решение (5)–(7) для функции $\Psi(t,u,v)$ в виде ряда по степеням v. Значения коэффициентов ряда для функции $\Psi(t,u,v)$ в явном виде не были найдены, значения газодинамических параметров c, u, v течения газа в пространстве физических переменных t, x, y не построены.

В цикле работ [4–6] автора настоящей статьи решение исходной системы уравнений газовой динамики (СУГД) рассматриваемой начально-краевой задачи (1) строится для компонент вектора $\mathbf{U} = (c,u,v)^\top$ в виде бесконечного ряда по степеням ϑ, где ϑ — известная функция независимых физических автомодельных переменных $\xi = x/t$, $\eta = y/t$. В работе [4] построено транспортное уравнение для коэффициента $c_1(\xi)$ и найдено решение СУГД в согласованном случае. В работе [5] решение В. А. Сучкова применено к описанию двух способов газодинамического воздействия на специальный призматический объем. В работе [6] исходная начально-краевая задача (1) в результате двух невырожденных замен сводится к характеристической задаче Коши стандартного вида. Для этой новой начально-краевой задачи доказана теорема существования и единственности решения СУГД в виде сходящихся бесконечных рядов. Описан алгоритм построения коэффициентов ряда.

В настоящей работе впервые построено аналитическое решение транспортного уравнения для коэффициента $c_1(\xi)$ решения СУГД, описывающего изэнтропическое истечение политропного газа с косой стенки в общем несогласованном случае в пространстве физических автомодельных переменных $\xi = x/t$, $\eta = y/t$. Для газа с показателем политропы $\gamma = 5/3$ (водород) решение транспортного уравнения для коэффициента $c_1(\xi)$ также впервые построено в явном виде. Построенное решение начально-краевой задачи применено к описанию сильного сжатия газа в объеме с непроницаемыми стенками, представляющего собой в поперечном сечении правильный треугольник ($\alpha = \pi/3$).

1. Начально-краевая задача Коши стандартного вида для описания истечения газа в вакуум на косой стенке. В результате невырожденной замены $\xi = x/t$, $\eta = y/t$ исходная начально-краевая задача (1) для СУГД, решение которой при $t > 0$ описывает разлет политропного газа в вакуум на косой стенке, записывается в векторно-матричном виде (см. работу [4]) для вектора $\mathbf{U} = (u_1, u_2, u_3)^\top = (c, u, v)^\top$:

$$\begin{cases} A\mathbf{U}_\xi + B\mathbf{U}_\eta = \mathbf{0}, \\ \mathbf{U}\big|_{C^+} = \mathbf{U}_0, \\ u_3\big|_{\eta=\xi\operatorname{tg}\alpha} = u_2 \operatorname{tg}\alpha\big|_{\eta=\xi\operatorname{tg}\alpha}. \end{cases} \tag{10}$$

Начальное условие задачи (10) задается значением вектора $\mathbf{U}$ на характеристике C^+ — $\mathbf{U}_0 = (c_0, u_0, 0)^\top$. Звуковая характеристика C^+ задается уравнением $\eta = f(\xi)$, где $f(\xi)$ — неизвестная функция независимой переменной ξ. Краевое условие (граничное условие) задачи (10) задается в виде условия непротекания газа на косой стенке, определяемой уравнением $\eta = \xi \operatorname{tg}\alpha$.

Матрицы A и B задачи (10) следующие:

$$A = \begin{pmatrix} u-\xi & \varkappa c & 0 \\ c/\varkappa & u-\xi & 0 \\ 0 & 0 & u-\xi \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} v-\eta & 0 & \varkappa c \\ 0 & v-\eta & 0 \\ c/\varkappa & 0 & v-\eta \end{pmatrix}.$$

Начально-краевые условия, коэффициенты матриц A и B задачи (10) предполагаются аналитическими функциями.

Для приведения задачи (10) к характеристической задаче Коши стандартного вида сделаем замену переменных

$$\vartheta = \eta - f(\xi), \quad \xi' = \xi, \tag{11}$$

где линия $\vartheta = 0$ задает звуковую характеристику C^+. Якобиан J замены (11) следующий:

$$J = \begin{vmatrix} \vartheta_\eta & \vartheta_\xi \\ \xi'_\eta & \xi'_\xi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -f' \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 \cdot f' = 1,$$

т.е. при выполнении условия $|f'| < \infty$ замена (11) невырожденная.

В результате замены (11) задача (10) преобразуется к виду

$$\begin{cases} [B - f'(\xi)A]\mathbf{U}_\vartheta + A\mathbf{U}_\xi = \mathbf{0}, \\ \mathbf{U}\big|_{\vartheta=0} = \mathbf{U}_0, \\ u_3\big|_{\vartheta=\xi\operatorname{tg}\alpha - f(\xi)} = u_2 \operatorname{tg}\alpha\big|_{\vartheta=\xi\operatorname{tg}\alpha - f(\xi)}. \end{cases} \tag{12}$$

Задача (12) эквивалентна задаче (10). Новая замена переменных ξ, ϑ на переменные ϑ, ζ по формулам

$$\vartheta' = \vartheta, \quad \zeta = \vartheta + f(\xi) - \xi \operatorname{tg}\alpha \tag{13}$$

приводит задачу (12) к следующему виду:

$$\begin{cases} [B - f'(\xi)A]\mathbf{U}_\vartheta + [B - \operatorname{tg}\alpha A]\,\mathbf{U}_\zeta = \mathbf{0}, \\ \mathbf{U}\big|_{\vartheta=0} = \mathbf{U}_0, \\ u_3\big|_{\zeta=0} = u_2 \operatorname{tg}\alpha\big|_{\zeta=0}. \end{cases} \tag{14}$$

Из соотношения (13), неявно задающего функцию ξ от $(\zeta - \vartheta)$, с учетом неравенства (16) однозначно определяется функция

$$\xi = \varphi(\zeta - \vartheta). \tag{15}$$

Далее для простоты записи будут сохраняться обозначения $f(\xi)$, $f'(\xi)$, $c_0(\xi)$, естественно, с учетом наличия связи (15).

Исходное уравнение косой стенки $y = x \operatorname{tg} \alpha$ в координатах ϑ, ζ имеет вид $\zeta = 0$, т.е. косая стенка берется за новую координатную ось. Якобиан замены переменных (13) следующий:

$$J_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial \vartheta'}{\partial \vartheta} & \dfrac{\partial \vartheta'}{\partial \xi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & f'(\xi) - \operatorname{tg} \alpha \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \operatorname{tg} \alpha - f'(\xi) \, .$$

Чтобы замена (13) была невырожденной, необходимо выполнение неравенства

$$J_2 = \operatorname{tg} \alpha - f'(\xi) \neq 0, \tag{16}$$

т.е. наклон косой стенки не равен наклону звуковой характеристики, разделяющей области центрированной и двойной волны. Неравенство (16) доказывается в работе [6].

Таким образом, начально-краевая задача (14) для вектора $\mathbf{U}$ записана в координатах ϑ, ζ. Начально-граничные условия (14) определены на прямых, задаваемых уравнениями $\vartheta = 0$ и $\zeta = 0$. Далее для построения локально-аналитического решения в окрестности точки $(\zeta = 0, \vartheta = 0)$ задачу (14) необходимо привести к форме характеристической задачи Коши стандартного вида. Для этого СУГД из задачи (14) слева умножается на матрицу T_1, а вектор $\mathbf{U}$ заменяется новым вектором:

$$\mathbf{W} = T_2^{-1}\mathbf{U} = (w_1, w_2, w_3)^\top = \left(c + v\frac{\varkappa}{c_0}(c_0 f' - f), u + v f', -\frac{\varkappa}{c_0} v \right)^\top .$$

Невырожденные матрицы T_1, T_2, элементы которых есть аналитические функции независимой переменной ξ, имеют вид

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ c_0 f' - f & \varkappa c_0 f' & -\varkappa c_0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_0 f' - f \\ 0 & 1 & c_0 f'/\varkappa \\ 0 & 0 & -c_0/\varkappa \end{pmatrix}.$$

Начальное условие для вектора $\mathbf{U}$ заменяется начальным условием для вектора $\mathbf{W}$:

$$\mathbf{W}|_{\vartheta=0} = \mathbf{W}_0 = \left(\ w_{1,0}, w_{2,0}, w_{3,0}\ \right)^\top = \left(\ c_0, u_0, 0\ \right)^\top .$$

Краевое условие задачи (14)

$$u_3\big|_{\zeta=0} = u_2 \operatorname{tg} \alpha\big|_{\zeta=0}$$

переписывается через компоненты вектора $\mathbf{W}$ и преобразуется к виду

$$w_3\big|_{\zeta=0} = g(\vartheta) w_2\big|_{\zeta=0},$$

где $g(\vartheta) = -\left[\frac{\varkappa}{c_0(\varphi(\zeta-\vartheta))} \frac{\operatorname{tg}\alpha}{[1+f'_\xi(\varphi(\zeta-\vartheta)) \operatorname{tg}\alpha]}\right]_{\zeta=0}$.

Окончательно начально-краевая задача (14) имеет вид

$$\begin{cases} T_1[B - f'A]T_2\mathbf{W}_\vartheta + T_1[B - \operatorname{tg}\alpha A]T_2\mathbf{W}_\zeta + \\ \qquad\qquad + T_1[B - \operatorname{tg}\alpha A]\frac{\partial T_2}{\partial \xi}\frac{\mathbf{W}}{f' - \operatorname{tg}\alpha} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{W}\big|_{\vartheta=0} = \mathbf{W}_0, \\ w_3\big|_{\zeta=0} = g(\vartheta)w_2\big|_{\zeta=0}. \end{cases} \tag{17}$$

Задача (17) эквивалентна задаче (12), а та, в свою очередь, задаче (10), так как замены (11) и (13) невырожденные. Для того чтобы задача (17) была характеристической задачей Коши стандартного вида, необходимо выполнение следующего условия при $\vartheta = 0$ (см. работу [7]):

$$\det\left(T_1[B - f'(\xi)A]T_2\right)\Big|_{\substack{\mathbf{W}=\mathbf{W}_0\\ \vartheta=0}} \equiv 0.$$

Известно, что определитель произведения матриц равен произведению определителей каждой из матриц, отсюда

$$\det T_1\Big|_{\substack{\mathbf{W}=\mathbf{W}_0\\ \vartheta=0}} \cdot \det\left[B - f'(\xi)A\right]\Big|_{\substack{\mathbf{W}=\mathbf{W}_0\\ \vartheta=0}} \cdot \det T_2\Big|_{\substack{\mathbf{W}=\mathbf{W}_0\\ \vartheta=0}} \equiv 0,$$

т. к. матрицы T_1 и T_2 невырожденные, их определители отличны от нуля. В результате получаем матричное уравнение

$$\det\left[B - f'(\xi)A\right]\Big|_{\substack{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0\\ \vartheta=0}} \equiv 0, \tag{18}$$

решение которого дает выражение для функции $f(\xi)$ в явном виде:

$$f(\xi) = \pm\begin{cases} c_0\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - 2\ln c_0}, & \varkappa = 1 \quad (\gamma = 3), \\ c_0\sqrt{\beta + c_0^{\frac{1-\varkappa}{\varkappa}}(\operatorname{tg}^2\alpha - \beta)}, & \varkappa \neq 1 \quad (\gamma \neq 3). \end{cases}$$

В работе [6] для задачи (17) доказывается

Теорема. *Поставленная задача (17) при найденной функции $f(\xi)$ является характеристической задачей Коши стандартного вида и поэтому у нее в некоторой окрестности точки $(\zeta = 0, \vartheta = 0)$ существует единственное локально-аналитическое решение, представимое в виде сходящегося ряда*

$$\mathbf{W}(\zeta, \vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{W}_k(\zeta)\frac{\vartheta^k}{k!}, \quad \mathbf{W}_k(\zeta) = \frac{\partial^k\mathbf{W}}{\partial\vartheta^k}\Big|_{\vartheta=0}.$$

Алгоритм построения решения задачи (17) в пространстве специальных переменных ϑ, ζ подробно описан в работе [6]. Для построения решения задачи (17) в пространстве физических автомодельных переменных ξ, η необходимо осуществлять обратное преобразование согласно заменам (11) и (13), что в общем (несогласованном) случае выполнить в явном виде затруднительно. Поэтому искомое двумерное течение будет строиться как решение задачи (12) в пространстве переменных ξ, ϑ в виде сходящегося ряда по степеням ϑ:

$$\mathbf{U}(\xi, \vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{U}_k(\xi)\frac{\vartheta^k}{k!}, \quad \mathbf{U}_k(\xi) = \frac{\partial^k\mathbf{U}}{\partial\vartheta^k}\Big|_{\vartheta=0}, \tag{19}$$

так как задачи (17) и (12) эквивалентны. Начальное условие для транспортного уравнения задачи (12) будет строиться из граничного условия задачи (17).

2. Построение транспортного уравнения и уравнения начальных условий для коэффициента $c_1(\xi)$ рассматриваемой начально-краевой задачи. При подстановке в СУГД задачи (12) значения $\vartheta = 0$ получаем соотношения между функциями $c_1(\xi)$, $u_1(\xi)$ и $v_1(\xi)$:

$$u_1 = \frac{c_1}{\varkappa}\frac{c_0 f'}{c_0 f' - f}, \quad v_1 = -\frac{c_1}{\varkappa}\frac{c_0}{c_0 f' - f}. \tag{20}$$

Для построения транспортного уравнения (дифференциальное уравнение для нахождения коэффициента $c_1(\xi)$) необходимо систему (12) продифференцировать по переменной ϑ и подставить значение $\vartheta = 0$. При этом в соответствии с (19) будут справедливы следующие соотношения:

$$\begin{array}{lllll}
c\big|_{\vartheta=0} = c_0, & c_\xi\big|_{\vartheta=0} = c_0', & c_\vartheta\big|_{\vartheta=0} = c_1, & c_{\xi\vartheta}\big|_{\vartheta=0} = c_1', & c_{\vartheta\vartheta}\big|_{\vartheta=0} = c_2,\\
u\big|_{\vartheta=0} = u_0, & u_\xi\big|_{\vartheta=0} = u_0', & u_\vartheta\big|_{\vartheta=0} = u_1, & u_{\xi\vartheta}\big|_{\vartheta=0} = u_1', & u_{\vartheta\vartheta}\big|_{\vartheta=0} = u_2,\\
v\big|_{\vartheta=0} = 0, & v_\xi\big|_{\vartheta=0} = 0, & v_\vartheta\big|_{\vartheta=0} = v_1, & v_{\xi\vartheta}\big|_{\vartheta=0} = v_1', & v_{\vartheta\vartheta}\big|_{\vartheta=0} = v_2,
\end{array}$$

в результате система (12) принимает следующий вид:

$$\begin{cases}
u_1 c_0' - c_0 c_1' + \varkappa c_1 u_0' + \varkappa c_0 u_1' + (v_1 - 1 - u_1 f')c_1 + (c_0 f' - f)c_2 - \\
\qquad - \varkappa f' c_1 u_1 - \varkappa f' c_0 u_2 + \varkappa c_1 v_1 + \varkappa c_0 v_2 = 0,\\
c_1 c_0' + c_0 c_1' + \varkappa u_1 u_0' - \varkappa c_0 u_1' - c_1^2 f' - c_0 f' c_2 + \varkappa(c_0 f' - f)u_2 + \\
\qquad + \varkappa(v_1 - 1 - u_1 f')u_1 = 0,\\
-\varkappa c_0 v_1' + c_1^2 + c_0 c_2 + \varkappa(v_1 - 1 - u_1 f')v_1 + \varkappa(c_0 f' - f)v_2 = 0.
\end{cases} \tag{21}$$

Из второго и третьего уравнения системы (21) выразим $u_2(\xi)$ и $v_2(\xi)$:

$$u_2 = -\frac{c_1 c_0' + c_0 c_1' + \varkappa u_1 u_0' - \varkappa c_0 u_1' - c_1^2 f' - c_0 f' c_2 + \varkappa(v_1 - 1 - u_1 f')u_1}{\varkappa(c_0 f' - f)},$$
$$v_2 = -\frac{c_1^2 + c_0 c_2 + \varkappa(v_1 - 1 - u_1 f')v_1 - \varkappa c_0 v_1'}{\varkappa(c_0 f' - f)}.$$

Подставим выражения для $u_2(\xi)$ и $v_2(\xi)$ в первое уравнение системы (21), в нем сгруппируем слагаемые, содержащие коэффициент $c_2(\xi)$, в результате получим следующее уравнение:

$$\begin{gathered}
u_1 c_0' + \varkappa c_1 u_0' - c_0 c_1' + \varkappa c_0 u_1' + [v_1 - 1 - u_1 f']c_1 - \varkappa f' c_1 u_1 + \varkappa c_1 v_1 - \\
- \varkappa c_0 f'\Big[\frac{c_1^2}{\varkappa}\frac{f'}{c_0 f' - f} - \frac{(v_1 - 1 - u_1 f')u_1}{c_0 f' - f} + \frac{c_0 u_1'}{c_0 f' - f} - \frac{c_0}{\varkappa}\frac{c_1'}{c_0 f' - f}\Big] - \\
- \varkappa c_0 f'\Big[-\frac{u_1 u_0'}{c_0 f' - f} - \frac{c_0'}{\varkappa}\frac{c_1}{c_0 f' - f}\Big] + \varkappa c_0\Big[\frac{c_0 v_1'}{c_0 f' - f} - \frac{c_1^2}{\varkappa}\frac{1}{c_0 f' - f}\Big] - \\
- \varkappa c_0 v_1 \frac{v_1 - 1 - u_1 f'}{c_0 f' - f} + c_2\frac{(c_0 f' - f)^2 - (c_0 f')^2 - c_0^2}{c_0 f' - f} = 0.
\end{gathered}$$

Множитель при коэффициенте $c_2(\xi)$ тождественно равен нулю, так как справедливо соотношение (18). В результате получаем дифференциальное уравнение относительно коэффициентов $c_1(\xi)$, $u_1(\xi)$ и $v_1(\xi)$:

$$u_1 c_0' + \varkappa c_1 u_0' - c_0 c_1' + \varkappa c_0 u_1' + [v_1 - 1 - u_1 f']c_1 - \varkappa f' c_1 u_1 + \varkappa c_1 v_1 - \\ - \varkappa c_0 f' \Big[\frac{c_1^2}{\varkappa}\frac{f'}{c_0 f' - f} - \frac{(v_1 - 1 - u_1 f')u_1}{c_0 f' - f} + \frac{c_0 u_1'}{c_0 f' - f} - \frac{c_0}{\varkappa}\frac{c_1'}{c_0 f' - f}\Big] - \\ - \varkappa c_0 f' \Big[-\frac{u_1 u_0'}{c_0 f' - f} - \frac{c_0'}{\varkappa}\frac{c_1}{c_0 f' - f}\Big] + \varkappa c_0 \Big[\frac{c_0 v_1'}{c_0 f' - f} - \frac{c_1^2}{\varkappa}\frac{1}{c_0 f' - f}\Big] - \\ - \varkappa c_0 v_1 \frac{v_1 - 1 - u_1 f'}{c_0 f' - f} = 0. \quad (22)$$

Используя соотношения (20), можно свести уравнение (22) к дифференциальному уравнению относительно неизвестной функции $c_1(\xi)$ и построить таким образом транспортное уравнение. После упрощений в результате элементарных преобразований исходное уравнение (22) записывается в нормализованном виде:

$$c_1' - \Big[\frac{c_0^2}{f^2} - 1 - \frac{4}{\varkappa + 1}\frac{c_0^2}{c_0^2 + f^2}\Big]\frac{c_1}{2c_0} - \frac{\varkappa + 1}{\varkappa}\frac{(c_0^2 + f^2)^2}{4c_0^2 f^3}c_1^2 = 0. \quad (23)$$

Рассмотрим общий несогласованный случай, когда $\varkappa \neq 1$, $\gamma \neq 3$, тогда функцию $f(\xi)$ можно записать в виде произведения

$$f(\xi) = c_0(\xi)R(\xi), \quad (24)$$

где $R(\xi) = \sqrt{\beta + c_0^{(1-\varkappa)/\varkappa}(\operatorname{tg}^2\alpha - \beta)}$. Тогда уравнение (23) можно упростить до следующего вида:

$$c_1' - \Big[\frac{1}{R^2} - 1 - \frac{4}{\varkappa + 1}\frac{1}{R^2 + 1}\Big]\frac{c_1}{2c_0} - \frac{\varkappa + 1}{\varkappa}\frac{(1 + R^2)^2}{4R^3}\frac{c_1^2}{c_0} = 0. \quad (25)$$

Построим начальное условие для транспортного уравнения (25). Для этого краевое условие из задачи (17) продифференцируем по ϑ и в получившееся соотношение

$$w_{3\vartheta}\big|_{\zeta=0} = \big[g'(\vartheta)w_2 + g(\vartheta)w_{2\vartheta}\big]_{\zeta=0}$$

подставим значение $\vartheta = 0$:

$$w_{3,1}\big|_{\zeta=0} = g_\vartheta'(0)w_{2,0}\big|_{\zeta=0} + g(0)w_{2,1}\big|_{\zeta=0}.$$

Здесь $g(0)$ и $g'(0)$ — значения функции $g(\vartheta)$ и ее производной по ϑ при $\vartheta = 0$. Так как $w_{2,0}\big|_{\zeta=0} = u_0\big|_{\zeta=0} = 0$, выполняется

$$w_{3,1}\big|_{\zeta=0} = g(0)w_{2,1}\big|_{\zeta=0}. \quad (26)$$

По определению $w_{3,1}\big|_{\zeta=0} = -\frac{\varkappa}{c_0}v_1\big|_{\zeta=0}$. Для определения начального условия для уравнения (25) необходимо найти явный вид для выражения $w_{2,1}\big|_{\zeta=0}$.

Для этого в систему из задачи (17) подставим значение $\vartheta = 0$. С учетом вида функций w_1, w_2, w_3 и $w'_{1\zeta}$, $w'_{2\zeta}$, $w'_{3\zeta}$ и $w'_{1\vartheta}$, $w'_{2\vartheta}$, $w'_{3\vartheta}$ при $\vartheta = 0$ система (17) принимает вид

$$\begin{cases} -\dfrac{c_0}{\varkappa} f' w_{1,1} + (c_0 f' - f) w_{2,1} = \dfrac{u'_0 f}{f' - \operatorname{tg}\alpha}, \\ (c_0 f' - f) w_{1,1} - \varkappa c_0 f' w_{2,1} = \dfrac{c'_0 f}{f' - \operatorname{tg}\alpha}. \end{cases} \tag{27}$$

Система (27) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, решив которую, найдем функции $w_{1,1}$, $w_{2,1}$:

$$w_{1,1} = -\frac{c'_0}{f' - \operatorname{tg}\alpha}, \quad w_{2,1} = -\frac{u'_0}{f' - \operatorname{tg}\alpha}.$$

Подставим в (26) выражения для $w_{3,1}$, $w_{2,1}$, $g(0)$:

$$v_1\big|_{\zeta=0} = -\frac{u'_0}{f' - \operatorname{tg}\alpha} \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 + f' \operatorname{tg}\alpha}\Big|_{\zeta=0}.$$

С учетом связи (20) между функциями $c_1(\xi)$ и $v_1(\xi)$ и уравнением характеристики (24) получим начальное условие для $c_1(\xi)$ в случае, когда $\varkappa \neq 1$, $\gamma \neq 3$:

$$c_1\big|_{\zeta=0} = -\frac{2c'_0 R(1+R^2)}{R^2 - 2R\operatorname{tg}\alpha - 1} \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2R + \operatorname{tg}\alpha(R^2 - 1)}\Big|_{\zeta=0}.$$

При $\zeta = 0$ и $\vartheta = 0$, т. е. когда $\xi = 1$, значение $c_0(1) = 1$, а значение $R(\xi = 1) = \operatorname{tg}\alpha$; отсюда

$$c_1\big|_{\xi=1} = \frac{2c'_0 \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}. \tag{28}$$

Таким образом, с учетом (25) и (28) задача Коши для транспортного уравнения рассматриваемой СУГД в общем несогласованном случае при $\varkappa \neq 1$, $\gamma \neq 3$ будет иметь вид

$$\begin{cases} c'_1 - P(\xi) c_1 - Q(\xi) c_1^2 = 0, \\ c_1\big|_{\xi=1} = \dfrac{2c'_0 \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}, \end{cases} \tag{29}$$

где

$$P(\xi) = \frac{1}{2c_0}\Big[\frac{1}{R^2} - 1 - \frac{4}{\varkappa + 1}\frac{1}{R^2 + 1}\Big], \quad Q(\xi) = \frac{(1+R^2)^2}{4c'_0 c_0 R^3}.$$

Первое уравнение задачи (29) — дифференциальное уравнение Бернулли, решение которого можно выписать в квадратурах.

3. Решение транспортного уравнения для коэффициента $c_1(\xi)$ в несогласованном случае при $\varkappa \neq 1$, $\gamma \neq 3$. Запишем функцию $c_1(\xi)$ как произведение двух неизвестных функций $c_1(\xi) = q(\xi)p(\xi)$ и подставим в первое уравнение задачи (29):

$$p'q + (q' - P(\xi)q)p - Q(\xi)p^2q^2 = 0. \tag{30}$$

Коэффициент при $p(\xi)$ в уравнении (30) зануляется и значение $q(\xi)$ находится из решения дифференциального уравнения

$$q' - P(\xi)q = 0. \tag{31}$$

Решением (31) будет функция

$$q(\xi) = \exp\left(\int P(\xi)d\xi\right).$$

Найдем значение интеграла, стоящего в показателе экспоненты:

$$\int P(\xi)d\xi = \frac{1}{2c_0'}\int \frac{dc_0}{c_0(\beta + c_0^{1/\varkappa - 1}(\operatorname{tg}^2\alpha - \beta))} - \frac{1}{2c_0'}\int \frac{dc_0}{c_0} - \\ - \frac{2}{\varkappa}\int \frac{dc_0}{c_0(\beta + 1 + c_0^{1/\varkappa - 1}(\operatorname{tg}^2\alpha - \beta))}.$$

Сделаем замену переменных:

$$z = c_0^{1/\varkappa}, \quad c_0 = z^{\varkappa}, \quad dc_0 = \varkappa z^{\varkappa - 1}dz. \tag{32}$$

Здесь и далее предполагается, что $\varkappa \in \mathbb{Q}$. В результате будем иметь

$$\int P(\xi)d\xi = \frac{\varkappa + 1}{2}\int \frac{z^{\varkappa - 2}dz}{\beta z^{\varkappa - 1} + \operatorname{tg}^2\alpha - \beta} - 2\int \frac{z^{\varkappa - 2}dz}{(\beta + 1)z^{\varkappa - 1} + \operatorname{tg}^2\alpha - \beta} - \\ - \frac{1}{2c_0'}\ln c_0 = \ln\left(\frac{c_0^{(\varkappa - 1)/\varkappa}(\beta + 1 + c_0^{(1-\varkappa)/\varkappa}(\operatorname{tg}^2\alpha - \beta))}{c_0\sqrt{\beta + c_0^{(1-\varkappa)/\varkappa}(\operatorname{tg}^2\alpha - \beta)}}\right).$$

В результате

$$q(\xi) = \frac{c_0^{(\varkappa - 1)/\varkappa}(\beta + 1 + c_0^{(1-\varkappa)/\varkappa}(\operatorname{tg}^2\alpha - \beta))}{c_0\sqrt{\beta + c_0^{(1-\varkappa)/\varkappa}(\operatorname{tg}^2\alpha - \beta)}} = \frac{c_0^2 + f^2}{c_0^{(\varkappa+1)/\varkappa}f} = \frac{1 + R^2}{c_0^{1/\varkappa}R}. \tag{33}$$

Функция $p(\xi)$ является решением уравнения

$$\frac{dp}{p^2} = \frac{1}{c_0'}Q(c_0)q(c_0)dc_0,$$

отсюда

$$\tilde{C} - \frac{1}{p} = \left(\frac{\varkappa + 1}{2\varkappa}\right)^2 \int \frac{(1 + R^2)^3}{c_0^{(\varkappa+1)/\varkappa}R^4}dc_0, \tag{34}$$

где $\tilde{C}$ — константа интегрирования.

Вычислим интеграл, стоящий в правой части выражения (34). После замены (32) интеграл переписывается следующим образом:

$$\int \frac{(1+R^2)^3}{c_0^{(\varkappa+1)/\varkappa} R^4} dc_0 = \int \frac{dc_0}{c_0^{(\varkappa+1)/\varkappa} R^4} + 3\int \frac{dc_0}{c_0^{(\varkappa+1)/\varkappa} R^2} + 3\int \frac{dc_0}{c_0^{(\varkappa+1)/\varkappa}} +$$
$$+ \int \frac{R^2 dc_0}{c_0^{(\varkappa+1)/\varkappa}} = -\frac{\operatorname{tg}^2\alpha - \beta}{c_0} + 3\varkappa \int \frac{z^{\varkappa-3}dz}{(z^{\varkappa-1}\beta + (\operatorname{tg}^2\alpha - \beta))} -$$
$$- \frac{\varkappa(\beta+3)}{c_0^{1/\varkappa}} + \varkappa \int \frac{dz}{z^{4-2\varkappa}(z^{\varkappa-1}\beta + (\operatorname{tg}^2\alpha-\beta))^2}. \quad (35)$$

Последний интеграл в выражении (35) берется по частям:

$$\int \frac{dz}{z^{4-2\varkappa}(z^{\varkappa-1}\beta + (\operatorname{tg}^2\alpha-\beta)\ )^2} = \frac{1}{\beta(\varkappa-1)} \int \frac{z^{\varkappa-2} d\beta z^{\varkappa-1}}{(z^{\varkappa-1}\beta + (\operatorname{tg}^2\alpha-\beta))^2} =$$
$$= \frac{1}{\varkappa+1}\Big[-\frac{z^{\varkappa-2}}{z^{\varkappa-1}\beta + (\operatorname{tg}^2\alpha-\beta)} + (\varkappa-2)\int \frac{z^{\varkappa-3}dz}{z^{\varkappa-1}\beta + (\operatorname{tg}^2\alpha-\beta)}\Big]. \quad (36)$$

Выражение (36) подставим в (35):

$$\int \frac{(1+R^2)^3}{c_0^{(\varkappa+1)/\varkappa} R^4} dc_0 = -\frac{\varkappa(\beta+3)}{c_0^{1/\varkappa}} - \frac{(\operatorname{tg}^2\alpha-\beta)}{c_0} +$$
$$+ \frac{\varkappa}{\varkappa+1}\frac{z^{\varkappa-2}}{z^{\varkappa-1}\beta + (\operatorname{tg}^2\alpha-\beta)} + \frac{\varkappa(2\varkappa+5)}{\varkappa+1}\int \frac{z^{\varkappa-3}dz}{z^{\varkappa-1}\beta + (\operatorname{tg}^2\alpha-\beta)}. \quad (37)$$

Введем обозначение $I(\xi) = \displaystyle\int \frac{dz}{z^2(\beta + z^{1-\varkappa}(\operatorname{tg}^2\alpha-\beta))}$ и подставим выражение (37) в (34):

$$\tilde{C}_1 - \frac{1}{p}\Big(\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}\Big)^2 = -\frac{1}{c_0^{1/\varkappa}}\Big(2\varkappa - 1 + \frac{f^2}{c_0^2} - \frac{\varkappa}{\varkappa+1}\frac{c_0^2}{f^2}\Big) + \frac{\varkappa(2\varkappa+5)}{\varkappa+1} I(\xi), \quad (38)$$

где $\tilde{C}_1 = \tilde{C}(2\varkappa/(\varkappa+1))^2$. Из выражения (38) выразим функцию $p(\xi)$:

$$p(\xi) = \Big(\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}\Big)^2 \Big[\tilde{C}_1 + \Big(2\varkappa - 1 + \frac{f^2}{c_0^2} - \frac{\varkappa}{\varkappa+1}\frac{c_0^2}{f^2}\Big)c_0^{-1/\varkappa} -$$
$$- \frac{\varkappa(2\varkappa+5)}{\varkappa+1} I(\xi)\Big]^{-1}. \quad (39)$$

С учетом (33) и (39) запишем выражение для функции $c_1(\xi)$:

$$c_1(\xi) = \frac{c_0^2+f^2}{c_0 f}\Big(\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}\Big)^2 \Big[\tilde{C}_1 c_0^{1/\varkappa} + \Big(2\varkappa - 1 + \frac{f^2}{c_0^2} - \frac{\varkappa}{\varkappa+1}\frac{c_0^2}{f^2}\Big) -$$
$$- \frac{\varkappa(2\varkappa+5)}{\varkappa+1} c_0^{1/\varkappa} I(\xi)\Big]^{-1}. \quad (40)$$

Найдем значение константы интегрирования $\tilde{C}$ из начального условия, для этого приравняем выражение для $c_1(\xi)$ из (28) и (40) при $\xi = 1$:

$$\tilde{C} = \frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\Big(\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{3}{2\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{3}{2} - \varkappa + \frac{1}{2\varkappa} + \frac{2\varkappa+5}{2} I(1)\Big).$$

Подставим $\tilde{C}$ в (40) и окончательно получим выражение для $c_1(\xi)$ в рассматриваемом случае:

$$c_1(\xi) = \frac{2\varkappa}{\varkappa+1}\frac{c_0^2+f^2}{c_0 f}M(\xi)^{-1},$$

где

$$M(\xi) = c_0^{1/\varkappa}\Big(\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{3}{2\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{3}{2} - \varkappa + \frac{1}{2\varkappa}\Big) + \varkappa + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\varkappa} + \\ + \frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\frac{f^2}{c_0^2} - \frac{1}{2}\frac{c_0^2}{f^2} - \frac{2\varkappa+5}{2}c_0^{1/\varkappa}\big(I(\xi) - I(1)\big).$$

Зная $c_1(\xi)$, можно найти $u_1(\xi)$ и $v_1(\xi)$, используя соотношения (20):

$$u_1(\xi) = \frac{2}{\varkappa+1}\frac{c_0^2-f^2}{c_0 f}M(\xi)^{-1}, \quad v_1(\xi) = \frac{4}{\varkappa+1}M(\xi)^{-1}.$$

Используя построенное решение (функции $c_1(\xi)$, $u_1(\xi)$ и $v_1(\xi)$), рассмотрим квазисогласованное приближение, когда условие согласования (8) не выполняется, но коэффициенты рядов c_i, u_i и v_i равны нулю при $i \geqslant 2$:

$$c = c_0 + c_1\vartheta, \quad u = u_0 + u_1\vartheta, \quad v = v_1\vartheta. \tag{41}$$

Можно показать, что решение (41) в координатах u, v будет иметь вид

$$c = 1 + \varkappa u + \varkappa\frac{f}{c_0}v, \tag{42}$$

где $f(\xi) = c_0\sqrt{\beta + c_0^{1/\varkappa-1}(\operatorname{tg}^2\alpha - \beta)}$. Из сравнения формул (9) и (42) видно, что в согласованном случае поверхность функции $c(\xi)$ есть плоскость в переменных u, v, а в квазисогласованном случае это криволинейная поверхность, так как коэффициент при переменной v есть функция независимой переменной ξ.

4. Решение транспортного уравнения для коэффициента $c_1(\xi)$ в несогласованном случае при $\gamma = 5/3$. При произвольном значении $\varkappa \in \mathbb{Q}$ интеграл $I(\xi)$ в элементарных функциях не берется. Рассмотрим случай, когда $\gamma = 5/3$ ($\varkappa = 1/3$, $\beta = 2$ — водород), тогда интеграл $I(\xi)$ принимает вид, который допускает его интегрирование в элементарных функциях:

$$I(\xi)\big|_{\varkappa=1/3} = \int\frac{dz}{z^2(2+z^{2/3}(\operatorname{tg}^2\alpha-2))}. \tag{43}$$

После замены $z = t^3$ интеграл (43) преобразуется к виду

$$I(\xi)\big|_{\varkappa=1/3} = 3\int\frac{dt}{t^4(2+t^2(\operatorname{tg}^2\alpha-2))}.$$

Дробь, стоящая под знаком интеграла, дважды раскладывается на сумму простейших дробей, и после интегрирования имеем

$$I(\xi)\big|_{\varkappa=1/3} = -\frac{1}{2c_0^3} + \frac{3(\operatorname{tg}^2\alpha - 2)}{4c_0} + \frac{3(\operatorname{tg}^2\alpha - 2)^{3/2}}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{c_0}{\sqrt{2/(\operatorname{tg}^2\alpha - 2)}}.$$

При этом

$$I(1)\big|_{\varkappa=1/3} = -\frac{1}{2} + \frac{3(\operatorname{tg}^2\alpha - 2)}{4} + \frac{3(\operatorname{tg}^2\alpha - 2)^{3/2}}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2/(\operatorname{tg}^2\alpha - 2)}}.$$

Подставим выражение для $I(\xi)\big|_{\varkappa=1/3}$ и $I(1)\big|_{\varkappa=1/3}$ в (40), получим выражение для функции $c_1(\xi)$ в явном виде при $\gamma = 5/3$ ($\varkappa = 1/3$):

$$c_1(\xi)\big|_{\varkappa=1/3} = \frac{3 + c_0^2(\operatorname{tg}^2\alpha - 2)}{\sqrt{2 + c_0^2(\operatorname{tg}^2\alpha - 2)}} \frac{1}{M(\xi)\big|_{\varkappa=1/3}}, \tag{44}$$

где

$$\begin{aligned} M(\xi)\big|_{\varkappa=1/3} = &-6c_0^3 + 2.25c_0^3 \operatorname{tg}^2\alpha + \frac{3c_0^3}{\operatorname{tg}^2\alpha} + 9\frac{1}{2} - \frac{1}{4}c_0^2(\operatorname{tg}^2\alpha - 2) + \\ &+ \frac{17\sqrt{2}}{8}c_0^3(\operatorname{tg}^2\alpha - 2)^{3/2} \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2\alpha - 2)} - \frac{1}{2 + c_0^2(\operatorname{tg}^2\alpha - 2)} - \\ &- \frac{17\sqrt{2}}{8}c_0^3(\operatorname{tg}^2\alpha - 2)^{3/2} \operatorname{arctg}\frac{c_0}{\sqrt{2/(\operatorname{tg}^2\alpha - 2)}}. \end{aligned}$$

Из выражения для $c_1(\xi)\big|_{\varkappa=1/3}$ легко найти выражения для $u_1(\xi)\big|_{\varkappa=1/3}$ и $v_1(\xi)\big|_{\varkappa=1/3}$ также в явном виде:

$$\begin{aligned} u_1(\xi)\big|_{\varkappa=1/3} &= -\frac{3(1 + c_0^2(\operatorname{tg}^2\alpha - 2))}{2\sqrt{2 + c_0^2(\operatorname{tg}^2\alpha - 2)}} \frac{1}{M(\xi)\big|_{\varkappa=1/3}}, \\ v_1(\xi)\big|_{\varkappa=1/3} &= \frac{3}{M(\xi)\big|_{\varkappa=1/3}}. \end{aligned} \tag{45}$$

Применим построенное решение (функции $c_1(\xi)$, $u_1(\xi)$ и $v_1(\xi)$ при $\gamma = 5/3$ ($\varkappa = 1/3$)) к описанию течения сжатия специального призматического объема в квазисогласованном приближении.

5. Описание течения сжатия в квазисогласованном случае при $\gamma = 5/3$ и $\alpha = \pi/3$. В работах [1, 2, 4–6] было показано, что результаты решения задачи о разлете газа на косой стенке в вакуум при $t > 0$ можно использовать для описания сжатия газа в специальном призматическом объеме для $t < 0$.

Рассмотрим объем, ограниченный непроницаемыми стенками, представляющий собой в поперечном сечении правильный треугольник $\triangle EFG$ (см.

рис. 2, *a*), в котором находится покоящийся газ. В момент времени $t = t_0 < 0$ в результате внешнего воздействия внешние стенки EF, FG и EG треугольника $\triangle EFG$ начинают движение к центру пересечения биссектрис — точке O на рис. 2.

В силу симметричности внешнего воздействия и самого объема $\triangle EFG$ течение газа в областях $\triangle FGO$ и $\triangle EGO$ подобно течению в $\triangle EFO$. Далее отдельно рассматривается фрагмент $\triangle EFO$ треугольника $\triangle EFG$ (см. рис. 2, *b*).

На рис. 2, *b* показана конфигурация течения сжатия в момент времени $t_0 < t < 0$ для фрагмента $\triangle EOF$. Линии EO и FO в нашей задаче являются непроницаемыми стенками треугольника $\triangle EOF$ в силу симметричности течения в объеме $\triangle EFG$. В работе [5] показано, что в течении сжатия возникают три области: область покоящегося газа (*0*); область течения в виде центрированной волны (*1*); область течения в виде двойной волны (*2*).

Для описания течения сжатия в области двойной волны (*2*) используется построенное решение (44)–(45) задачи об истечении газа в вакуум с косой стенки при $\alpha = \pi/3$.

Найдем выражение для функции $c_1(\xi)$ для рассматриваемого специального объема. При $\gamma = 5/3$ и $\alpha = \pi/3$ значение $\varkappa = 1/3$, $\beta = 2$ и функция $f(\xi) = c_0\sqrt{c_0^2 + 2}$. Подставим данные значения $\varkappa$, β, $f(\xi)$ в формулы (44)–(45), в результате получим

$$M(\xi)\Big|_{\substack{\varkappa=1/3\\ \alpha=\pi/3}} = 9.5 + 3.5996c_0^3 - 0.25c_0^2 - \frac{1}{c_0^2+2} - \frac{17\sqrt{2}}{8}c_0^3 \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}c_0,$$

$$c_1(\xi)\Big|_{\substack{\varkappa=1/3\\ \alpha=\pi/3}} = \frac{3+c_0^2}{\sqrt{2+c_0^2}}\,\frac{1}{M(\xi)\Big|_{\substack{\varkappa=1/3\\ \alpha=\pi/3}}}, \tag{46}$$

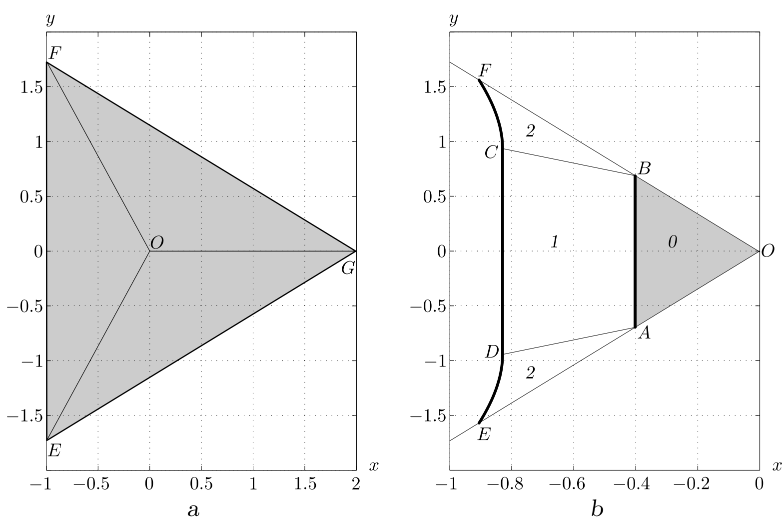

Рис. 2. Начальная конфигурация в момент $t_0 < 0$ (*a*) и конфигурация потока в момент $t_0 < t < 0$ (*b*): *0* — область, в которой находится покоящийся газ; *1* — область течения в виде центрированной волны; *2* — область течения в виде двойной волны

[Figure 2. (*a*) Initial configuration $t_0 < 0$; (*b*) the flow configuration at $t_0 < t < 0$: *0* — the quiescent gas region; *1* — the flow region in the form of a centered wave; *2* — the flow region in the form of a double wave]

$$u_1(\xi)\Big|_{\substack{\varkappa=1/3\\ \alpha=\pi/3}} = -\frac{c_0^2+1}{2\sqrt{c_0^2+2}}\frac{3}{M(\xi)\Big|_{\substack{\varkappa=1/3\\ \alpha=\pi/3}}}, \quad v_1(\xi)\Big|_{\substack{\varkappa=1/3\\ \alpha=\pi/3}} = \frac{3}{M(\xi)\Big|_{\substack{\varkappa=1/3\\ \alpha=\pi/3}}}.$$

Функции $M(\xi)\Big|_{\substack{\varkappa=1/3\\ \alpha=\pi/3}}$ и $c_1(\xi)\Big|_{\substack{\varkappa=1/3\\ \alpha=\pi/3}}$ определены на интервале, где $c_0(\xi) \geqslant 0$. При описании сжатия газа в специальном призматическом объеме область определения $M(\xi)\Big|_{\substack{\varkappa=1/3\\ \alpha=\pi/3}}$ и $c_1(\xi)\Big|_{\substack{\varkappa=1/3\\ \alpha=\pi/3}}$ есть интервал $c_0(\xi) \geqslant 1$. При описании разлета газа с косой стенки в вакуум, имеющей наклон $\alpha = \pi/3$, область определения функций $M(\xi)\Big|_{\substack{\varkappa=1/3\\ \alpha=\pi/3}}$ и $c_1(\xi)\Big|_{\substack{\varkappa=1/3\\ \alpha=\pi/3}}$ есть интервал $0 \leqslant c_0(\xi) \leqslant 1$.

Найдем нули функции, стоящей в знаменателе дроби (46) при $c_0 \geqslant 1$. Так как справедливо неравенство $c_0^2 + 2 > 0$ при любых $c_0 \geqslant 0$, второй сомножитель в знаменателе дроби равен нулю:

$$M(\xi)\Big|_{\substack{\varkappa=1/3\\ \alpha=\pi/3}} = 9.5 + 3.5996c_0^3 - 0.25c_0^2 - \frac{1}{c_0^2+2} - \frac{17\sqrt{2}}{8}c_0^3 \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}c_0 = 0. \quad (47)$$

Численное решение уравнения (47) при $c_0(\xi) \geqslant 1$ дает единственное значение $c_0^* = 3.9564$ ($\xi_* = 12.8257$), при котором значение функции $M(\xi)\Big|_{\substack{\varkappa=1/3\\ \alpha=\pi/3}}$ равно нулю. Отсюда

$$\lim_{\xi\to\xi_*} c_1(\xi) = \lim_{\xi\to\xi_*} \frac{\partial c}{\partial\vartheta}\Big|_{\vartheta=0} = \infty. \quad (48)$$

Значение предела (48) означает, что в течении типа двойная волна при сильном сжатии газа, находящегося в рассматриваемом призматическом объеме, наступает градиентная катастрофа, функция $c(\xi,\vartheta)$ в точке ξ_* при $\vartheta = 0$ (точка D на рис. 3, b) испытывает сильный разрыв, что приводит к образованию ударной волны.

Необходимо отметить следующее. Транспортное уравнение (29) — нелинейное дифференциальное уравнение, поэтому его решение содержит найденную в точке ξ_* особенность. Все последующие дифференциальные уравнения для нахождения коэффициентов c_i при $i \geqslant 2$ будут линейными, поэтому других особенностей решение задачи (12) не содержит.

Построим поверхность функции $c(\xi,\vartheta)$ при приближении переменной ξ к значению ξ_* для квазисогласованного случая (рис. 3, a) и для согласованного случая (рис. 3, b). Согласованный случай рассматривается для $\gamma = 2$, когда угол наклона косой стенки равен $\pi/3$.

Обозначения на рис. 3 повторяют обозначения рис. 1, 2. Черным цветом выделена область максимального сжатия, белым цветом — область покоящегося газа.

На рис. 3, a красным цветом отмечена точка D, в которой при $\xi = \xi_*$ и $\vartheta = 0$ обнаружена особенность найденного решения, где $c_1 \to \infty$ при $\xi \to \xi_*$.

Для остальной области сжатия значение $c(\xi,\vartheta)$ в квазисогласованном случае значительно меньше, чем в согласованном случае. Приведенная картина распределения $c(\xi,\vartheta)$ не полностью отражает рассматриваемое течение сжатия, так как члены ряда при $i \geqslant 2$ искусственно отброшены. Различия в значениях $c(\xi,\vartheta)$ также обусловлены тем, что на правом рисунке газ имеет показатель политропы $\gamma = 2$, а на левом $\gamma = 5/3$.

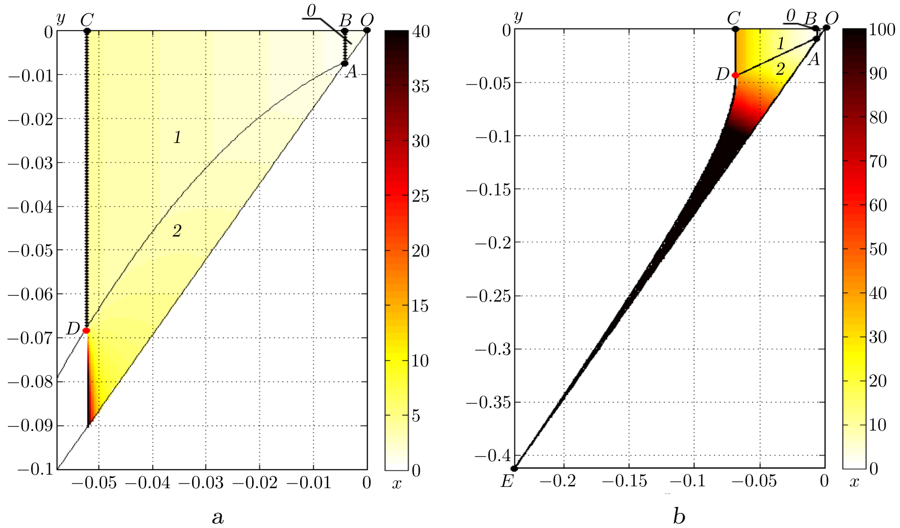

Рис. 3. Поверхность функции $c(\xi, \vartheta)$ при приближении к точке ξ_* в квазисогласованном (a) и согласованном (b) случаях: *0* — область, в которой находится покоящийся газ; *1* — область течения в виде центрированной волны; *2* — область течения в виде двойной волны (онлайн в цвете)

[Figure 3. (color online) The surface of the function $c(\xi, \vartheta)$ when approaching the point ξ_* in the quasi-consistent (a) and consistent (b) cases: *0* — the quiescent gas region; *1* — the flow region in the form of a centered wave; *2* — the flow region in the form of a double wave]

Заключение.

1. Построено аналитическое решение начально-краевой задачи об истечении политропного газа с косой стенки в вакуум в постановке характеристической задачи Коши стандартного вида в пространстве физических автомодельных переменных $\xi = x/t$, $\eta = y/t$ в общем несогласованном случае.
2. Построено аналитическое решение транспортного уравнения для коэффициента ряда $c_1(\xi)$ в общем несогласованном случае, и для частного случая $\gamma = 5/3$ — случай водорода — для коэффициента $c_1(\xi)$ построено аналитическое решение в явном виде.
3. Полученное решение применено к описанию сжатия специального призматического объема, представляющего собой в сечении правильный треугольник. Найдена особенность полученного решения в точке $\xi_* = 12.8257$ на характеристике $\vartheta = 0$, когда значение $c_1 \to \infty$ при $\xi \to \xi_*$. Таким образом, функция $c_1(\xi)$ в точке ξ_* при $\vartheta = 0$ испытывает сильный разрыв, что означает образование ударной волны сжатия и изменение режима течения газа в области двойной волны с безударного сжатия на «ударное» сжатие.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарность. Автор выражает благодарность и признательность своему научному руководителю профессору С.П. Баутину за внимание, помощь и поддержку.

Библиографический список

1. Баутин С. П. *Математическое моделирование сильного сжатия газа.* Новосибирск: Наука, 2007. 312 с. EDN: QJSOSJ.
2. Баутин С. П., Дерябин С. Л. *Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум.* Новосибирск: Наука, 2005. 390 с. EDN: QJPIDD.
3. Сучков В. А. Истечение в вакуум на косой стенке // *ПММ*, 1963. Т. 27, № 4. С. 739–740.
4. Баутин С. П., Понькин Е. И. Автомодельные решения задачи об истечении политропного газа в вакуум с косой стенки // *ПМТФ*, 2021. Т. 62, № 1. С. 32–40. EDN: KCQUYF. DOI: https://doi.org/10.15372/PMTF20210104.
5. Понькин Е. И. Математическое описание двух способов газодинамического воздействия на мишень с использованием решения Сучкова // *Вопр. атомн. науки и техн. Сер. Матем. модел. физ. проц.*, 2022. № 2. С. 27–39. EDN: YPTVJH. DOI: https://doi.org/10.53403/24140171_2022_2_27.
6. Понькин Е. И. Характеристическая задача Коши стандартного вида для описания истечения политропного газа в вакуум с косой стенки // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 2. С. 322–338. EDN: QYHKRK. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1922.
7. Баутин С. П. *Характеристическая задачи Коши и ее приложения в газовой динамике.* Новосибирск: Наука, 2009. 368 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 2, pp. 336–356
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1999

MSC: 76N15, 35C06, 35Q35

Construction of a self-similar solution to the system of gas dynamics equations describing the outflow of polytropic gas into vacuum from an inclined wall in the inconsistent case

E. I. Pon'kin

Snezhinsk Physic Institute of the National Research Nuclear University MEPhI,
8, Komsomolskay st., Snezhinsk, 456776, Russian Federation.

Abstract

The present paper is devoted to an initial-boundary value problem for the system of gas dynamics equations in the formulation of the characteristic Cauchy problem of standard form, which describes, at $t > 0$, the expansion of a polytropic gas into vacuum on an inclined wall in the space of physical self-similar variables $\xi = x/t$, $\eta = y/t$, and at $t < 0$, strong compression of gas in the prismatic volume.

The solution of the initial-boundary value problem is constructed in the form of series of functions $c(\xi, \vartheta)$, $u(\xi, \vartheta)$ and $v(\xi, \vartheta)$ with powers ϑ, where ϑ is the known function of independent variables. Finding the unknown coefficients $c_1(\xi)$, $u_1(\xi)$ and $v_1(\xi)$ of the series of functions $c(\xi, \vartheta)$, $u(\xi, \vartheta)$ and $v(\xi, \vartheta)$ is reduced to solving the transport equation for the coefficient $c_1(\xi)$.

The study deals with construction of an analytical solution of the transport equation for the coefficient $c_1(\xi)$ of the solution of the system of gas dynamics equations, which describes the isentropic outflow of a polytropic gas from an inclined wall, in the general inconsistent case, when $\operatorname{tg}^2 \alpha \neq (\gamma+1)/(3-\gamma)$. When $\gamma = 5/3$, which is the case of hydrogen, an analytical solution of the transport equation is constructed for the coefficient $c_1(\xi)$ in explicit form for the first time.

The obtained solution has been applied to the description of the compression of a special prismatic volume, which is a regular triangle in cross section. The specific feature of the obtained solution $c_1(\xi)$ indicated in the article is that the value $c_1 \to \infty$ as $\xi \to \xi_*$, where the value ξ_* is given by the equation $c_0(\xi_*) = 3.9564$. It is concluded that at the sound characteristic, which is the interface between the flows of centered and double wave types, a gradient catastrophe occurs at the point with coordinates $\xi = \xi_*$ and $\vartheta = 0$,

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes
Research Article

Please cite this article in press as:
Pon'kin E. I. Construction of a self-similar solution to the system of gas dynamics equations describing the outflow of polytropic gas into vacuum from an inclined wall in the inconsistent case, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 2, pp. 336–356. EDN: EYOBZI. DOI: 10.14498/vsgtu1999 (In Russian).

Author's Details:
Eugeny I. Pon'kin https://orcid.org/0000-0002-7848-3167
Postgraduate Student; e-mail: epnk@rambler.ru

which results in development of strong discontinuity in the shock-free flow and formation of a shock wave.

Keywords: characteristic Cauchy problem of standard form, analog of the Kovalevskaya's theorem, inclined wall, transport equation.

Received: 9th February, 2023 / Revised: 18th May, 2023 /
Accepted: 25th May, 2023 / First online: 26th June, 2023

Competing interests. No competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final version of the manuscript for printing. The final version of the manuscript has been approved by me.

Funding. The research was conducted without funding.

Acknowledgments. The author expresses gratitude and appreciation to their academic supervisor, Professor S. P. Bautin, for their attention, assistance, and support.

References

1. Bautin S. P. *Matematicheskoe modelirovanie sil'nogo szhatiia gaza* [Mathematical Modeling of Strong Gas Compression]. Novosibirsk, Nauka, 2007, 312 pp. (In Russian). EDN: QJSOSJ
2. Bautin S. P., Deryabin S. L. *Matematicheskoe modelirovanie istecheniia ideal'nogo gaza v vakuum* [Mathematical Modeling of Ideal Gas Flow into Vacuum]. Novosibirsk, Nauka, 2005, 390 pp. (In Russian). EDN: QJPIDD
3. Suchkov V. A. Flow into a vacuum along an oblique wall, *J. Appl. Math. Mech.*, 1963, vol. 27, no. 4, pp. 1132–1134. DOI: https://doi.org/10.1016/0021-8928(63)90195-3.
4. Bautin S. P., Pon'kin E. I. Self-similar solutions of the problem of polytropic gas flow along an oblique wall into vacuum, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2021, vol. 62, no. 1, pp. 27–37. EDN: YQXWVA. DOI: https://doi.org/10.1134/S0021894421010041.
5. Pon'kin E. I. Mathematical description of two methods of gas-dynamic impact on the target using the Suchkov solution, *Vopr. Atomn. Nauki Tekhn. Ser. Matem. Model. Fiz. Prots.*, 2022, no. 2, pp. 27–39 (In Russian). EDN: YPTVJH. DOI: https://doi.org/10.53403/24140171_2022_2_27.
6. Pon'kin E. I. The characteristic Cauchy problem of standard form for describing the outflow of a polytropic gas into vacuum from an obligue wall, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 2, pp. 322–338 (In Russian). EDN: QYHKRK. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1922.
7. Bautin S. P. *Kharakteristicheskaia zadachi Koshi i ee prilozheniia v gazovoi dinamike* [The Characteristic Cauchy Problem and its Applications in Gas Dynamics]. Novosibirsk, Nauka, 2009, 368 pp. (In Russian)