



Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 539.372

Свойства диаграмм нагружения и разгрузки, порождаемых нелинейным определяющим соотношением типа Максвелла для реономных материалов

А. В. Хохлов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Научно-исследовательский институт механики,
Россия, 119192, Москва, Мичуринский проспект, 1.

Аннотация

В статье продолжены исследование и аттестация физически нелинейного определяющего соотношения типа Максвелла для нестареющих упруговязкопластичных материалов с двумя материальными функциями: комплекса моделируемых им реологических эффектов, области применимости, способов идентификации, настройки и дальнейшей модификации. Аналитически изучены общие качественные свойства семейства кривых нагружения и разгрузки с постоянными скоростями, порождаемых этим соотношением с произвольными материальными функциями в условиях одноосного квазистатического нагружения. Исследованы интервалы монотонности и выпуклости кривых и условия существования точек перегиба на участках нагрузки и разгрузки, величины максимальной деформации, скачков скорости деформации и пластической деформации за цикл нагрузки-разгрузки, их зависимость от максимального напряжения, скорости и длительности нагружения и разгрузки и от характеристик материальных функций. Обнаруженные свойства сопоставлены с типичными свойствами экспериментальных диаграмм нагружения и разгрузки классов реономных материалов с целью выявления феноменологических ограничений на материальные функции, арсенала возможностей и индикаторов (не)применимости определяющего соотношения.

Ключевые слова: вязкоупругопластичность, диаграммы деформирования, скорость нагружения, разгрузка, скоростная чувствительность,

Научная статья

Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Хохлов А. В. Свойства диаграмм нагружения и разгрузки, порождаемых нелинейным определяющим соотношением типа Максвелла для реономных материалов // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 2. С. 293–324. doi: [10.14498/vsgtu1573](https://doi.org/10.14498/vsgtu1573).

Сведения об авторе

Андрей Владимирович Хохлов <http://orcid.org/0000-0002-9212-2579>

кандидат технических наук; старший научный сотрудник; лаб. упругости и пластичности; e-mail: andrey-khokhlov@ya.ru

мгновенный модуль, равновесная диаграмма, разнсопротивляемость, сверхпластичность, полимеры.

Получение: 18 октября 2017 г. / Исправление: 28 марта 2018 г. /

Принятие: 11 июня 2018 г. / Публикация онлайн: 29 июня 2018 г.

Введение. Нелинейное определяющее соотношение (ОС) типа Максвелла описывает изотермические процессы деформирования реономных материалов, связывая (в одномерном случае) деформацию $\varepsilon(t)$ с историей изменения напряжения $\sigma(\tau)$, $\tau \in [0; t]$:

$$\varepsilon(t) = E^{-1}F(\sigma(t)) + \eta^{-1} \int_0^t V(\sigma(\tau))d\tau, \quad t > 0. \quad (1)$$

Оно основано на представлении полной деформации $\varepsilon(t)$ в виде суммы упругой и вязкопластической компонент и нацелено на описание комплекса основных реологических эффектов, типичных для материалов, обладающих наследственностью, высокой скоростной чувствительностью и, возможно, разнсопротивляемостью [1–8]. ОС (1) содержит две материальные функции (МФ): $F(x)$, $V(x)$, $x \in (\omega_-, \omega_+)$; параметры $E > 0$ и $\eta > 0$ (коэффициент вязкости и модуль упругости) выделены из МФ F и V для удобства учета влияния температуры в форме $E = E(T)$, $\eta = \eta(T)$ [6, 7]. МФ $F(x)/E$ управляет (нелинейно) упругими свойствами, а $V(x)/\eta$ задает зависимость скорости вязкопластической деформации от напряжения и регулирует наследственные свойства, вязкость, скорость диссипации, релаксации, ползучести [1, 2, 4] и накопления пластической деформации при циклическом нагружении [7], длительную прочность [3] и чувствительность напряжения (в частности, мгновенного модуля и предела текучести) к скорости деформации [5]. Минимальные ограничения на МФ: $F(x)$, $x \in (\omega_-, \omega_+)$, — непрерывная (строго) возрастающая функция с кусочно-непрерывной производной, такая, что $F(0) = 0$; $V(x)$ — непрерывная (нестрого) возрастающая функция на интервале (ω_-, ω_+) , такая, что $V(0) = 0$.

Данная работа продолжает цикл статей [1–8] по системному исследованию ОС (1) с целью определения его области применимости и арсенала возможностей, комплекса адекватно моделируемых реологических эффектов, наблюдаемых в испытаниях реономных материалов, и способов идентификации, настройки и верификации. В них аналитически изучены (при указанных минимальных ограничениях на МФ) уравнения семейств порождаемых ОС (1) базовых квазистатических кривых: кривых релаксации и ползучести с произвольной начальной стадией нагружения до заданного уровня, ползучести при ступенчатых нагружениях, длительной прочности, диаграмм деформирования при постоянных и кусочно-постоянных скоростях нагружения или деформирования, при циклических нагружениях. Исследованы общие свойства этих кривых в зависимости от параметров программ нагружения и характеристик МФ: интервалы монотонности и выпуклости, точки перегиба, отклики на разрывы входного процесса (скачки и изломы), асимптотики и двусторонние оценки теоретических кривых, характер сходимости их семейств к предельным кривым при стремлении параметров программ нагружения (ско-

рости деформирования или нагружения, длительности начальной стадии нагружения и др.) к нулю и бесконечности, условия затухания памяти, влияние перестановки ступеней нагружения на асимптотику и остаточную деформацию и т. п. В результате сопоставления обнаруженных свойств теоретических кривых с типичными качественными свойствами кривых испытаний широкого класса вязкоупругопластичных материалов (с целевым списком механических эффектов) выведены необходимые дополнительные ограничения на МФ, обеспечивающие адекватное моделирование основных реологических эффектов, выявлены теоретико-экспериментальные индикаторы применимости ОС (1) и те эффекты, которые ОС принципиально не может описать ни при каких МФ. Математические свойства оператора (1), обзоры литературы и родственных (1) моделей, применяемых в теории ползучести, сверхпластичности и механике полимеров, учет влияния температуры, методики идентификации и обобщение ОС (1) на трехмерный случай приведены в [2–8].

Анализ показал, в частности, что следует различать два основных случая, в которых ОС (1) (моделируемый материал) ведет себя по-разному:

- 1) $|V(x)| > 0$ при $x \neq 0$,
- 2) $V(x) \equiv 0$ на некотором отрезке $Z := [\sigma_-, \sigma_+] \subset (\omega_-, \omega_+)$, $\sigma_- \leq 0$, $\sigma_+ \geq 0$, $\sigma_+ \neq \sigma_-$ (по определению Z — множество всех нулей МФ $V(x)$).

Во втором случае при $\sigma(t) \in Z$ ОС (1) моделирует (нелинейно) упругое поведение материала (диссипации и гистерезиса нет, релаксация и ползучесть отсутствуют, диаграмма деформирования не зависит от скорости нагружения или деформации при $\varepsilon \in [\varepsilon_-, \varepsilon_+]$, где $\varepsilon_{\pm} := E^{-1}F(\sigma_{\pm})$), σ_- , σ_+ играют роль пределов упругости и ползучести материала при сжатии и растяжении, а при $\sigma > \sigma_+$ (или $\sigma < \sigma_-$) начинают проявляться диссипативные и вязкопластические свойства.

В данной статье будут изучены свойства диаграмм деформирования (ДД) $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$ при постоянной скорости нагружения (СН) b и диаграмм нагружения и разгрузки (ДНР) $\varepsilon = \varepsilon(\sigma, b, t_*)$ и $\sigma = \sigma(\varepsilon, b, t_*)$, порождаемых ОС (1) с произвольными МФ F и V при нагружении с постоянной СН b в течение времени t_* и разгрузке с той же скоростью.

При этом нас будут интересовать не только базовые свойства монотонности $\sigma(\varepsilon, b)$ по ε и b , но и условия наличия или отсутствия некоторых дополнительных свойств (опций) ДД и ДНР, характерных для разных (под)классов реономных материалов [9–50]: выпуклость ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ вверх или наличие у них точек перегиба и интервала выпуклости вниз; существование и форма мгновенной и равновесной ДД (предельных кривых семейства ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ при $b \rightarrow \infty$ и $b \rightarrow 0 \pm 0$); конечность мгновенных модулей E_+ и E_- при растяжении и сжатии (т. е. предельных значений касательного модуля $\partial\sigma/\partial\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$ и $\varepsilon \rightarrow 0-$) и характер их зависимости от СН b ; возможность моделирования зависимости ДД (или только её части вне заданной окрестности нуля) от знака напряжения (“tension compression asymmetry”), в частности разномодульности ($E_- \neq E_+$); условия наличия начального участка ДД, не зависящего от скорости нагружения; интервалы монотонности и выпуклости ДНР, условия наличия точки перегиба на ветви разгрузки в зависимости от МФ и параметров программы нагружения b и t_* , условия, при которых в начале разгрузки происходит дальнейшее нарастание деформации; условия близости разгрузки к линейной; величина остаточной деформации после

полной разгрузки, ее зависимость от МФ, b и t_* и др.

Исследование общих качественных свойств диаграмм нагружения и разгрузки полезно для ответа на несколько практически важных комплексных вопросов, касающихся аттестации и возможных приложений ОС (1).

1. Каковы общие свойства и характерные особенности ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ и ДНР $\varepsilon(\sigma; b, t_*)$, порождаемых ОС (1), являющиеся его атрибутами и «портретными чертами»? Каковы опции, которыми можно управлять за счет подбора специальных свойств МФ?
2. Какими свойствами обладает отклик ОС (1) на циклические программы нагружения с постоянными скоростями нагружения и разгрузки? Как выражается скорость накопления пластической деформации за цикл нагрузки–разгрузки, как она зависит от параметров цикла и МФ, при каких условиях моделируется рэтчетинг, а при каких — приспособляемость?
3. Какие эффекты, наблюдаемые при указанных испытаниях материалов [9–50] (см. ниже), способно или не способно описывать ОС (1)?
4. Как по экспериментальным ДНР некоторого материала или по нескольким циклам нагрузки–разгрузки решить, пригодно ли ОС (1) для его моделирования (каковы индикаторы применимости или неприменимости ОС, удобные для проверки по данным испытаний)?
5. Какими способами можно идентифицировать МФ ОС (1) по данным испытаний материала, если индикаторы применимости не свидетельствуют о его принципиальной непригодности для моделирования данного материала?
6. Нужно ли (и по каким причинам) вносить коррективы в ОС (1), чтобы более адекватно и полно описывать механические эффекты при разгрузке?

1. Базовые свойства диаграмм нагружения с постоянными скоростями. Уравнение семейства диаграмм деформирования (ДД) с постоянной скоростью нагружения $b > 0$ (для входного процесса $\sigma(t) = bt$), порождаемых ОС (1), имеет вид

$$\varepsilon(\sigma, b) = E^{-1}F(\sigma) + (b\eta)^{-1}Y(\sigma), \quad Y(s) := \int_0^s V(x)dx, \quad b, \sigma > 0. \quad (2)$$

Если $\sigma_+ > 0$ и $V(x) \equiv 0$ при $x \in [0; \sigma_+]$, то при $\sigma < \sigma_+$ $Y(\sigma) \equiv 0$, и потому ДД (2) имеет вид $\varepsilon(\sigma, b) = E^{-1}F(\sigma)$, т. е. модель описывает поведение нелинейно упругого материала, диссипация энергии и зависимость ДД от скорости нагружения отсутствует. При $\sigma > \sigma_+$ $V(x) > 0$, $Y(\sigma) > 0$ и потому ДД зависят от СН. Так как $Y(\sigma) > 0$, семейство ДД (2) убывает по b при $\sigma > \sigma_+$ (чем больше скорость нагружения, тем выше жесткость, и тем ниже лежит ДД $\varepsilon(\sigma, b)$ и тем выше лежит ДД в обратной форме $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$).

При указанных выше минимальных ограничениях на две МФ аналитически исследовано представление ДД (2) и доказаны следующие свойства ДД $\sigma(\varepsilon, b)$, $b > 0$ [5].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $F(x)$, $x \in (\omega_-, \omega_+)$, — непрерывная (строго) возрастающая функция с кусочно-непрерывной производной, $V(x)$ — непрерывная (нестрого) возрастающая функция, $F(0) = 0$, $V(0) = 0$ и $b > 0$. Тогда ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ обладает свойствами:

- 1) для любой СН b $\sigma(0, b) = 0$ и $\sigma(\varepsilon, b)$ возрастает по ε на луче $\varepsilon \geq 0$;
- 2) $\sigma(\varepsilon, b)$ возрастает по b (при любом $\varepsilon > 0$), т. е. ОС (1) моделирует положительную скоростную чувствительность материала (возрастание жесткости с ростом $|b|$);
- 3) касательный модуль ДД $\partial\sigma/\partial\varepsilon = E[F'(\sigma) + (\tau_r b)^{-1}V(\sigma)]^{-1}$ зависит от СН (возрастает по b), но его предельные значения при $\varepsilon \rightarrow 0+$ и $\varepsilon \rightarrow 0-$ (мгновенные модули при растяжении и сжатии) $E_{\pm} = EF'(0_{\pm})^{-1} = Ef'(0_{\pm})$ не зависят от СН и МФ V , т. е. все ДД имеют общую касательную $\sigma = E_{+\varepsilon}$ в точке $\varepsilon = 0+$ и $\sigma = E_{-\varepsilon}$ в точке $\varepsilon = 0-$;
- 4) ОС (1) моделирует разномодульность материала только в случае $F'(0-) \neq F'(0+)$;
- 5) при $b \rightarrow \infty$ семейство ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ сходится на луче $\varepsilon \geq 0$ к кривой $\sigma = f(E\varepsilon)$ (ДД мгновенного нагружения) равномерно на любом отрезке оси ε ;
- 6) при $b \rightarrow 0+$ семейство ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ сходится к постоянной функции $\sigma = \sigma_+$ на луче $\varepsilon \geq \varepsilon_+$, где $\varepsilon_+ := E^{-1}F(\sigma_+)$, а при $\varepsilon \in [0; \varepsilon_+]$ — к функции $\sigma = f(E\varepsilon)$ (к равновесной ДД); в случае $\sigma_+ = 0$ семейство ДД сходится к $\sigma \equiv 0$ при всех $\varepsilon \geq 0$;
- 7) если $\sigma_+ > 0$ и $V(x) \equiv 0$ при $x \in [0, \sigma_+]$, то ОС (1) моделирует упругое поведение при $\sigma \in [0; \sigma_+]$ и все ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ совпадают на начальном участке $\varepsilon \in [0; \varepsilon_+]$ с кривой мгновенного (упругого) деформирования $\sigma = f(E\varepsilon)$;
- 8) если $F''(x) \geq 0$ при $x \geq 0$, то для всех $b > 0$ ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ и предельная ДД $\sigma(\varepsilon, \infty) = f(E\varepsilon)$ выпуклы вверх на полусоси $\varepsilon > 0$ и касательный модуль $\partial\sigma/\partial\varepsilon$ убывает с ростом ε ;
- 9) в случае, когда $F''(x) < 0$ на некотором интервале I , возможны наличие точки перегиба $\tilde{\sigma}(b) \in I$ у ДД (2) (где $\tilde{\sigma}(b)$ — корень уравнения $\tau_r b F''(\sigma) + V'(\sigma) = 0$) и выпуклость вниз ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ при достаточно малых $\varepsilon < \tilde{\varepsilon}(b)$.

Все обнаруженные общие свойства ДД при растяжении справедливы и для ДД при сжатии, т. е. при $b < 0$ (и $\sigma < 0$): в пунктах 1, 2, 5, 8, 9 надо лишь заменить знаки всех неравенств на обратные и выпуклость вверх на выпуклость вниз; а в пунктах 6 и 7 заменить $b \rightarrow 0+$ на $b \rightarrow 0-$, $\sigma_+ \geq 0$ на $\sigma_- \leq 0$, $\varepsilon_+ \geq 0$ на $\varepsilon_- := E^{-1}F(\sigma_-) \leq 0$, отрезок $[0; \varepsilon_+]$ на $[\varepsilon_-; 0]$, $[0, \sigma_+]$ на $[\sigma_-; 0]$. Параметр $\sigma_- \leq 0$ (нижняя грань множества нулей МФ $V(x)$) имеет при сжатии такой же физический смысл, как σ_+ при растяжении.

Отметим, что многие свойства ДД нелинейного ОС (1) аналогичны свойствам ДД линейного интегрального ОС вязкоупругости [51, 52]. Но в отличие от ДД линейного ОС, которые всегда выпуклы вверх, ДД ОС (1) могут иметь участки выпуклости вниз (в частности в окрестности нуля) и точки перегиба; мгновенная и равновесная диаграммы ОС (1) уже не обязательно прямолинейны (формой первой управляет МФ F , а второй — еще и параметр σ_+ , если $\sigma_+ > 0$); зависимость ДД от скорости нагружения b нелинейна и может быть существенно разной при растяжении и сжатии.

ОС (1) не способно описывать поведение материалов, чьи ДД имеют падающий участок, и тех, у которых достоверно установлена зависимость мгновенного или длительного модуля от скорости нагружения (деформирования)

или отрицательная скоростная чувствительность.

В испытаниях ряда материалов с выраженной скоростной чувствительностью (полимеры при достаточно высоких температурах, пластичные металлы и сплавы: медь, олово, алюминий, титановые сплавы в сверхпластичном состоянии и др.) зарегистрирована зависимость мгновенного модуля от скорости нагружения (или деформирования) [9–20]. Нелинейное ОС (1) (так же как и линейное ОС вязкоупругости [51, 52]) этот эффект описать не может (без замены мгновенного модуля секущим или усредненным). Это один из индикаторов его области (не)применимости по кривым испытаний материалов — наряду с неспособностью ОС (1) моделировать ползучесть с возрастающей скоростью, затухающую память, восстановление после полной разгрузки (в частности обратную ползучесть), зависимость кривых ползучести при ступенчатых нагружениях и накопленной пластической деформации от перестановки предшествующих ступеней нагружения, эффект Маллинза, уменьшение скорости накопления пластической деформации и приспособляемость при несимметричных циклических нагружениях [1–8] и т. п.

Тем не менее, обнаруженное свойство независимости мгновенного модуля ДД ОС (1) от СН отражает наблюдаемое в испытаниях большинства материалов явление: многие металлы и сплавы при умеренных температурах, полимеры в стеклообразном состоянии и другие материалы проявляют заметную чувствительность к СН лишь при достаточно больших деформациях, по крайней мере, эту чувствительность трудно обнаружить по ЭДД при малых ε : их начальные линейные участки совпадают в том разрешении, с которым регистрируются ДД [9, 21–25] (свойство 7 модели с $\sigma_+ > 0$). Задание ненулевого предела упругости σ_+ и МФ $V(x) \equiv 0$ при $x \in [0, \sigma_+]$ позволяет обеспечить не только совпадение касательных всех ДД в точке $\varepsilon = 0+$, но и точное совпадение начальных участков всех ДД (с кривой $\sigma = f(E\varepsilon)$, $\varepsilon \leq \varepsilon_+$, где $\varepsilon_+ := E^{-1}F(\sigma_+)$) при $\sigma \leq \sigma_+$.

Из свойств 6 и 7 следует, что равновесная ДД ОС (1) имеет существенно разный вид в случаях $\sigma_+ = 0$ (когда $|V(x)| > 0$ при $x \neq 0$) или $\sigma_+ > 0$ (когда $V(x) \equiv 0$ при $x \in [0, \sigma_+]$): в случае $\sigma_+ = 0$ семейство ДД $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$ сходится при $b \rightarrow 0+$ к нулю на всем луче $\varepsilon \geq 0$, а в случае $\sigma_+ > 0$ семейство ДД сходится к диаграмме упруго-пластического материала с пределом текучести $\sigma_y = \sigma_+$ и начальным участком $\sigma = f(E\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0; \varepsilon_+]$.

Выпуклость вверх ДД вплоть до начала разрушения (свойство 8) или до площадки текучести характерна для многих полимеров, асфальтобетонов, металлов и сплавов со скоростной чувствительностью [9–32].

На рис. 1 приведены ДД $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$ для модели с $\sigma_+ = 0$ и МФ $F(x) = A(e^{\lambda x} - 1)$, $A, \lambda > 0$ и $V = x^n$ с $n = 2, 4$, $A = \lambda = 1$, $E = 100$, $\eta = 100$ для СН $b = 10^{-s}$, $s = 0; 1; 2; 3; 4$. Так как $F''(x) > 0$, все ДД $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$ выпуклы вверх. Штриховые кривые — предельные ДД $\sigma = f(E\varepsilon)$ при $b \rightarrow \infty$, т. е. $\sigma = \lambda^{-1} \ln(1 + EA^{-1}\varepsilon)$ и $\sigma = 0$ при $b \rightarrow 0$ (равновесная ДД).

Свойство 8 (выпуклость вниз в окрестности нуля, малый, но быстро растущий касательный модуль, наличие точки перегиба) присущи кривым растяжения многих эластомеров (каучуков, резин), пенопластов (пенополивинилхлорид, пенополиуретан и др.) и биологических тканей (связок, сухожилий, сосудов и т. п.) [33–38].

На рис. 2 приведены ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ модели с $F = x^m$, $V = x^n$, $m = 0.5$,

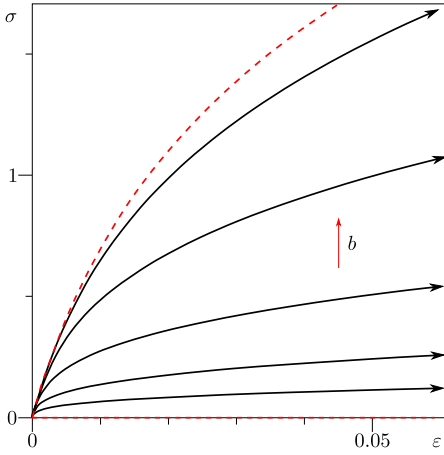


Рис. 1. Диаграммы нагружения модели с $\sigma_+ = 0$, $\tau_r = 1$, $F = e^x - 1$ и $V = x^2$ для скоростей нагружения $b = 10^{-s}$, $s = 0; 1; 2; 3; 4$ [Figure 1. Stress-strain curves generated by the model with $\sigma_+ = 0$, $\tau_r = 1$, $F = e^x - 1$ and $V = x^2$ at stress rates $b = 10^{-s}$, $s = 0; 1; 2; 3; 4$ (color online)]

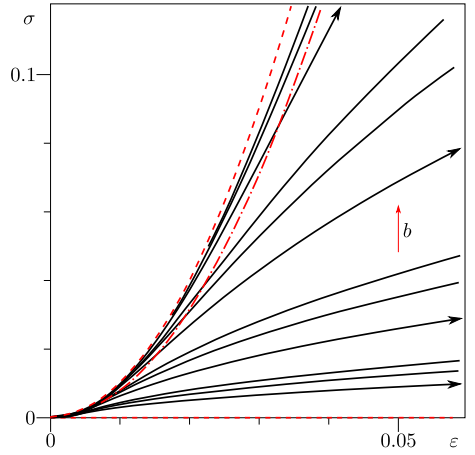


Рис. 2. Диаграммы нагружения модели с $\sigma_+ = 0$, $\tau_r = 1$, $F = x^{1/2}$ и $V = x$ для скоростей $b = 1 \cdot 10^{-s}$; $2 \cdot 10^{-s}$; $3 \cdot 10^{-s}$, $s = 1; 2; 3; 4$ [Figure 2. Stress-strain curves generated by the model with $\sigma_+ = 0$, $\tau_r = 1$, $F = x^{1/2}$ and $V = x$ at stress rates $b = 1 \cdot 10^{-s}$; $2 \cdot 10^{-s}$; $3 \cdot 10^{-s}$, $s = 1; 2; 3; 4$ (color online)]

$n = 1$, $\eta = 10$, $E = 10$, $\tau_r = 1$ для разных СН, пробегающих три порядка: $b = 1 \cdot 10^{-s}$; $2 \cdot 10^{-s}$; $3 \cdot 10^{-s}$, $s = 1; 2; 3; 4$ (ДД для $b = 1 \cdot 10^{-s}$ помечены стрелками). С ростом СН ветвь нагрузки смещается вверх. Штриховые ДД — предельные кривые $\sigma = f(E\varepsilon)$, $f := F^{-1} = y^{1/m}$, при $b \rightarrow \infty$ (ДД мгновенного нагружения) и $\sigma = 0$ при $b \rightarrow 0$ (равновесная ДД). Штрих-пунктирная кривая — геометрическое место точек перегиба $(\tilde{\varepsilon}(b), \tilde{\sigma}(b))$ ДД при различных $b > 0$, ее пересечение с конкретной ДД — точка перегиба последней (кривая $\{(\tilde{\varepsilon}(b), \tilde{\sigma}(b)) \mid b > 0\}$ не зависит от величин параметров η и τ_r , так как $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\varepsilon}$ зависят от параметра $\tau_r b$, а η входит только в него).

На рис. 3 приведены ДД $\sigma(\varepsilon; b)$ модели с $\sigma_+ > 0$ и МФ $V(x) \equiv 0$ при $x \in [\sigma_-, \sigma_+]$:

$$V = \begin{cases} A_+(x - \sigma_+)^n & \text{при } x > \sigma_+, \\ -A_-|x - \sigma_-|^m & \text{при } x < \sigma_-; \end{cases} \quad (3)$$

$$F(x) = x + \gamma V(x) \quad \text{при } x > 0,$$

$A_+, A_- > 0$, $m, n \geq 1$, $\gamma \geq 0$ (при $\gamma \geq 0$ автоматически выполняются ограничения $F'(x) > 0$ и $F(0) = 0$ на МФ F , если они выполнены для V , а для МФ (3) они выполнены). При $\sigma \in [\sigma_-, \sigma_+]$ эта модель описывает линейно упругий материал с модулем упругости E (при растяжении и сжатии), а при $\sigma \notin [\sigma_-, \sigma_+]$ проявляются реономные свойства и разносопротивляемость (если $\sigma_- \neq -\sigma_+$ или $A_- \neq A_+$ или $m \neq n$). В уравнении (2) $Y(\sigma) = 0$ при $\sigma \in [0, \sigma_+]$, а при $\sigma > \sigma_+$ $Y(\sigma) = A_+(n+1)^{-1}(\sigma - \sigma_+)^{n+1}$. Поэтому ДД принимает вид

$$\varepsilon(\sigma, b) = \begin{cases} E^{-1}[\sigma + \gamma V(\sigma)] & \text{при } \sigma \in [0, \sigma_+], \\ E^{-1}[\sigma + \gamma A_+(\sigma - \sigma_+)^n + A_+(n+1)^{-1}(\sigma - \sigma_+)^{n+1}(\tau_r b)^{-1}] & \text{при } \sigma > \sigma_+. \end{cases}$$

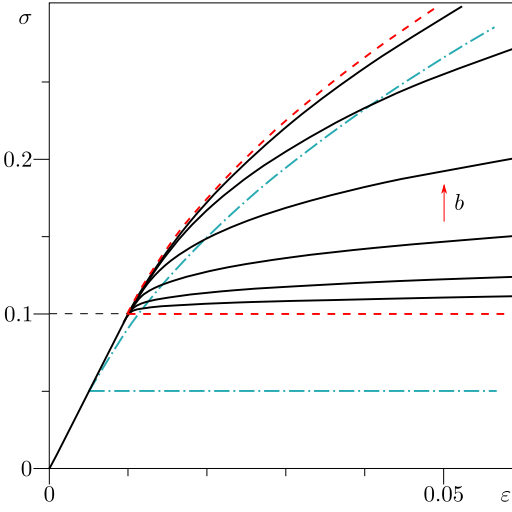


Рис. 3. Диаграммы нагружения модели с σ_+ и МФ (3) для скоростей $b = 10^{-s}$, $s = 1; 2; \dots; 6$ (онлайн в цвете)

[Figure 3. Stress-strain curves generated by the model (3) with σ_+ at stress rates $b = 10^{-s}$, $s = 1; 2; \dots; 6$ (color online)]

На рис. 3 приведены ДД модели (3) с $\gamma = 5$, $\sigma_+ = 0.1$, $n = 2$, $A_+ = 1$, $\eta = 10$, $E = 10$, $\tau_r = 1$ для СН $b = 10^{-s}$, $s = 1; 2; \dots; 6$. У всех ДД есть общий прямолинейный участок $\sigma = E\varepsilon$, $\varepsilon \leq \varepsilon_+$, $\varepsilon_+ := E^{-1}F(\sigma_+) = E^{-1}\sigma_+$, не зависящий от СН. При $\sigma > \sigma_+$ ДД зависят от СН и с ростом b смещаются вверх. Красная штриховая кривая — предельная ДД при $b \rightarrow \infty$. При $b \rightarrow 0$ $\sigma(\varepsilon, b) \rightarrow \sigma_+$ для любого $\varepsilon \geq \varepsilon_+$ ($\sigma = \sigma_+$ — горизонтальная штриховая прямая), т. е. семейство ДД сходится при всех $\varepsilon > 0$ к диаграмме идеального упругопластического материала с пределом текучести (при растяжении) $\sigma_y = \sigma_+$. Отметим, что эти ДД качественно схожи с экспериментальными ДД полимеров в стеклообразном состоянии и многих сплавов [9, 21–25]. Так как $\gamma > 0$, ДД мгновенного нагружения (предельная ДД при $b \rightarrow \infty$) нелинейна при $\sigma > \sigma_+$ (штриховая кривая). Для сравнения голубым штрих-пунктиром показаны предельные ДД при $b \rightarrow \infty$ и $b \rightarrow 0$ в случае $\sigma_+ = 0.05$.

2. Свойства отклика ОС на треугольные импульсы нагрузки-разгрузки. Для треугольной программы нагрузки-разгрузки с постоянной скоростью $b > 0$,

$$\sigma(t) = \begin{cases} bt & \text{при } t \in [0; t_*], \\ -bt + 2bt_* & \text{при } t \in (t_*; 2t_*), \\ 0 & \text{при } t > 2t_*, \end{cases} \quad (4)$$

с длительностью полупикула $t_* = T/2 > 0$ и максимальным напряжением $\sigma_{\max} = bt_* \in (\omega_-, \omega_+)$ ОС (1) дает непрерывный кусочно-гладкий отклик $\varepsilon(t) = \Lambda(t; b, t_*)$:

$$\Lambda(t; b, t_*) = E^{-1}F(bt) + \eta^{-1} \int_0^t V(b\tau) d\tau \quad \text{при } t \in [0; t_*], \quad (5)$$

$$\Lambda(t; b, t_*) = 0.5p(b, T) + E^{-1}F(b(T-t)) + \eta^{-1} \int_{T/2}^t V(b(T-\tau)) d\tau \quad \text{при } t \in (t_*; 2t_*), \quad (6)$$

$$\Lambda(t; b, t_*) = p(b, T) = \text{const} \quad \text{при } t > T, \quad (7)$$

где $p(b, T)$ — остаточная деформация после цикла нагружки-разгрузки:

$$p(b, T) = \Lambda(T; b, T) = \eta^{-1} T \sigma_{\max}^{-1} I(\sigma_{\max}), \quad I(\sigma_{\max}) = \int_0^{bt_*} V(x) dx. \quad (8)$$

Формулы (4) и (5)–(7) — параметрическое представление семейства диаграмм нагружения-разгрузки $\varepsilon(\sigma; b, t_*)$ и $\sigma(\varepsilon; b, t_*)$ с постоянными скоростями, порождаемых ОС (1).

Деформация в момент начала разгрузки $\varepsilon_* = \Lambda(t_*; b, t_*)$ выражается из (6):

$$\varepsilon_*(b, t_*) = E^{-1} F(\sigma_{\max}) + 0.5p(b, T). \quad (9)$$

Если $\sigma_{\max} > \sigma_+$ (в частности при любых $b, t_* > 0$ в случае $\sigma_+ = 0$), то $p(b, T) > 0$, т. к. $V(x) > 0$ при $x > \sigma_+$. При постоянном $\sigma_{\max} = bt_* > \sigma_+$ величины ε_* и $p(b, T)$ растут линейно по T (и убывают по b). В работе [39] отмечено, что остаточная деформация ряда термопластичных эластомеров за цикл нагружки-разгрузки до фиксированной максимальной деформации не зависит от скорости деформации. Формулы (7), (8) показывают, что ОС (1) не моделирует аналогичное свойство в случае нагружений с постоянной скоростью.

При фиксированных $t, T > 0$ функция $\Lambda(t; b, t_*)$ (и ДНР $\sigma(\varepsilon; b, t_*)$) возрастает по b (так как $F(x)$ и $V(x)$ возрастают). При $t \in [0; t_*]$ $\Lambda(t; b, t_*)$ всегда возрастает по t (соответственно, $\sigma(\varepsilon, b)$ возрастает по ε), а если $F''(x) \geq 0$, то $\Lambda(t)$ выпукла вниз, а ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ выпукла вверх (см. п. 1). На участке разгрузки $(t_*; 2t_*)$ функция $\Lambda(t)$ может вести себя по-разному в зависимости от свойств МФ и параметров программы нагружения (4): она может убывать и быть выпуклой вверх на всем интервале $(t_*; 2t_*)$ (как у многих материалов [9, 10, 17, 18, 22–24, 27, 31, 32, 38, 40–42]), а может возрастать в правой окрестности t_* и иметь точку максимума и при этом может быть выпуклой вверх на всем интервале $(t_*; 2t_*)$ или иметь точку перегиба. Соответственно, на кривой разгрузки $\varepsilon(\sigma; b, t_*)$ могут быть точка перегиба и интервал возрастания. Такое поведение кривых разгрузки тоже наблюдается у многих материалов [19, 28–30, 35–37, 39, 43–50] в определенных режимах нагружения.

Продифференцируем (5)–(7) по времени:

$$\dot{\Lambda}(t) = \begin{cases} E^{-1} b F'(bt) + \eta^{-1} V(bt) > 0 & \text{при } t \in [0; t_*], \\ E^{-1} b F'(b(2t_* - t)) + \eta^{-1} V(b(2t_* - t)) & \text{при } t \in (t_*; 2t_*); \end{cases} \quad (10)$$

$$\ddot{\Lambda}(t) = \begin{cases} E^{-1} b^2 F''(bt) + \eta^{-1} b V'(bt) > 0 & \text{при } t \in [0; t_*], \\ E^{-1} b^2 F''(b(2t_* - t)) - \eta^{-1} b V'(b(2t_* - t)) & \text{при } t \in (t_*; 2t_*). \end{cases}$$

В силу (10) скорости деформации на участках нагружки и разгрузки связаны тождеством

$$\dot{\Lambda}(t) + \dot{\Lambda}(2t_* - t) = 2\eta^{-1} V(bt) \quad \text{при } t \in (0; t_*). \quad (11)$$

Производная $\dot{\Lambda}(t)$ имеет разрывы первого рода в точках $t = t_*$ и $t = 2t_*$,

ее пределы и скачки в этих точках выражаются формулами

$$\begin{aligned}
 \dot{\Lambda}(t_* - 0) &= E^{-1}bF'(bt_*) + \eta^{-1}V(bt_*), \\
 \dot{\Lambda}(t_* + 0) &= -bE^{-1}F'(bt_*) + \eta^{-1}V(bt_*), \\
 \dot{\Lambda}(2t_* - 0) &= -bE^{-1}F'(0) + \eta^{-1}V(0) = -bE^{-1}F'(0) = -\dot{\Lambda}(0 + 0), \\
 \dot{\Lambda}(2t_* + 0) &= 0, \\
 \dot{\Lambda}(t_* + 0) - \dot{\Lambda}(t_* - 0) &= -2E^{-1}bF'(bt_*), \\
 \dot{\Lambda}(2t_* + 0) - \dot{\Lambda}(2t_* - 0) &= bE^{-1}F'(0) = \dot{\Lambda}(0 + 0).
 \end{aligned} \tag{12}$$

Знаки слагаемых в (10) противоположны, поэтому не обязательно $\dot{\Lambda}(t) < 0$, деформация (6) не обязана убывать и может иметь точку максимума на $(t_*; 2t_*)$. Например, для линейной модели (1) (с $V(x) = F(x) = x$) имеем $p(b, T) = \eta^{-1}bt_*^2$,

$$\Lambda(t) = \begin{cases} E^{-1}bt + 0.5\eta^{-1}bt^2 = bE^{-1}t(1 + 0.5t\tau_r^{-1}) & \text{при } t \in [0; t_*]; \\ 0.5\eta^{-1}b[-(t - (2t_* - \tau_r))^2 + \tau_r^2 + 2t_*^2] & \text{при } t \in (t_*; 2t_*); \\ \eta^{-1}bt_*^2 & \text{при } t > 2t_*, \end{cases} \tag{13}$$

где $\tau_r = \eta/E$ — время релаксации. При любых $b, T > 0$ график $\Lambda(t)$ на $(t_*; 2t_*)$ — выпуклая вверх парабола, и $\dot{\Lambda} = 0$ при $\hat{t} = 2t_* - \tau_r$. Если $\hat{t} \in (t_*; 2t_*)$, т. е. $t_* > \tau_r$, то \hat{t} — точка максимума, функция (13) возрастает на (t_*, \hat{t}) и убывает на $(\hat{t}, 2t_*)$, а максимальная деформация равна $\Lambda(\hat{t}) = \eta^{-1}b(0.5\tau_r^2 + t_*^2)$. Если же $\hat{t} \leq t_*$, т. е. $t_* \leq \tau_r$, то (13) убывает на всем интервале $(t_*; 2t_*)$. Возрастание $\Lambda(t)$ на всем интервале $(t_*; 2t_*)$ (т. е. $\hat{t} \geq 2t_*$) невозможно, так как $\tau_r > 0$.

На рис. 4,а приведены графики $\varepsilon = \Lambda(t)$ с $t_* = 5, b = 0.01$ (кривые 1–5) для линейной модели Максвелла с $\eta = 10$ и разными $E = 100; 10; 10/3; 2; 1$ ($\tau_r = 0.1; 1; 3; 5; 10$). Голубая кривая 2 для $\tau_r = t_* = 5$ (с $\dot{\Lambda}(t_* + 0) = 0$) разделяет кривые, убывающие на всем $(t_*; 2t_*)$ (для $\tau_r \geq t_*$), и кривые с точкой максимума (для $\tau_r < t_*$). С уменьшением τ_r/t_* (ростом E) график $\Lambda(t)$ на $(0; T)$ целиком смещается вниз, точка максимума \hat{t} сдвигается вправо и $\hat{t} \rightarrow T$ при $E \rightarrow \infty$. Штриховая кривая (без изломов) — предельная кривая семейства $\Lambda(t)$ при $E \rightarrow \infty, \eta = \text{const}$ ($\tau_r \rightarrow 0$), т. е. отклик линейно-вязкого элемента:

$$\Lambda_\infty(t) = \begin{cases} 0.5\eta^{-1}bt^2 & \text{при } t \in [0; t_*], \\ 0.5\eta^{-1}b[-(t - 2t_*)^2 + 2t_*^2] & \text{при } t \in (t_*; 2t_*). \end{cases}$$

На рис. 4,б приведены диаграммы нагружения и разгрузки $\sigma = \sigma(\varepsilon; b, t_*)$ той же линейной модели Максвелла, что и на рис. 4,а, при тех же значениях t_*, b, η и $\tau_r = 10; 5; 3; 1; 0.1$, т. е. кривые, заданные параметрически формулами (4) и (5)–(7). Голубая кривая 2 — ДНР для $\tau_r = t_* = 5$, разделяющая ДНР с монотонным и немонотонным изменением деформации при разгрузке. С уменьшением τ_r/t_* (ростом E) ДНР $\sigma = \sigma(\varepsilon; b, t_*)$ целиком смещается влево, а точка с максимальной деформацией сдвигается вниз к оси $\sigma = 0$

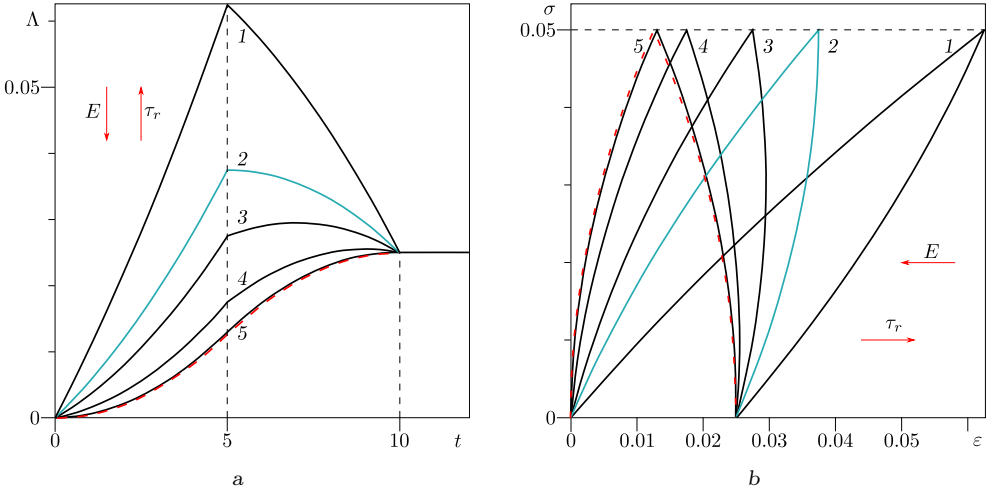


Рис. 4. Диаграммы нагружения и разгрузки линейных моделей Максвелла с разными $\tau_r = 0.1; 1; 3; 5; 10$ (кривые 1–5) при $t_* = 5, b = 0.01$: (a) зависимость деформации $\varepsilon = \Lambda(t)$ от времени, (b) зависимость $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ (онлайн в цвете)

[Figure 4. Loading-unloading-rest curves generated by the linear Maxwell models with different relaxation times $t_* = 5, b = 0.01$ for $t_* = 5, b = 0.01$: (a) strain dependences on time $\varepsilon = \Lambda(t)$, (b) stress-strain curves $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ (color online)]

($\hat{t} \rightarrow T$). Штриховая кривая — предельная кривая семейства $\sigma = \sigma(\varepsilon; b, t_*)$ при $E \rightarrow \infty, \eta = \text{const}$ (т. е. $\tau_r \rightarrow 0$), т. е. ДНР линейно-вязкого элемента Ньютона.

Отмеченные свойства отклика линейной модели Максвелла справедливы и для отклика (5)–(7) на треугольные импульсы нагрузки-разгрузки любой модели (1) с $F(x) = x$ и произвольной $V(x)$. Для таких моделей

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}(t) &= \begin{cases} E^{-1}b + \eta^{-1}V(bt) > 0 & \text{при } t \in [0; t_*], \\ \eta^{-1}V(b(2t_* - t)) - bE^{-1} & \text{при } t \in (t_*; 2t_*); \end{cases} \\ \ddot{\Lambda}(t) &= \begin{cases} \eta^{-1}bV'(bt) > 0 & \text{при } t \in [0; t_*], \\ -\eta^{-1}bV'(b(2t_* - t)) < 0 & \text{при } t \in (t_*; 2t_*), \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

и деформация $\Lambda(t)$ обладает свойствами, перечисленными в теореме 2.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $F(x) = x$, а $V(x)$ — произвольная непрерывная (не строго) возрастающая функция на интервале (ω_-, ω_+) , $V(0) = 0$, $\eta, E > 0$ и $t_*, b > 0$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) при $t \in [0; t_*]$ функция $\Lambda(t)$ всегда возрастает и выпукла вниз;
- 2) при $t \in (t_*; 2t_*)$ функция $\Lambda(t)$ всегда выпукла вверх, но не обязана быть монотонной; критерий ее убывания на всем интервале $(t_*; 2t_*)$ имеет вид $V(bt_*) \leq b\tau_r$ или

$$t_*/\tau_r \leq \sigma_{\max}/V(\sigma_{\max}), \quad \sigma_{\max} = bt_*; \quad (15)$$

- 3) если $V(bt_*) > b\tau_r$, то деформация $\Lambda(t)$ имеет в интервале $(t_*; 2t_*)$ точку максимума

$$\hat{t} = 2t_* - b^{-1}v(\tau_r b), \quad (16)$$

где $v := V^{-1}$, и $\Lambda(t)$ возрастает на $(t_*; \widehat{t})$; функция $\widehat{t}(\tau_r, b)$ всегда убывает по τ_r и $\widehat{t} \rightarrow 2t_*$ при $\tau_r \rightarrow 0$, а характер зависимости \widehat{t} от b определяется свойствами МФ $V(x)$:

- если $xV'(x) - V(x) > 0$ при $x \in (\alpha; \beta)$, то $\widehat{t}(b)$ возрастает по b при $b \in (V(\alpha)/\tau_r; V(\beta)/\tau_r)$; в случае $\alpha = 0$ для этого достаточно выпуклости вниз МФ $V(x)$ на $(0; \beta)$ ($V''(x) > 0$);
- если $xV'(x) - V(x) < 0$ при $x \in (\alpha; \beta)$, то $\widehat{t}(b)$ убывает по b при $b \in (V(\alpha)/\tau_r; V(\beta)/\tau_r)$; в случае $\alpha = 0$ для этого достаточно выпуклости вверх МФ $V(x)$ на $(0; \beta)$ ($V''(x) < 0$).

Доказательство. При $t \in (t_*; 2t_*)$ условие $\dot{\Lambda} = 0$ дает (по (14)) уравнение $V(b(2t_* - t)) = \tau_r b$, его левая часть $y(t) := V(b(2t_* - t))$ — убывающая функция времени на $[t_*; 2t_*]$ (в силу возрастания МФ $V(x)$ и обратной к ней) и принимает значения от $y(2t_*) = 0$ до $y_{\max} = y(t_*) = V(bt_*)$. Так как постоянная $\tau_r b$ положительна, уравнение $\dot{\Lambda} = 0$ имеет решение \widehat{t} в интервале $(t_*; 2t_*)$ тогда и только тогда, когда $y_{\max} > \tau_r b$, т. е. $V(bt_*) > \tau_r b$. Поскольку $y(t)$ убывает, уравнение $\dot{\Lambda} = 0$ имеет единственное решение (16) в $(t_*; 2t_*)$ и \widehat{t} — точка максимума $\Lambda(t)$. Так как $v(z)$ возрастает, \widehat{t} убывает по τ_r . Так как $\partial \widehat{t} / \partial b = b^{-2}[v(\tau_r b) - b\tau_r v'(\tau_r b)]$, возрастание $\widehat{t}(b)$ на интервале $b \in (A; B)$ равносильно условию $v(z) - zv'(z) > 0$ при $z \in (\tau_r A; \tau_r B)$, т. е. $xV'(x) - V(x) > 0$ при $x \in (v(\tau_r A); v(\tau_r B))$ (сделана замена $z = V(x)$). Убывание $\widehat{t}(b)$ на интервале $(A; B)$ равносильно условию $v(z) - zv'(z) < 0$ при $z \in (\tau_r A; \tau_r B)$, т. е. $xV'(x) - V(x) < 0$ при $x \in (v(\tau_r A); v(\tau_r B))$. Если $V''(x) > 0$ на $(0; \beta)$, то функция $g(x) := xV' - V$ возрастает ($g' = xV'' > 0$) и из $g(0) = 0$ следует, что $g(x) > 0$ при $x \in (0; \beta)$. Если $V'' < 0$ на $(0; \beta)$, то $g(x)$ убывает и $g(x) < 0$ при $x \in (0; \beta)$. \square

В частности, для модели с линейной упругостью и степенной вязкостью (с $F(x) = x$, $V(x) = x^n$, $n > 0$) по (8) $p = 2\eta^{-1}(n+1)^{-1}(bt_*)^n t_*$, и формулы (5)–(7) дают:

$$\Lambda(t) = \begin{cases} E^{-1}bt + \eta^{-1}(n+1)^{-1}b^n t^{n+1} & \text{при } t \in [0; t_*]; \\ E^{-1}b(2t_* - t) - \eta^{-1}(n+1)^{-1}b^n(2t_* - t)^{n+1} + \\ \quad + 2\eta^{-1}(n+1)^{-1}(bt_*)^n t_* & \text{при } t \in (t_*; 2t_*); \\ 2\eta^{-1}(n+1)^{-1}(bt_*)^n t_* & \text{при } t > 2t_*. \end{cases} \quad (17)$$

Критерий убывания деформации $\Lambda(t)$ на всем интервале $(t_*; 2t_*)$ (15) имеет вид $(bt_*)^{n-1} \leq \tau_r/t_*$, или $\sigma_{\max}^{n-1} \leq \tau_r/t_*$. В случае $(bt_*)^{n-1} > \tau_r/t_*$ (17) имеет в интервале $(t_*; 2t_*)$ точку максимума $\widehat{t} = 2t_* - (\tau_r b)^{1/n} b^{-1}$ (ее абсцисса $\widehat{t}(b)$ возрастает при $n > 1$ и убывает при $n \in (0; 1)$, а при $n = 1$ не зависит от b), и максимальная деформация

$$\varepsilon_{\max} = \Lambda(\widehat{t}) = E^{-1}(n+1)^{-1}[n(\tau_r b)^{1/n} + 2(bt_*)^n \tau_r^{-1}].$$

На рис. 5 приведены графики $\varepsilon = \Lambda(t; b)$ с $t_* = 5$ для нелинейной модели Максвелла с $F = x$, $V = x^2$, $\eta = 10$, $E = 10$ ($\tau_r = 1$) для разных СН ($b = 0.01s$, $s = 1, 2, \dots, 7$, — на рис. 5,а и $b = 0.1s$, $i = 1, 2, \dots, 7$, — на рис. 5,б).

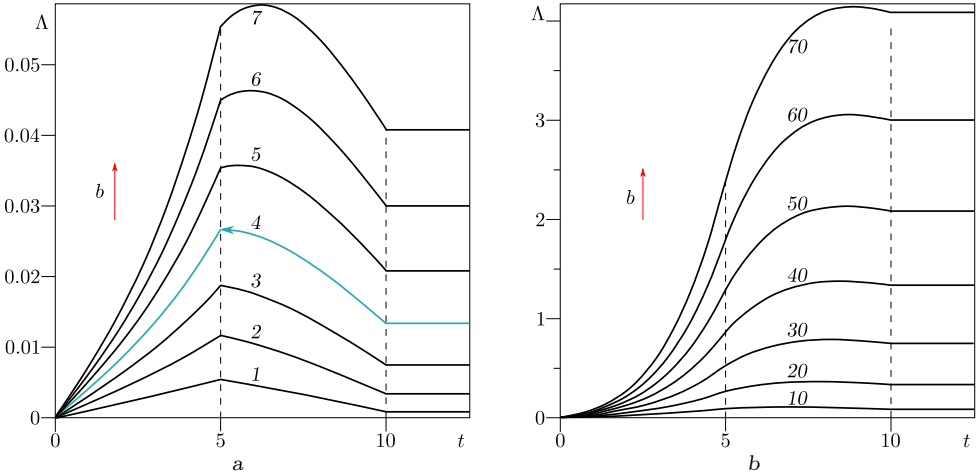


Рис. 5. Графики $\varepsilon = \Lambda(t; b, t_*)$ нелинейной модели с $F = x$, $V = x^2$ и $\tau_r = 1$ при $t_* = 5$ и разных скоростях нагружения: (а) $- b = 0.01s$, $s = 1, 2, \dots, 7$; (б) $- b = 0.1s$, $s = 1, 2, \dots, 7$ [Figure 5. Loading-unloading-rest curves $\varepsilon = \Lambda(t; b, t_*)$ for $t_* = 5$ generated by the non-linear model with $F = x$, $V = x^2$ and $\tau_r = 1$ various stress rates: (а) $- b = 0.01s$, $s = 1, 2, \dots, 7$; (б) $- b = 0.1s$, $s = 1, 2, \dots, 7$]

Кривая 4 для $b = 0.04$ (с $\dot{\Lambda}(t_* + 0) = 0$) совпадает с кривой для СН $b_m := (\tau_r^{-1} t_*^n)^{1/(1-n)} = 1/25$, разделяющей кривые, убывающие на $(t_*; 2t_*)$, и кривые с точкой максимума (она зарождается в точке $t = t_*$). С ростом СН график $\Lambda(t; b)$ смещается вверх, точка максимума \hat{t} — вправо ($n = 2 > 1$) и $\hat{t}(b) \rightarrow 2t_*$ при $b \rightarrow \infty$ (при больших СН интервал возрастания $(t_*; \hat{t})$ исчерпывает почти весь интервал $(t_*; 2t_*)$).

Отклики на треугольный импульс нагрузки на рис. 5 и 4, а с точкой максимума на $(t_*; 2t_*)$ и большими остаточными деформациями качественно весьма сходны с наблюдаемыми в испытаниях асфальтобетонов, твердого топлива и других материалов [43].

Отметим, что из п. 2 теоремы 2 следует, что для существования точки перегиба на участке разгрузки необходимо, чтобы упругая составляющая деформации зависела от напряжения нелинейно.

3. Точки максимума и перегиба ветви разгрузки ДНР моделей со степенными МФ. Рассмотрим модели с МФ

$$F = x^m, \quad V = x^n, \quad m \geq 1, \quad n > m - 1. \quad (18)$$

Условие $n > m - 1$ следует из критерия выпуклости вниз кривых релаксации ОС (1) [4]:

$$|V'(x)/V(x)| > |F''(x)/F'(x)|.$$

Для МФ (18) в силу (8) $p(b, t_*) = 2\eta^{-1}(n+1)^{-1}(bt_*)^n t_*$, и формулы (5)–(7) для деформации принимают вид

$$\Lambda(t; b, t_*) = \begin{cases} E^{-1}(bt)^m + \eta^{-1}(n+1)^{-1}b^n t^{n+1} & \text{при } t \in [0; t_*]; \\ E^{-1}b^m(2t_* - t)^m - \eta^{-1}(n+1)^{-1}b^n(2t_* - t)^{n+1} + \\ \quad + 2\eta^{-1}(n+1)^{-1}(bt_*)^n t_* & \text{при } t \in [t_*; 2t_*]; \\ 2\eta^{-1}(n+1)^{-1}(bt_*)^n t_* & \text{при } t \geq 2t_*. \end{cases} \quad (19)$$

Найдем критерии существования точки максимума у функции (19):

$$\dot{\Lambda} = b^m(2t_* - t)^{m-1}[-E^{-1}m + \eta^{-1}b^{n-m}(2t_* - t)^{n-m+1}], \quad t \in (t_*; 2t_*), \quad (20)$$

$\dot{\Lambda} = 0$, если $t = 2t_*$ (при $m > 1$) или $\eta^{-1}b^{n-m}(2t_* - t)^{n-m+1} = E^{-1}m$, т. е.

$$(2t_* - t)^{n-m+1} = c(b), \quad c(b) := \tau_r m b^{m-n}. \quad (21)$$

Так как $n > m - 1$, функция $y(t) := (2t_* - t)^{n-m+1}$ — убывающая на $[t_*; 2t_*]$ функция, которая принимает значения от $y(2t_*) = 0$ до $y_{\max} = y(t_*) = t_*^{n-m+1}$. Так как $c(b) > 0$, уравнение (21) имеет решение в интервале $(t_*; 2t_*)$ тогда и только тогда, когда $y_{\max} > c(b)$, т. е. $t_*^{n-m+1} > \tau_r m b^{m-n}$.

Поскольку $y(t)$ убывает, решение уравнения (21) единственно,

$$\widehat{t} = 2t_* - [\tau_r b^{m-n} m]^{1/(n-m+1)} \quad (22)$$

— точка максимума функции (19), и деформация возрастает на интервале $(t_*; \widehat{t})$. Значение деформации в точке максимума вычисляется по (19):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\max} = \Lambda(\widehat{t}; b, t_*) &= E^{-1} b^m [\tau_r b^{m-n} m]^{m/(n-m+1)} - \\ &- \eta^{-1} (n+1)^{-1} b^n [\tau_r b^{m-n} m]^{(n+1)/(n-m+1)} + 2\eta^{-1} (n+1)^{-1} (bt_*)^n t_* \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\max} = E^{-1} (mb\tau_r)^{m/(n-m+1)} (n-m+1)(n+1)^{-1} + \\ + 2E^{-1} (n+1)^{-1} (bt_*)^n t_* \tau_r^{-1}. \quad (23) \end{aligned}$$

Величина ε_{\max} возрастает с ростом СН (так как $n > m - 1$, показатели степени положительны в обоих слагаемых) и с ростом t_* . Монотонности по параметру τ_r нет, т. к. первое слагаемое возрастает, а второе убывает.

Критерий наличия максимума функции (19) в интервале $(t_; 2t_*)$ можно записать в виде*

$$(bt_*)^{n-m} > m\tau_r/t_*, \quad \text{или} \quad t_*/\tau_r > m\sigma_{\max}^{m-n}. \quad (24)$$

Для любой степенной модели (18) (с $\tau_r > 0$ и $n > m - 1$) неравенство (24) имеет непустое множество решений в области параметров нагружения (t_*, σ_{\max}) (или (t_*, b)). В случае $n > m$ (24) имеет вид $b > b_m(t_*)$, где

$$b_m := (m\tau_r t_*^{-1})^{1/(n-m)} t_*^{-1} = (m\tau_r)^{1/(n-m)} t_*^{-(n-m+1)/(n-m)}, \quad (25)$$

и выполняется для любого фиксированного t_* при достаточно больших скоростях нагружения и для любой фиксированной СН при достаточно больших t_* (так как $n - m + 1 > 0$); в этом случае b_m убывает по t_* и возрастает по τ_r . Если же $n < m$ (т. е. $n - m \in (-1; 0)$), то (24) имеет вид $b < b_m(t_*)$ и выполняется для любого фиксированного t_* при достаточно малых СН и для любой фиксированной СН при достаточно больших t_* , а b_m возрастает по t_* и убывает по τ_r . Очевидно, с убыванием τ_r множество решений (24), т. е. область

параметров нагружения (t_*, σ_{\max}) , для которых наблюдается максимум $\Lambda(t)$ в интервале $(t_*; 2t_*)$, расширяется. Если неравенство (24) нарушается, то (19) убывает по t на всем $(t_*; 2t_*)$.

Найдем критерий существования точки перегиба функции (19) в интервале $(t_*; 2t_*)$:

$$\begin{aligned} \ddot{\Lambda} &= E^{-1}m(m-1)b^m(2t_* - t)^{m-2} - \eta^{-1}nb^n(2t_* - t)^{n-1}, \quad t \in (t_*; 2t_*); \\ \ddot{\Lambda} &= b^m(2t_* - t)^{m-2}[E^{-1}m(m-1) - \eta^{-1}nb^{n-m}(2t_* - t)^{n-m+1}], \end{aligned} \quad (26)$$

$\ddot{\Lambda} = 0$, если $\eta^{-1}nb^{n-m}(2t_* - t)^{n-m+1} = E^{-1}m(m-1)$, т. е.

$$(2t_* - t)^{n-m+1} = C(b), \quad C(b) := \tau_r n^{-1}m(m-1)b^{m-n}. \quad (27)$$

Если $m = 1$, то $C(b) = 0$, корень уравнения (27) $\tilde{t} = 2t_*$ не зависит от b , τ_r и n , и у $\Lambda(t)$ нет точки перегиба внутри $(t_*; 2t_*)$. В дальнейшем полагаем, что $m > 1$.

Так как $n > m - 1$, функция $y(t) = (2t_* - t)^{n-m+1}$ — убывающая функция времени на $[t_*; 2t_*]$, которая принимает значения от $y(2t_*) = 0$ до $y_{\max} = y(t_*) = t_*^{n-m+1}$. Так как $C(b) > 0$, уравнение (27) имеет решение \tilde{t} в интервале $(t_*; 2t_*)$ тогда и только тогда, когда $y_{\max} > C(b)$, т. е. $t_*^{n-m+1} > \tau_r n^{-1}m(m-1)b^{m-n}$. Поскольку $y(t)$ убывает, решение единственно,

$$\tilde{t} = 2t_* - [\tau_r b^{m-n} n^{-1} m(m-1)]^{1/(n-m+1)} \quad (28)$$

— точка перегиба функции (19), $\Lambda(t)$ выпукла вверх на интервале $(t_*; \tilde{t})$ ($\ddot{\Lambda} < 0$ в силу (26)) и выпукла вниз на $(\tilde{t}; 2t_*)$.

Критерий наличия точки перегиба у $\Lambda(t)$ в интервале $(t_*; 2t_*)$ для моделей с $n > m - 1 > 0$ можно переписать в виде

$$(bt_*)^{n-m} > m(m-1)n^{-1}\tau_r/t_* \quad \text{или} \quad t_*/\tau_r > m(m-1)n^{-1}\sigma_{\max}^{m-n}. \quad (29)$$

Он отличается от критерия существования максимума (24) только множителем $(m-1)n^{-1}$. Так как $(m-1)n^{-1} \in (0; 1)$, для любой степенной модели (18) множество решений $\{(t_*, b)\}$ неравенства (29) включает в себя область решений неравенства (24), т. е. при $n > m - 1 > 0$ наличие точки максимума деформации (19) на участке разгрузки $(t_*; 2t_*)$ всегда сопровождается наличием точки перегиба. Из (28) и (22) следует, что $\tilde{t} > \hat{t}$:

$$\tilde{t} - \hat{t} = [\tau_r b^{m-n} m]^{1/(n-m+1)}(1 - [n^{-1}(m-1)]^{1/(n-m+1)}) > 0.$$

Зависимость $\hat{t}(b)$ и $\tilde{t}(b)$ от величины скорости нагружения b и параметров t_* и τ_r практически одинакова: показатели степени совпадают, а отношение $(2t_* - \tilde{t})/(2t_* - \hat{t})$ не зависит от b , t_* и τ_r :

$$\begin{aligned} (2t_* - \tilde{t})/(2t_* - \hat{t}) &= \\ &= [\tau_r b^{m-n} n^{-1} m(m-1)]^{1/(n-m+1)} [\tau_r b^{m-n} m]^{-1/(n-m+1)} = \\ &= [n^{-1}(m-1)]^{1/(n-m+1)} \end{aligned} \quad (30)$$

(это свойство может служить одним из необходимых признаков применимости модели (18) при анализе данных испытаний). В случае $n > m$ функции $\hat{t}(b)$ и $\tilde{t}(b)$ возрастают (показатель отрицателен), и при $b \rightarrow \infty$ $\hat{t}(b) \rightarrow 2t_*$ и $\tilde{t}(b) \rightarrow 2t_*$; если $n < m$ (т. е. $n - m \in (-1; 0)$), то $\hat{t}(b)$ и $\tilde{t}(b)$ убывают и $\hat{t}(b) \rightarrow 2t_*$, $\tilde{t}(b) \rightarrow 2t_*$ при $b \rightarrow 0$, а если $n = m$, то $\hat{t}(b)$ и $\tilde{t}(b)$ не зависят от b . При $\tau_r \rightarrow 0$ $\hat{t} \rightarrow 2t_*$ и $\tilde{t} \rightarrow 2t_*$.

На рис. 6 приведены графики $\Lambda(t; b, t_*)$ с $t_* = 5$ для степенной модели (18) с $m = 1.5$, $n = 2$ (т. е. $n > m$), $\eta = 10$, $E = 10$, $\tau_r = 1$ для разных СН ($b = 0.01s$, $s = 1, 2, \dots, 5$, — на рис. 6,а и $b = 0.1s$, $s = 1, 2, \dots, 5$, — на рис. 6,б). Кривая 2 на рис. 6,а (для $b = 0.02$) лежит чуть выше кривой для СН $b = b_m$, $b_m := (m\tau_r t_*^{-1})^{1/(n-m)} t_*^{-1} = (1.5/5)^2/5 = 0.018$, разделяющей кривые с монотонным поведением на $(t_*; 2t_*)$ и кривые с точкой максимума (максимум зарождается в точке $t = t_*$). С ростом СН график $\Lambda(t; b, t_*)$ смещается вверх. Так как $n - m = 0.5 > 0$, величины $\hat{t}(b)$ и $\tilde{t}(b)$ возрастают (с ростом СН точки максимума и перегиба смещаются вправо).

На рис. 7 приведены графики $\Lambda(t; b, t_*)$ с $t_* = 5$ для степенной модели (18) с $m = 1.5$, $n = 1$ (т. е. $n < m$), $\eta = 10$, $E = 10$, $\tau_r = 1$ для разных СН ($b = 0.01s$, $s = 1, 2, \dots, 5$, — кривые 1–5 на рис. 7,а; $b = 0.5; 1.0; 1.5; 2.0; 2.5$ — кривые 6–10 на рис. 7,б). С ростом СН график $\Lambda(t; b, t_*)$ смещается вверх. Так как по (25) $b_m = (1.5/5)^{-2}/5 = 20/9 \approx 2.22$, в силу (24) любой график, кроме кривой 10 (для $b = 2.5$), имеет точку максимума (и точку перегиба в силу (29)) в интервале $(t_*; 2t_*)$. Так как $n - m < 0$, величины $\hat{t}(b)$ и $\tilde{t}(b)$ убывают с ростом СН (точки максимума и перегиба смещаются влево). График $\Lambda(t)$ для СН $b = b_m$, разделяющий кривые, убывающие на $(t_*; 2t_*)$, и кривые с точкой максимума, изображен штриховой линией.

Соберем воедино основные свойства кривой разгрузки (19) степенной модели (18), доказанные в этом параграфе.

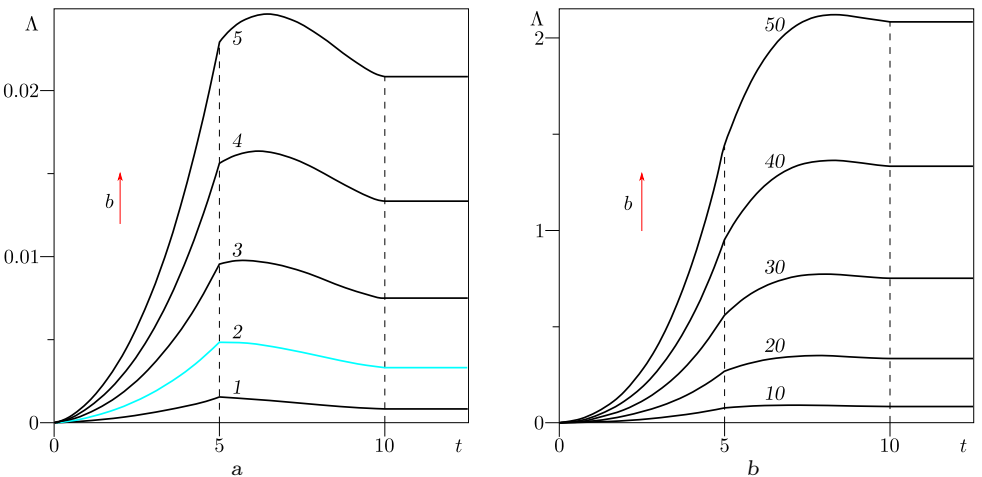


Рис. 6. Графики $\varepsilon = \Lambda(t; b, t_*)$ модели (18) с $m = 1.5$, $n = 2$ ($m < n$) и $\tau_r = 1$ для $t_* = 5$ и разных скоростей нагружения: (а) — $b = 0.01s$, $s = 1, 2, \dots, 5$; (б) — $b = 0.1s$, $s = 1, 2, \dots, 5$ [Figure 6. Loading-unloading-rest curves $\varepsilon = \Lambda(t; b, t_*)$ for $t_* = 5$ generated by the model (18) with $m = 1.5$, $n = 2$ and $\tau_r = 1$ at various stress rates: (a) — $b = 0.01s$, $s = 1, 2, \dots, 5$; (b) — $b = 0.1s$, $s = 1, 2, \dots, 5$]

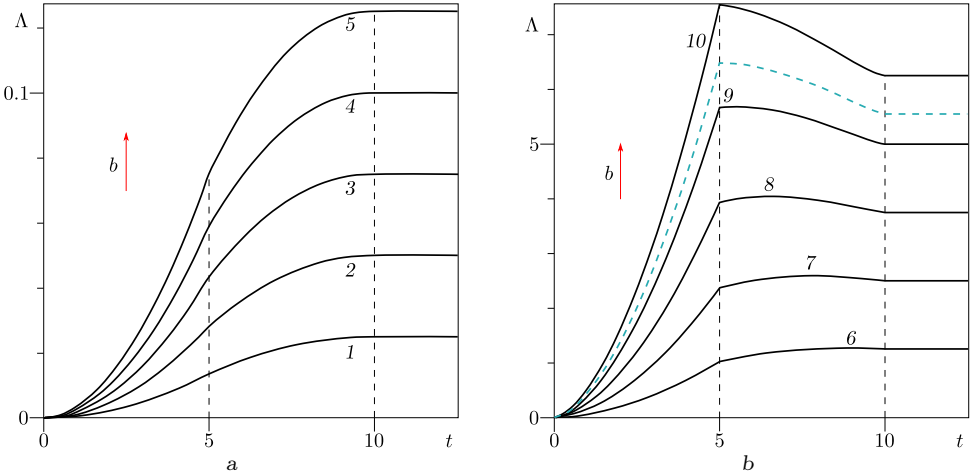


Рис. 7. Графики $\varepsilon = \Lambda(t; b, t_*)$ модели (18) с $m = 1.5$, $n = 1$ ($m > n$) и $\tau_r = 1$ для $t_* = 5$ и разных скоростей нагружения: (а) — $b = 0.01s$, $s = 1, 2, \dots, 5$; (б) — $b = 0.5; 1.0; 1.5; 2.0; 2.5$ [Figure 7. Loading-unloading-rest curves $\varepsilon = \Lambda(t; b, t_*)$ for $t_* = 5$ generated by the model (18) with $m = 1.5$, $n = 1$ ($m > n$) and $\tau_r = 1$ at various stress rates: (a) — $b = 0.01s$, $s = 1, 2, \dots, 5$; (b) — $b = 0.5; 1.0; 1.5; 2.0; 2.5$]

ТЕОРЕМА 3. Для любых t_* , $b > 0$ кривая разгрузки (19) степенной модели (18) с $n > t - 1 > 0$ обладает следующими свойствами:

- 1) деформация (19) имеет точку максимума в интервале $(t_*; 2t_*)$ тогда и только тогда, когда выполнено неравенство (24), максимальная деформация и момент времени \hat{t} , когда она достигается, выражаются формулами (23) и (22); функция $\hat{t}(\tau_r, b)$ всегда убывает по τ_r и $\hat{t} \rightarrow 2t_*$ при $\tau_r \rightarrow 0$;
- 2) для любой модели (18) неравенство (24) имеет непустое множество решений M в области параметров нагружения $\{(t_*, b)\}$: в случае $n > t$ оно имеет вид $b > b_m$, где граничная СН b_m связана с t_* формулой (25), а в случае $n - t \in (-1; 0)$ оно имеет вид $0 < b < b_m$; с убыванием τ_r множество M расширяется;
- 3) функция (19) имеет точку перегиба в интервале $(t_*; 2t_*)$ тогда и только тогда, когда $m > 1$ и выполнено неравенство (29), ее абсцисса \tilde{t} выражается формулой (28); если $m = 1$, то функция (19) выпукла вверх на всем интервале $(t_*; 2t_*)$ при любых b , τ_r и n ;
- 4) для любой модели (18) наличие точки максимума деформации (19) на участке разгрузки $(t_*; 2t_*)$ всегда сопровождается наличием точки перегиба, при этом $\tilde{t} > \hat{t}$;
- 5) для моделей с $n > t$ функции $\hat{t}(b)$ и $\tilde{t}(b)$ (при фиксированном t_*) возрастают и при $b \rightarrow \infty$ $\hat{t}(b) \rightarrow 2t_*$ и $\tilde{t}(b) \rightarrow 2t_*$, для моделей с $n < t$ (т. е. $n - t \in (-1; 0)$) $\hat{t}(b)$ и $\tilde{t}(b)$ убывают и $\hat{t}(b) \rightarrow 2t_*$, $\tilde{t}(b) \rightarrow 2t_*$ при $b \rightarrow 0$, а если $n = t$, то $\hat{t}(b)$ и $\tilde{t}(b)$ не зависят от b : $\hat{t} = 2t_* - \tau_r m$, $\tilde{t} = 2t_* - \tau_r(m - 1)$;
- 6) отношение $(2t_* - \tilde{t}) / (2t_* - \hat{t})$ не зависит от b , t_* и τ_r (см. (30));
- 7) если неравенство (24) не соблюдается, то деформация (19) убывает

на всем участке разгрузки; если не выполнено неравенство (29), то функция (19) убывает и выпукла вверх на всем интервале $(t_*; 2t_*)$.

- 8) Остаточная деформация и диссипация за цикл нагрузки-разгрузки – степенные функции σ_* , а отношение $W/(\sigma_* p)$ не зависит от всех параметров нагружения σ_* , t_* , b :

$$p(b, t_*) = \gamma(n+1)^{-1} \sigma_*^n T, \quad W(b, T) = \gamma(n+2)^{-1} \sigma_*^{n+1} T = [1 - (n+2)^{-1}] \sigma_* p.$$

Все обнаруженные свойства опираются на ограничение $n > m - 1$ для показателей модели (18) (оно следует из критерия выпуклости вниз всех кривых релаксации [4]). В случае $n < m - 1$ поведение отклика (19) модели (18) может заметно отличаться от описанного выше, так как производная (20) ведет себя иначе (второй множитель возрастает, а не убывает). Если же $n = m - 1$, то из (20) $\dot{\Lambda} = b^m (2t_* - t)^{m-1} [-E^{-1}m + \eta^{-1}b^{-1}]$, уравнение $\dot{\Lambda} = 0$ при $b \neq b_m = \tau_r^{-1}m^{-1}$ имеет только корень $t = 2t_*$ и не имеет корней внутри $(t_*; 2t_*)$, а при $b = b_m \dot{\Lambda} \equiv 0$ и $\Lambda(t) = \text{const}$ на $(t_*; 2t_*)$; поэтому при $b < b_m$ $\Lambda(t)$ возрастает и выпукла вверх на всем интервале $(t_*; 2t_*)$ (ибо $\dot{\Lambda} > 0$ и $\dot{\Lambda}$ убывает), а при $b > b_m$ $\Lambda(t)$ убывает и выпукла вниз. Отметим, что в случае $n = m - 1$ все кривые релаксации модели (18) – отрезки прямых линий $\sigma(t, \bar{\varepsilon}; t_0, \sigma_0) = \sigma_0 - \tau_r^{-1}m^{-1}(t - t_0)$, $t \geq t_0$ (с угловым коэффициентом $-\tau_r^{-1}m^{-1}$, не зависящим от уровня деформации $\bar{\varepsilon}$ и начальных условий t_0, σ_0) [4].

4. Диаграммы нагружения-разгрузки в осях σ – ε . После исключения параметра t из (4)–(7) получим при $t \in [0; t_*]$ (когда $x = b\tau$, $\sigma = b\tau$) уравнение кривой нагружения (2) с $\sigma \in (0, bt_*)$, а при $t \in (t_*; 2t_*)$ (когда $\sigma = -bt + 2bt_*$, $x = -b\tau + 2bt_*$) – кривой разгрузки:

$$\varepsilon(\sigma, b) = E^{-1}F(\sigma) + (\eta b)^{-1} \int_0^{bt_*} V(s)ds - (\eta b)^{-1} \int_{bt_*}^{\sigma} V(x)dx,$$

или

$$\varepsilon(\sigma; b, t_*) = p(t_*, b) + E^{-1}F(\sigma) - (\eta b)^{-1} \int_0^{\sigma} V(x)dx. \quad (31)$$

Так как $\sigma(t)$ – линейная функция на каждом из интервалов $(0; t_*)$ и $(t_*; 2t_*)$, $\partial\varepsilon/\partial\sigma = \dot{\varepsilon}/\dot{\sigma} = \pm b\dot{\varepsilon}$ и все найденные выше условия существования точки максимума или перегиба у функции $\varepsilon(t) = \Lambda(t; b, t_*)$ сохраняются для диаграмм нагружения-разгрузки (ДНР) в форме $\varepsilon = \varepsilon(\sigma; b, t_*)$, а значения напряжения и деформации в этих точках легко выразить через величины \hat{t} и $\hat{\varepsilon}$ из (22) и (28). Из формулы $\dot{\Lambda}(2t_* - 0) = -bE^{-1}F'(0) = -\dot{\Lambda}(0 + 0)$ следует, что касательная к ДНР (31) (и к ДНР в форме $\sigma = \sigma(\varepsilon; b, t_*)$) в концевой точке ветви разгрузки параллельна касательной в момент начала нагрузки. Выше было также доказано, что для моделей (18) с $n > m - 1 > 0$ из наличия точки максимума деформации на участке разгрузки $(t_*; 2t_*)$ следует наличие точки перегиба, причем $\tilde{t} > \hat{t}$ (т. е. $\tilde{\sigma} < \hat{\sigma}$).

На рис. 8 приведены ДНР $\sigma = \sigma(\varepsilon; b, t_*)$ нелинейной модели (18) с $m = 1$, $n = 2$, $\eta = 10$, $E = 10$, $\tau_r = 1$ для фиксированного $t_* = 5$ и разных СН ($b = 0.01s$, $s = 1, 2, \dots, 8$, – на рис. 8,а и $b = 0.1s$, $s = 1, 2, \dots, 8$, – на рис. 8,б),

т. е. те же отклики, что и на рис. 5, но в осях $\sigma - \varepsilon$. Голубая ДНР 4 (для $b = 0.04 = b_m$) на рис. 8,а разделяет кривые с монотонным убыванием деформации при разгрузке и кривые с ее нарастанием в начале разгрузки (при $t \in (t_*; \hat{t})$). С ростом СН ветвь нагрузки смещается вверх, ветвь разгрузки — вправо, точка с максимальной деформацией сдвигается вниз к оси $\sigma = 0$, остаточная деформация растет. Для моделей (18) с $m = 1$ точка перегиба ветви разгрузки совпадает с ее концевой точкой при любых b , τ_r и n , так как $\hat{t} = 2t_*$. Синие штриховые кривые — ДНР для фиксированной СН ($b = 0.01$ на рис. 8,а и $b = 0.1$ на рис. 8,б) с разными временами разгрузки $t_* = 5; 10; 15$. Штрих-пунктирная прямая — общая касательная к ДНР в начальной точке $\sigma = Ef'(0)\varepsilon$ (для $F(x) = x$ она совпадает с мгновенной ДД $\sigma = E\varepsilon$); касательные в конечной точке ДНР параллельны ей.

На рис. 9 приведены ДНР $\sigma(\varepsilon; b, t_*)$ для модели (18) с $m = 1.5, n = 2$ (т. е. $n > m$), $\eta = 10, E = 10, \tau_r = 1$ (той же, что и на рис. 6) для $t_* = 5$ и разных СН ($b = 0.01s, s = 1, 2, \dots, 8$, — на рис. 9,а и $b = 0.1s, i = 1, 2, \dots, 8$, — на рис. 9,б). Голубая ДНР 2 на рис. 9,а соответствует СН $b = 0.02$, немного превышающей СН $b_m = 0.018$ (см. (25)), разделяющую кривые с монотонным убыванием деформации при разгрузке и кривые с ее нарастанием в начале разгрузки (при $t \in (t_*; \hat{t})$). С ростом СН ветвь нагрузки смещается вверх, ветвь разгрузки — вправо, точка с максимальной деформацией и точка перегиба сдвигаются вниз к оси $\sigma = 0$ (так как $n - m = 0.5 > 0$, величины $\hat{t}(b)$ и $\tilde{t}(b)$ возрастают с ростом СН), остаточная деформация растет. Синие штриховые кривые — ДНР для фиксированной СН ($b = 0.01$ на рис. 9,а и $b = 0.1$ на рис. 9,б) с разными временами разгрузки $t_* = 5; 10; 15$. Штрих-пунктирная прямая — мгновенная ДД $\sigma = \sigma(\varepsilon; \infty, t_*) = Ef(\varepsilon) = E\varepsilon^{2/3}$. Касательные в конечных точках разгрузки параллельны касательной в начальной точке, т. е. вертикальны в данном случае (при $m > 1$).

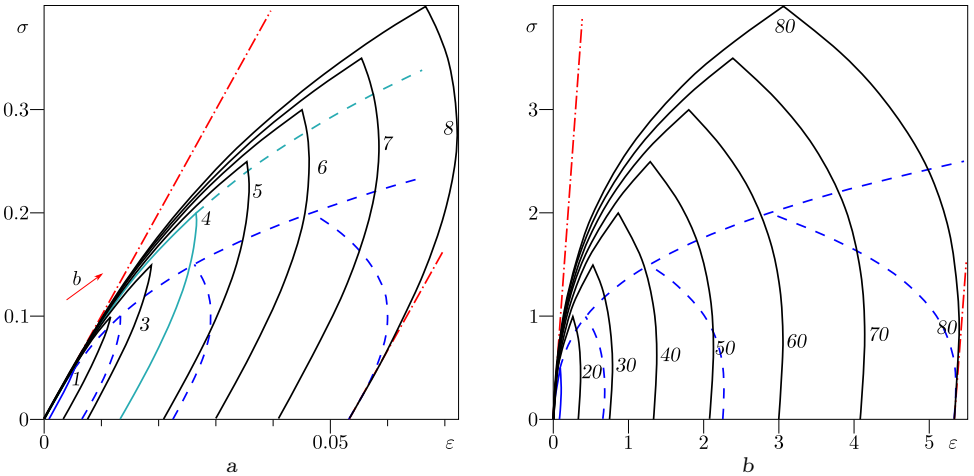


Рис. 8. Диаграммы нагружения и разгрузки $\sigma = \sigma(\varepsilon; b, t_*)$ модели (18) с $m = 1, n = 2$ и $\tau_r = 1$ при $t_* = 5$ и разных скоростях нагружения: (а) — $b = 0.01s, s = 1, 2, \dots, 8$; (б) — $b = 0.1s, s = 1, 2, \dots, 8$ (онлайн в цвете)

[Figure 8. Loading-unloading-rest curves $\sigma = \sigma(\varepsilon; b, t_*)$ for $t_* = 5$ generated by the model (18) with $m = 1, n = 2$ and $\tau_r = 1$ at various stress rates: (а) — $b = 0.01s, s = 1, 2, \dots, 8$; (б) — $b = 0.1s, s = 1, 2, \dots, 8$ (color online)]

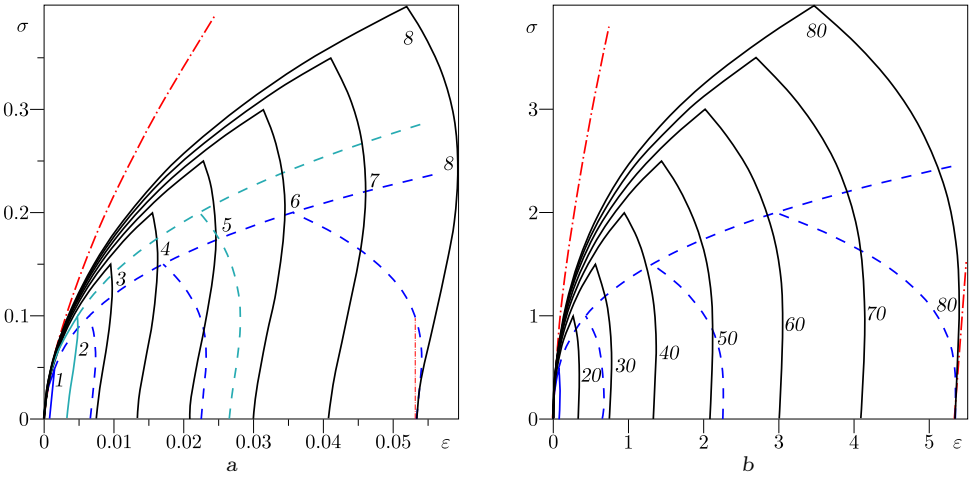


Рис. 9. Диаграммы нагружения и разгрузки $\sigma = \sigma(\varepsilon; b, t_*)$ модели (18) с $m = 1.5$, $n = 2$ и $\tau_r = 1$ при $t_* = 5$ и разных скоростях нагружения: (a) $-b = 0.01s$, $s = 1, 2, \dots, 8$; (b) $-b = 0.1s$, $s = 1, 2, \dots, 8$ (онлайн в цвете)

[Figure 9. Loading-unloading-rest curves $\sigma = \sigma(\varepsilon; b, t_*)$ for $t_* = 5$ generated by the model (18) with $m = 1.5$, $n = 2$ and $\tau_r = 1$ at various stress rates: (a) $-b = 0.01s$, $s = 1, 2, \dots, 8$; (b) $-b = 0.1s$, $s = 1, 2, \dots, 8$ (color online)]

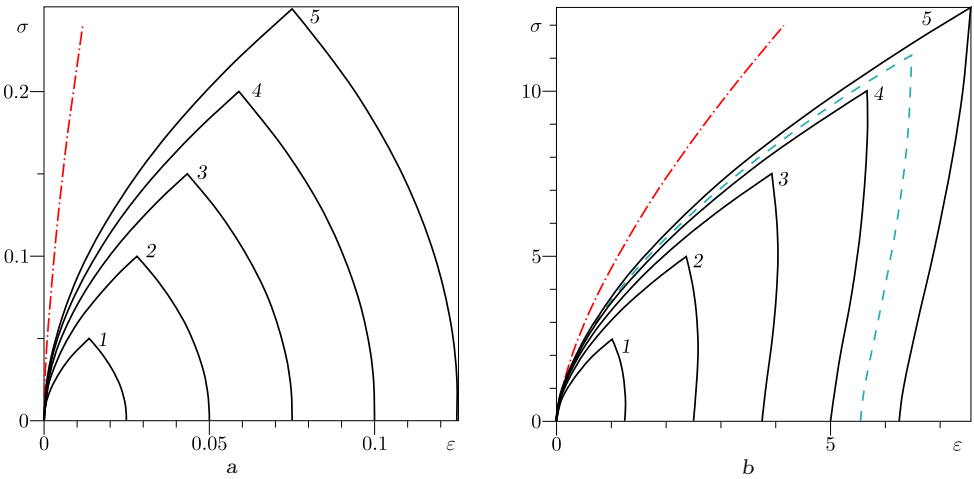


Рис. 10. Диаграммы нагружения и разгрузки $\sigma = \sigma(\varepsilon; b, t_*)$ модели (18) с $m = 1.5$, $n = 1$ ($m > n$) и $\tau_r = 1$ при $t_* = 5$ и разных скоростях нагружения: (a) $-b = 0.01s$, $s = 1, 2, \dots, 5$; (b) $-b = 0.1s$, $s = 1, 2, \dots, 5$ (онлайн в цвете)

[Figure 10. Loading-unloading-rest curves $\sigma = \sigma(\varepsilon; b, t_*)$ for $t_* = 5$ generated by the model (18) with $m = 1.5$, $n = 1$ ($m > n$) and $\tau_r = 1$ at various stress rates: (a) $-b = 0.01s$, $s = 1, 2, \dots, 5$; (b) $-b = 0.1s$, $s = 1, 2, \dots, 5$ (color online)]

На рис. 10 приведены диаграммы нагружения и разгрузки $\sigma = \sigma(\varepsilon; b, t_*)$ для степенной модели (18) с $m = 1.5$, $n = 1$ (т. е. $n < m$), $\eta = 10$, $E = 10$, $\tau_r = 1$ (той же модели, что и на рис. 7) для $t_* = 5$ и разных СН ($b = 0.01s$ — на рис. 10, а; $b = 0.5s$ — на рис. 10, б, $s = 1, 2, \dots, 5$). Так как $b_m = (1.5/5)^{-2}/5 = 20/9 > 2$, на ветвях разгрузки ДНР 1–4, есть точка максимума деформации (и точка перегиба) в интервале $(t_*; 2t_*)$. Так как $n - m < 0$, величины $\hat{t}(b)$ и $\tilde{t}(b)$ убывают с ростом СН (точки перегиба и максимума деформации смещаются вверх от оси σ). Кривая для СН $b = b_m$, разделяющая кривые с монотонным поведением на $(t_*; 2t_*)$ и кривые с точкой максимума, изображена штриховой линией на рис. 10, б.

5. Индикаторы применимости ОС по диаграммам нагружения и разгрузки материала. Вернемся к случаю произвольных МФ в ОС (1). Постоянство деформации (7) при $t \geq T$ (отсутствие восстановления, т. е. релаксации деформации после полной разгрузки) — один из характерных необходимых признаков применимости ОС (1) для моделирования поведения некоторого материала, легко проверяемый в экспериментах.

На ДНР (как материала, так и порождаемых ОС) всегда есть две характерные точки:

- 1) при $t = t_*$ $\sigma = \sigma_{\max} = bt_*$, а деформация вычисляется по формуле (9);
- 2) при $t = t_*$ $\sigma = 0$, а деформация вычисляется по формуле (7).

Именно их, прежде всего, разумно использовать для проверки необходимых условий применимости ОС и его идентификации по экспериментальным ДНР материала. Из (8) и (9) для двух или трех программ нагружения вида (4) с разными $T = T_i$, но одинаковыми $\sigma_{\max} = b_i T_i/2$, следуют еще три общих свойства ОС (1) (с произвольными МФ), которые легко проверять по данным испытаний материала (зарегистрировав характерные деформации $p_i = p(b_i, T_i)$ и $\varepsilon_{*i} = \varepsilon_*(b_i, T_i)$) и можно использовать как индикаторы применимости ОС (1) для его моделирования:

$$\begin{aligned} p_2/p_1 &= T_2/T_1 = b_1/b_2, \\ \varepsilon_{*2} - \varepsilon_{*1} &= (p_2 - p_1)/2 = 0.5\eta^{-1}(T_2 - T_1)\sigma_{\max}^{-1}I(\sigma_{\max}), \\ (\varepsilon_{*3} - \varepsilon_{*1})/(\varepsilon_{*2} - \varepsilon_{*1}) &= (T_3 - T_1)/(T_2 - T_1). \end{aligned} \quad (32)$$

Эти формулы связывают измеряемые характерные величины деформации $\varepsilon(t) = \Lambda(t; b, t_*)$ с двумя параметрами программ нагружения вида (4). Существенно, что отношения деформаций p_2/p_1 и $(\varepsilon_{*3} - \varepsilon_{*1})/(\varepsilon_{*2} - \varepsilon_{*1})$ не зависят и от МФ, и от напряжения σ_{\max} . Это еще один индикатор применимости ОС (1).

Если указанные признаки явно отсутствуют у ДНР материала, то применять ОС (1) для его моделирования нельзя. Если все проверки дают положительный результат, можно переходить к идентификации. Методики идентификации ОС (1) по кривым ползучести с начальной стадией нагружения разработаны в статье [8]. Проведенный анализ ДД и ДНР ОС (1) позволяет предложить несколько иных способов (раздельного) определения двух материальных функций ОС (1) по нескольким ДД или ДНР материала с разными скоростями и максимальными напряжениями (при растяжении и сжатии). Например, можно воспользоваться для определения $V(x)$ формулой (8) для остаточной деформации после цикла нагрузки-разгрузки (с разными

$\sigma_{\max} = bt_*$), а после определения $I(x)$ и $V(x)$ в выбранных точках $x = x_i$ найти $F(x)$ из уравнения ДД (2) или (5) (зная экспериментальную диаграмму в форме $\Lambda(t; b, t_*)$ или $\sigma = \sigma(\varepsilon; b, t_*)$ с некоторой скоростью b). Можно также сначала попытаться определить функцию $f = F^{-1}$ по экспериментальной кривой *мгновенного* деформирования (см. п. 5 теоремы 1), а затем искать $\sigma_z(t) = \text{const}$. Детальной разработке методик идентификации ОС (1) по ДНР будет посвящена специальная работа.

Подытожим обнаруженные в п. 2 свойства отклика (5)–(7) ОС (1) с произвольными МФ на треугольные импульсы нагрузки-разгрузки (4).

ТЕОРЕМА 4. Пусть $F(x)$ — непрерывная (строго) возрастающая кусочно-гладкая функция, а $V(x)$ — непрерывная возрастающая функция на интервале (ω_-, ω_+) , $\{0\} \in (\omega_-, \omega_+)$, $F(0) = 0$, $V(0) = 0$. Тогда деформация (5)–(7), порождаемая одним циклом нагрузки-разгрузки (4) с постоянной скоростью $b > 0$ за время $T = 2t_*$, обладает следующими свойствами:

- 1) для любых $b, t_* > 0$, таких, что $bt_* \in (\omega_-, \omega_+)$, функция $\Lambda(t; b, t_*)$ непрерывна при $t \geq 0$;
- 2) для любых $t, t_* > 0$ $\varepsilon = \Lambda(t; b, t_*)$ возрастает по b при $t \geq 0$;
- 3) на отрезке $[0, t_*]$ для любой СН $b \varepsilon(t) = \Lambda(t; b, t_*)$ всегда возрастает, $\Lambda(0; b, t_*) = 0$, деформация в момент начала разгрузки $\varepsilon_*(b, t_*) = \Lambda(t_*; b, t_*) = E^{-1}F(\sigma_{\max}) + 0.5p(b, T)$; если $F''(x) \geq 0$, то $\varepsilon(t)$ выпукла вниз; если нет, то $\varepsilon(t)$ может иметь точку перегиба;
- 4) при $t \geq 2t_*$ деформация $\varepsilon(t) = \Lambda(t; b, t_*)$ постоянна: $\varepsilon(t) = p(b, T)$, остаточная деформация выражается формулой (8), $p(b, T) = 0$ только для моделей с $\sigma_+ > 0$ в случае $\sigma_{\max} \leq \sigma_+$ (в частности $p(b, T) > 0$ при любых $b, t_* > 0$ для моделей с $\sigma_+ = 0$).
- 5) на интервале разгрузки $t \in (t_*; 2t_*)$ деформация $\Lambda(t; b, t_*)$ может вести себя по-разному в зависимости от свойств МФ V и параметров программы нагружения: может монотонно убывать на всем $(t_*; 2t_*)$ или иметь одну точку максимума, может быть выпуклой вверх на $(t_*; 2t_*)$ или иметь одну точку перегиба;
- 6) для любых $b, t_* > 0$ скорость деформации $\dot{\Lambda}(t)$ имеет разрывы первого рода в точках $t = t_*$ и $t = 2t_*$, ее пределы и скачки в этих точках выражаются формулами (12); скачки (12) не зависят от МФ V , скачок $\dot{\Lambda}(t)$ в $t = 2t_*$ может равняться нулю, если $F'(0) = 0$;
- 7) скорости деформации на участках нагрузки и разгрузки связаны тождеством (11); модули скоростей в моменты $t = 2t_*$ и $t = 0$ одинаковы: $\dot{\Lambda}(2t_* - 0) = -bE^{-1}F'(0) = -\dot{\Lambda}(0 + 0)$, и потому касательная к ДНР $\sigma = \sigma(\varepsilon; b, t_*)$ в концевой точке ветви разгрузки всегда параллельна касательной в момент начала нагрузки;
- 8) для программ нагружения вида (4) с разными $T = T_i$, но одинаковыми $\sigma_{\max} = b_i T_i / 2$ справедливы формулы (32), связывающие измеряемые характерные деформации с параметрами нагружения и не зависящие от МФ; отношения деформаций p_2/p_1 и $(\varepsilon_{*3} - \varepsilon_{*1})/(\varepsilon_{*2} - \varepsilon_{*1})$ не зависят как от МФ, так и от напряжения σ_{\max} .

Детализация п. 5 теоремы 4 содержится в теоремах 2 и 3.

6. О диаграммах циклического нагружения, порождаемых ОС (1).

В силу инвариантности ОС (1) относительно сдвигов по времени и аддитивности на процессах с дизъюнктивными носителями [1–3] отклик (5)–(7) на треугольный импульс растягивающего напряжения описывает форму не только первого, но и любого цикла деформации, вызванной периодической зубчатой программой нагружения с периодом $T = 2t_*$ и треугольным (отнулевым) циклом (4):

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^{m+1} \Lambda(t - (i - 1)T; b, t_*) = \Lambda(t - mT) + mp \quad (33)$$

при $t \in (mT; (m + 1)T)$, $m = 0, 1, 2, \dots$

На $(m + 1)$ -м периоде (33) отличается от сдвига $\Lambda(t - mT; b, t_*)$ функции (5)–(7) только константой $mp(b, T)$, т. е. пластической деформацией, накопленной за m циклов.

На рис. 11,а приведены диаграммы циклического нагружения линейной модели Максвелла с $\eta = 100$, $E = 10$ ($\tau_r = 10$) для четырех периодических программ нагружения:

- 1) кривая 1 — для программы с импульсным циклом при $b = 0.01$, $t_* = 10$, $T = 20$, $\sigma_{\max} = 0.1$, $\sigma_{\min} = 0$;
- 2) кривые 2 и 3 — для двух программ с симметричными циклами при $b = 0.01$, $t_* = 5$ ($\sigma_{\max} = 0.05$, $\sigma_{\min} = -0.05$, $T = 20$) и при $t_* = 10$, ($\sigma_{\max} = 0.1$, $\sigma_{\min} = -0.1$, $T = 40$); они образуют замкнутые петли, так как $p = 0$;
- 3) штриховые кривые 4 — для программы с несимметричным циклом при $b = 0.01$, $T_+ = 20$, $T_- = 10$, $\sigma_{\max} = 0.1$, $\sigma_{\min} = -0.05$, $T = 30$.

На рис. 11,б — аналогичные кривые для линейной модели с $\eta = 100$, $E = 20$, т. е. $\tau_r = 5 < t_* = 10$. На участке разгрузки деформация сначала возрас-

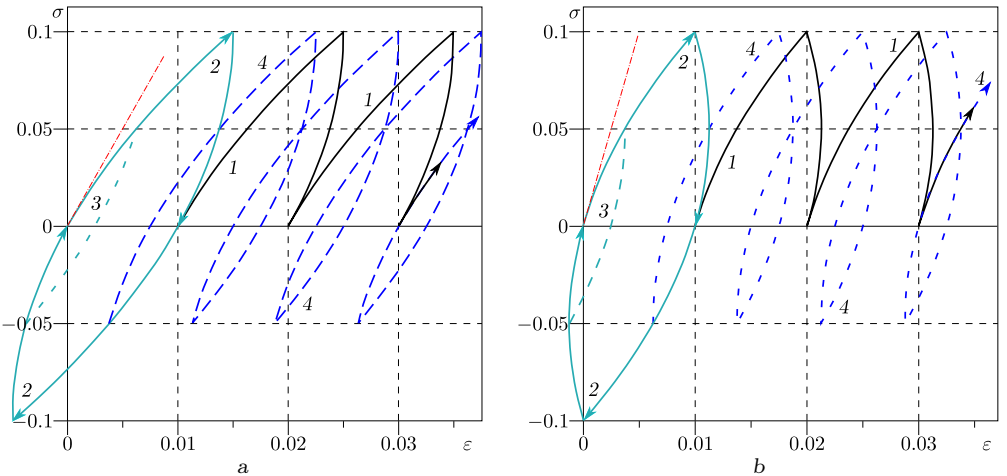


Рис. 11. Диаграммы циклического нагружения $\sigma(\varepsilon)$ двух линейных моделей Максвелла (а — модель с $\tau_r = T/2 = 10$; б — с $\tau_r = 5 < T/2 = 10$) для четырех периодических программ нагрузки-разгрузки с постоянной скоростью $b = \pm 0.01$ (онлайн в цвете)

[Figure 11. Cyclic loading-unloading curves $\sigma(\varepsilon)$ generated by two linear Maxwell models with different relaxation times (a — $\tau_r = T/2 = 10$; b — $\tau_r = 5 < T/2 = 10$) under four periodic loading programs with $b = \pm 0.01$ (color online)]

тает, петли поворачиваются против часовой стрелки по сравнению с рис. 11, а, пластическая деформация и диссипация за цикл (площадь петли или полупетли гистерезиса) остаются такими же, как и на рис. 11, а, т. к. изменен лишь параметр E , а величины p и w от него не зависят.

Общие свойства диаграмм циклического нагружения ОС (1) с произвольной формой цикла исследованы в работе [7].

7. Заключение. В статье продолжен качественный анализ физически нелинейного определяющего соотношения (1) для нестареющих вязкоупруго-пластичных материалов. Выведено в общем виде уравнение семейства диаграмм нагружения и разгрузки (ДНР) с постоянными скоростями нагружения, порождаемых ОС (1), детально изучены его общие качественные свойства в зависимости от скорости нагружения и характеристик двух материальных функций. Выявлены реологические эффекты, которые ОС (1) принципиально не может описать ни при каких материальных функциях (например, отрицательная скоростная чувствительность ДНР, зависимость мгновенного модуля от скорости нагружения, восстановление после нагрузки, превышающей предел упругости, и полной разгрузки и др.), и те, которые могут быть описаны при определенных дополнительных ограничениях, наложенных на МФ (например, монотонное убывание и выпуклость ДНР на участках нагрузки и разгрузки или наличие у них точек экстремума и перегиба). Свойства диаграмм нагружения с постоянной скоростью собраны в теореме 1, а основные свойства ДНР — в теоремах 2–4. В частности доказано, что для существования точки перегиба на участке разгрузки необходимо, чтобы упругая составляющая деформации зависела от напряжения нелинейно (теорема 2). Для моделей со степенными МФ (18) найдены критерии существования точки максимума и точки перегиба, получены формулы (22) и (28) для соответствующих им моментов времени \hat{t} и \tilde{t} и доказано, что из наличия точки максимума деформации на участке разгрузки (t_* ; $2t_*$) следует наличие точки перегиба, причем $\tilde{t} > \hat{t}$ и $\tilde{\sigma} < \hat{\sigma}$ (теорема 3). Обнаруженные свойства сопоставлены с типичными свойствами экспериментальных кривых нагружения и разгрузки классов реономных материалов для выявления комплекса реологических эффектов, которые определяющее соотношение (1) способно (или не способно) моделировать, соответствующих необходимых ограничений на материальные функции и индикаторов области (не)применимости ОС (1).

Проведенный в данной статье (и работах [1–8]) анализ показал, что ОС (1) может применяться для описания комплекса основных реологических эффектов, типичных для вязкоупругопластичных материалов, обладающих памятью, высокой чувствительностью к скорости нагружения и, возможно, разнотермостойкостью, для которых характерны следующие особенности механического поведения:

- 1) возрастающие кривые нагружения с постоянной скоростью $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$, которые могут быть выпуклыми вверх и могут обладать точкой перегиба;
- 2) положительная скоростная чувствительность,
- 3) монотонное убывание и выпуклость кривой разгрузки или наличие на ней точки максимума или точки перегиба (в зависимости от скорости и длительности нагружения);
- 4) отсутствие восстановления (убывания деформации) после импульса на-

- грузки, превышающей предел упругости, и полной разгрузки;
- 5) существенное влияние длительности и скорости нагружения на величину пластической деформации;
 - 6) соблюдение соотношений (32) между характерными величинами деформации при нагружениях с одинаковым максимальным напряжением, но разной скоростью;
 - 7) выраженная стадия течения при постоянном напряжении на диаграммах деформирования с постоянной скоростью и (возрастающая) зависимость предела текучести от скорости;
 - 8) «неограниченное» нарастание пластической деформации при циклическом нагружении за пределом упругости (рэтчетинг без стабилизации и приспособляемости, циклическое разупрочнение);
 - 9) ползучесть с постоянной скоростью;
 - 10) релаксация до нулевого или ненулевого напряжения;
 - 11) возрастание податливости и скоростной чувствительности, увеличение скоростей диссипации, релаксации, ползучести и рэтчетинга с ростом температуры.

К таким материалам (в определенных режимах деформирования) относятся, например, многие полимеры, их расплавы и растворы, твердые топлива, асфальтобетоны, высокомодульные полиэтиленовые нити, льды, титановые и алюминиевые сплавы в состоянии, близком к сверхпластичности, углеродные и керамические материалы (при высоких температурах) и др.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 17-08-01146_a).

Библиографический список

1. Хохлов А. В. Свойства нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла с двумя материальными функциями // *Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика, механика*, 2016. № 6. С. 36–41.
2. Хохлов А. В. Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: свойства кривых ползучести при ступенчатых нагружениях и условия накопления пластической деформации // *Машиностроение и инженерное образование*, 2016. № 3. С. 55–68.
3. Хохлов А. В. Кривые длительной прочности нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла и правило суммирования поврежденности при ступенчатых нагружениях // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 3. С. 524–543. doi: [10.14498/vsgtu1512](https://doi.org/10.14498/vsgtu1512).
4. Хохлов А. В. Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: свойства семейства кривых релаксации и ограничения на материальные функции // *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2017. № 6. С. 31–55. doi: [10.18698/1812-3368-2017-6-31-55](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2017-6-31-55).
5. Хохлов А. В. Свойства семейства кривых нагружения с постоянной скоростью, порождаемых нелинейной моделью вязкоупругопластичности типа Максвелла // *Машиностроение и инженерное образование*, 2017. № 1. С. 57–71.
6. Хохлов А. В. Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: моделирование влияния температуры на кривые деформирования, релаксации и ползучести //

- Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 1. С. 160–179. doi: [10.14498/vsgtu1524](https://doi.org/10.14498/vsgtu1524).
7. Хохлов А. В. Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: скорость накопления пластической деформации при циклических нагружениях // *Деформация и разрушение материалов*, 2017. № 7. С. 7–19.
 8. Хохлов А. В. Идентификация нелинейной модели упруговязкопластичности типа Максвелла по кривым ползучести с начальной стадией нагружения. Часть 2. Методики // *Деформация и разрушение материалов*, 2017. № 10. С. 2–9.
 9. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. *Механика пластических сред*. М.: Мир, 1979. 304 с.
 10. Колтунов М. А., Майборода В. П., Зубчанинов В. Г. *Прочностные расчеты изделий из полнмерных материалов*. М.: Машиностроение, 1983. 239 с.
 11. Кайбышев О. А. *Сверхпластичность промышленных сплавов*. М.: Металлургия, 1984. 264 с.
 12. Васин Р. А., Еникеев Ф. У. *Введение в механику сверхпластичности*. Уфа: Гилем, 1998. 280 с.
 13. Nieh T. G., Wadsworth J., Sherby O. D. *Superplasticity in metals and ceramics*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. 273+xiv pp. doi: [10.1017/CB09780511525230](https://doi.org/10.1017/CB09780511525230).
 14. Segal V. M., Beyerlein I. J., Tome C. N., Chuvil'deev V. N., Kopylov V. I. *Fundamentals and Engineering of Severe Plastic Deformation / Materials Science and Technologies Series*. New York: Nova Science Pub. Inc, 2010. 542+xi pp.
 15. Lin Y. C., Chen X.-M. A critical review of experimental results and constitutive descriptions for metals and alloys in hot working // *Materials and Design*, 2011. vol. 32, no. 4. pp. 1733–1759. doi: [10.1016/j.matdes.2010.11.048](https://doi.org/10.1016/j.matdes.2010.11.048).
 16. McClung A. J. W., Ruggles-Wrenn M. B. The rate (time)-dependent mechanical behavior of the PMR-15 thermoset polymer at elevated temperature // *Polymer Testing*, 2008. vol. 27, no. 7. pp. 908–914. doi: [10.1016/j.polymertesting.2008.07.007](https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2008.07.007).
 17. Kästner M., Obst M., Brummund J., et al. Inelastic material behavior of polymers – Experimental characterization, formulation and implementation of a material model // *Mech. Mater.*, 2012. vol. 52. pp. 40–57. doi: [10.1016/j.mechmat.2012.04.011](https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2012.04.011).
 18. Kim J.W., Medvedev G.A., Caruthers J.M. Nonlinear stress relaxation in an epoxy glass and its relationship to deformation induced mobility // *Polymer*, 2013. vol. 54, no. 15. pp. 3949–3960. doi: [10.1016/j.polymer.2013.05.034](https://doi.org/10.1016/j.polymer.2013.05.034).
 19. Yun K.-S., Park J.-B., Jung G.-D., Youn S.-K. Viscoelastic constitutive modelling of solid propellant with damage // *Int. J. Sol. Struct.*, 2016. vol. 34. pp. 118–127. doi: [10.1016/j.ijsolstr.2015.10.028](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.10.028).
 20. Xu J., Chen X., Wang H., Zheng J., Zhou C. Thermo-damage-viscoelastic constitutive model of HTPB composite propellant // *Int. J. Sol. Struct.*, 2014. vol. 51, no. 18. pp. 3209–3217. doi: [10.1016/j.ijsolstr.2014.05.024](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.05.024).
 21. Krempl E., Khan F. Rate (time)-dependent deformation behavior: an overview of some properties of metals and solid polymers // *Int. J. Plasticity*, 2003. vol. 19, no. 7. pp. 1069–1095. doi: [10.1016/S0749-6419\(03\)00002-0](https://doi.org/10.1016/S0749-6419(03)00002-0).
 22. Khan A. S., Farrokh B. Thermo-mechanical response of nylon 101 under uniaxial and multi-axial loadings: Part I, Experimental results over wide ranges of temperatures and strain rates // *Int. J. Plasticity*, 2006. vol. 22, no. 8. pp. 1506–1529. doi: [10.1016/j.ijplas.2005.10.001](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2005.10.001).
 23. Taleb L., Cailletaud G. Cyclic accumulation of the inelastic strain in the 304L SS under stress control at room temperature: Ratcheting or creep? // *Int. J. Plasticity*, 2011. vol. 27, no. 12. pp. 1936–1958. doi: [10.1016/j.ijplas.2011.02.001](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2011.02.001).
 24. Zhang J., Wang Y., Zan X., Wang Y. The constitutive responses of Ti-6.6Al-3.3Mo-1.8Zr-0.29Si alloy at high strain rates and elevated temperatures // *J. All. Compounds*, 2015. vol. 647. pp. 97–104. doi: [10.1016/j.jallcom.2015.05.131](https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2015.05.131).
 25. Bergstrom J. S. *Mechanics of Solid Polymers. Theory and Computational Modeling*; Elsevier, William Andrew, 2015. 509+xiv pp. doi: [10.1016/c2013-0-15493-1](https://doi.org/10.1016/c2013-0-15493-1).

26. Lee W.-S., Lin C.-R. Deformation behavior and microstructural evolution of 7075-T6 aluminum alloy at cryogenic temperatures // *Cryogenics*, 2016. vol. 79. pp. 26–34. doi: [10.1016/j.cryogenics.2016.07.007](https://doi.org/10.1016/j.cryogenics.2016.07.007).
27. Xiong Y., Yu Q., Jiang Y. An experimental study of cyclic plastic deformation of extruded ZK60 magnesium alloy under uniaxial loading at room temperature // *Int. J. Plasticity*, 2014. vol. 53, no. 2. pp. 107–124. doi: [10.1016/j.ijplas.2013.07.008](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2013.07.008).
28. Launay A., Maitournam M. H., Marco Y., Raoult I., Szymtka F. Cyclic behaviour of short glass fibre reinforced polyamide: Experimental study and constitutive equations // *Int. J. Plasticity*, 2011. vol. 27, no. 8. pp. 1267–1293. doi: [10.1016/j.ijplas.2011.02.005](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2011.02.005).
29. Da Costa Mattos H. S., Reis J. M. L., De Medeiros L. G. M. O., Monteiro A. H., Teixeira S. C. S., Chaves E. G. Analysis of the cyclic tensile behaviour of an elasto-viscoplastic polyamide // *Polymer Testing*, 2017. vol. 58. pp. 40–47. doi: [10.1016/j.polymertesting.2016.12.009](https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2016.12.009).
30. Kujawski D., Kallianpur V., Krempl E. An experimental study of uniaxial creep, cyclic creep and relaxation of aisi type 304 stainless steel at room temperature // *J. Mech. Phys. Solids*, 1980. vol. 28, no. 2. pp. 129–148. doi: [10.1016/0022-5096\(80\)90018-6](https://doi.org/10.1016/0022-5096(80)90018-6).
31. Drozdov A. D., Klitkou R., Christiansen J. Multi-cycle deformation of semicrystalline polymers: Observations and constitutive modeling // *Mech. Res. Commun.*, 2013. vol. 48. pp. 70–75. doi: [10.1016/j.mechrescom.2013.01.001](https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2013.01.001).
32. Jiang Y., Zhang J. Benchmark experiments and characteristic cyclic plasticity deformation // *Int. J. Plasticity*, 2008. vol. 24, no. 9. pp. 1481–1515. doi: [10.1016/j.ijplas.2007.10.003](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2007.10.003).
33. Fung Y. C. *Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues*. New York: Springer-Verlag, 1993. 568+xviii pp. doi: [10.1007/978-1-4757-2257-4](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2257-4).
34. Lakes R. S. *Viscoelastic Materials*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. 461+xvi pp. doi: [10.1017/CB09780511626722](https://doi.org/10.1017/CB09780511626722).
35. Diani J., Fayolle B., Gilormini P. A review on the Mullins effect // *Eur. Polym. J.*, 2009. vol. 45. pp. 601–612. doi: [10.1016/j.eurpolymj.2008.11.017](https://doi.org/10.1016/j.eurpolymj.2008.11.017).
36. Machado G., Chagnon G., Favier D. Induced anisotropy by the Mullins effect in filled silicone rubber // *Mech. Mater.*, 2012. vol. 50. pp. 70–80. doi: [10.1016/j.mechmat.2012.03.006](https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2012.03.006).
37. Fernandes V. A., De Focatiis D. S. The role of deformation history on stress relaxation and stress memory of filled rubber // *Polymer Testing*, 2014. vol. 40. pp. 124–132. doi: [10.1016/j.polymertesting.2014.08.018](https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2014.08.018).
38. Zhu Y., Kang G., Yu C., Poh L. H. Logarithmic rate based elasto-viscoplastic cyclic constitutive model for soft biological tissues // *J. Mech. Behav. Biomed. Mater.*, 2016. vol. 61. pp. 397–409. doi: [10.1016/j.jmbbm.2016.03.014](https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2016.03.014).
39. Drozdov A. D., Dusunceli N. Unusual mechanical response of carbon black-filled thermoplastic elastomers // *Mech. Mater.*, 2014. vol. 69, no. 1. pp. 116–131. doi: [10.1016/j.mechmat.2013.09.019](https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2013.09.019).
40. Hassan T., Kyriakides S. Ratcheting of cyclically hardening and softening materials: I. Uniaxial behavior // *Int. J. Plasticity*, 1994. vol. 10, no. 2. pp. 149–184. doi: [10.1016/0749-6419\(94\)90033-7](https://doi.org/10.1016/0749-6419(94)90033-7).
41. Kang G., Kan Q., Zhang J., Sun Y. Time-dependent ratchetting experiments of SS304 stainless steel // *Int. J. Plasticity*, 2006. vol. 22, no. 5. pp. 858–894. doi: [10.1016/j.ijplas.2005.05.006](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2005.05.006).
42. Kang G. Ratchetting: recent progresses in phenomenon observation, constitutive modeling and application // *Int. J. Fatigue*, 2008. vol. 30, no. 8. pp. 1448–1472. doi: [10.1016/j.ijfatigue.2007.10.002](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2007.10.002).
43. Cao W., Kim Y. R. A viscoplastic model for the confined permanent deformation of asphalt concrete in compression // *Mech. Mater.*, 2016. vol. 92. pp. 235–247. doi: [10.1016/j.mechmat.2015.10.001](https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2015.10.001).
44. Крегерс А. Ф., Вилкс У. К., Лейтмане М. Я. Нелинейная ползучесть полиэтилена высокой плотности при изменяющихся во времени напряжениях // *Механика полимеров*, 1973. № 5. С. 796–803.

45. Khan A. S., Lopez-Pamies O. Time and temperature dependent response and relaxation of a soft polymer // *Int. J. Plasticity*, 2002. vol. 18, no. 10. pp. 1359–1372. doi: [10.1016/S0749-6419\(02\)00003-7](https://doi.org/10.1016/S0749-6419(02)00003-7).
46. Dorfmann A., Ogde R. W. A constitutive model for the Mullins effect with permanent set in particle-reinforced rubber // *Int. J. Sol. Struct.*, 2004. vol. 41, no. 7. pp. 1855–1878. doi: [10.1016/j.ijsolstr.2003.11.014](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2003.11.014).
47. Qi H., Boyce M. Stress–strain behavior of thermoplastic polyurethanes // *Mech. Mater.*, 2005. vol. 37, no. 8. pp. 817–839. doi: [10.1016/j.mechmat.2004.08.001](https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2004.08.001).
48. Drozdov A. D. Time-dependent response of polypropylene after strain reversal // *Int. J. Sol. Struct.*, 2010. vol. 47, no. 24. pp. 3221–3233. doi: [10.1016/j.ijsolstr.2010.08.001](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.08.001).
49. Khan F., Yeakle C. Experimental investigation and modeling of non-monotonic creep behavior in polymers // *Int. J. Plasticity*, 2011. vol. 27, no. 4. pp. 512–521. doi: [10.1016/j.ijplas.2010.06.007](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2010.06.007).
50. Khan F., Yeakle C., Goma S. Characterization of the mechanical properties of a new grade of ultra high molecular weight polyethylene and modeling with the viscoplasticity based on overstress // *J. Mech. Behav. Biomed. Mater.*, 2012. vol. 6, no. 2. pp. 174–180. doi: [10.1016/j.jmbbm.2011.10.009](https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2011.10.009).
51. Хохлов А. В. Качественный анализ общих свойств теоретических кривых линейного определяющего соотношения вязкоупругости // *Наука и образование*, 2016. № 5. С. 187–245. doi: [10.7463/0516.0840650](https://doi.org/10.7463/0516.0840650).
52. Хохлов А. В. Характерные особенности семейств кривых деформирования линейных моделей вязкоупругости // *Проблемы прочности и пластичности*, 2015. Т. 77, № 2. С. 139–154.

MSC: 74D05, 74A20

Properties of stress-strain curves generated by the nonlinear Maxwell-type viscoelastoplastic model under loading and unloading at constant stress rates

A. V. Khokhlov

Lomonosov Moscow State University,
Institute of Mechanics,
1, Michurinsky prospekt, Moscow, 119192, Russian Federation.

Abstract


A physically nonlinear Maxwell-type constitutive relation for non-aging rheonomic materials is studied analytically to find out the set of basic rheological phenomena that it simulates, to indicate its application field and to develop identification techniques and ways of tuning and further modifications. Under minimal primary restrictions on two material functions of the relation, the general equation of theoretic stress-strain curves family produced by the model under loading and unloading at constant stress rates is derived and analyzed in uni-axial case. Intervals of monotonicity and convexity of loading and unloading curves, conditions for existence of extremum and inflection points, magnitudes of maximal strain, strain rate jumps and plastic strain arising as a result of loading- unloading cycle are considered and their dependences on material functions and on stress rate and maximal stress are examined. The main qualitative properties of stress-strain curves and unloading responses generated by the constitutive equation are compared to typical properties of test loading-unloading curves of viscoelastoplastic materials in order to elucidate capabilities of the model, to obtain necessary phenomenological restrictions which should be imposed on the material functions and to find convenient indicators of applicability (or non-applicability) that can (and should) be checked examining test data of a material.

Keywords: elastoviscoplasticity, stress-strain curves, stress rate, unloading response, rate sensitivity, instantaneous modulus, equilibrium stress-strain curve, tension compression asymmetry, superplasticity, polymers.

Received: 18th October, 2017 / Revised: 28th March, 2018 /

Accepted: 11th June, 2018 / First online: 29th June, 2018

Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Khokhlov A. V. Properties of stress-strain curves generated by the nonlinear Maxwell-type viscoelastoplastic model under loading and unloading at constant stress rates, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 2, pp. 293–324. doi: [10.14498/vsgtu1573](https://doi.org/10.14498/vsgtu1573) (In Russian).

Author's Details:

[Andrew V. Khokhlov](mailto:andrey-khokhlov@ya.ru)  <http://orcid.org/0000-0002-9212-2579>

Cand. Techn. Sci.; Senior Researcher; Lab. of Elasticity and Plasticity;

e-mail: andrey-khokhlov@ya.ru

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 17-08-01146_a).

References

1. Khokhlov A. V. Properties of a nonlinear viscoelastoplastic model of Maxwell type with two material functions, *Moscow University Mechanics Bulletin*, 2016, vol. 71, no. 6, pp. 132–136. doi: [10.3103/S0027133016060029](https://doi.org/10.3103/S0027133016060029).
2. Khokhlov A. V. The nonlinear Maxwell-type viscoelastoplastic model: Properties of creep curves at piecewise-constant stress and criterion for plastic strain accumulation, *Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie*, 2016, no. 3, pp. 55–68 (In Russian).
3. Khokhlov A. V. Long-term strength curves generated by the nonlinear Maxwell-type model for viscoelastoplastic materials and the linear damage rule under step loading, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 3, pp. 524–543 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu1512](https://doi.org/10.14498/vsgtu1512).
4. Khokhlov A.V. Nonlinear Maxwell-type elastoviscoplastic model: General properties of stress relaxation curves and restrictions on the material functions, *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2017, no. 6, pp. 31–55 (In Russian). doi: [10.18698/1812-3368-2017-6-31-55](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2017-6-31-55).
5. Khokhlov A. V. Properties of stress-strain curves generated by the nonlinear Maxwell-type viscoelastoplastic model at constant stress rates, *Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie*, 2017, no. 1, pp. 57–71 (In Russian).
6. Khokhlov A. V. The nonlinear Maxwell-type model for viscoelastoplastic materials: simulation of temperature influence on creep, relaxation and strain-stress curves, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 1, pp. 160–179 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu1524](https://doi.org/10.14498/vsgtu1524).
7. Nonlinear Maxwell-type viscoelastoplastic model: rate of plastic strain accumulation under cyclic loadings, *Deformatsiia i razrushenie materialov*, 2017, no. 7, pp. 7–19 (In Russian).
8. Khokhlov A. V. Identification methods of Maxwell-type nonlinear viscoelastoplastic model, based on creep curves with initial ramp loading. Part II. Methods, *Deformatsiia i razrushenie materialov*, 2017, no. 10, pp. 2–9 (In Russian).
9. Kolarov D., Baltov A., Boncheva N. *Mekhanika plasticheskikh sred* [Mechanics of Plastic Media]. Moscow, Mir, 1979, 304 pp. (In Russian)
10. Koltunov M. A., Maiboroda V. P., Zubchaninov V. G. *Prochnostnye raschety izdelii iz polimernykh materialov* [Strength Calculations of Products Made of Polymer Materials]. Moscow, Mashinostroenie, 1983, 239 pp. (In Russian)
11. Kaibyshev O. A. *Sverkhplastichnost' promyshlennykh splavov* [Superplasticity of Industrial Alloys]. Moscow, Metallurgija, 1984, 264 pp. (In Russian)
12. Vasin R. A., Enikeev F. U. *Vvedenie v mekhaniku sverkhplastichnosti* [Introduction to the Mechanics of Superplasticity]. Ufa, Gilem, 1998, 280 pp. (In Russian)
13. Nieh T. G., Wadsworth J., Sherby O. D. *Superplasticity in metals and ceramics*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1997, 273+xiv pp. doi: [10.1017/CB09780511525230](https://doi.org/10.1017/CB09780511525230).
14. Segal V. M., Beyerlein I. J., Tome C. N., Chuvil'deev V. N., Kopylov V. I. *Fundamentals and Engineering of Severe Plastic Deformation*, Materials Science and Technologies Series. New York, Nova Science Pub. Inc, 2010, 542+xi pp.
15. Lin Y. C., Chen X.-M. A critical review of experimental results and constitutive descriptions for metals and alloys in hot working, *Materials and Design*, 2011, vol. 32, no. 4, pp. 1733–1759. doi: [10.1016/j.matdes.2010.11.048](https://doi.org/10.1016/j.matdes.2010.11.048).
16. McClung A. J. W., Ruggles-Wrenn M. B. The rate (time)-dependent mechanical behavior of the PMR-15 thermoset polymer at elevated temperature, *Polymer Testing*, 2008, vol. 27, no. 7, pp. 908–914. doi: [10.1016/j.polymeresting.2008.07.007](https://doi.org/10.1016/j.polymeresting.2008.07.007).

17. Kästner M., Obst M., Brummund J., et al. Inelastic material behavior of polymers – Experimental characterization, formulation and implementation of a material model, *Mech. Mater.*, 2012, vol. 52, pp. 40–57. doi: [10.1016/j.mechmat.2012.04.011](https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2012.04.011).
18. Kim J.W., Medvedev G.A., Caruthers J.M. Nonlinear stress relaxation in an epoxy glass and its relationship to deformation induced mobility, *Polymer*, 2013, vol. 54, no. 15, pp. 3949–3960. doi: [10.1016/j.polymer.2013.05.034](https://doi.org/10.1016/j.polymer.2013.05.034).
19. Yun K.-S., Park J.-B., Jung G.-D., Youn S.-K. Viscoelastic constitutive modelling of solid propellant with damage, *Int. J. Sol. Struct.*, 2016, vol. 34, pp. 118–127. doi: [10.1016/j.ijsolstr.2015.10.028](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.10.028).
20. Xu J., Chen X., Wang H., Zheng J., Zhou C. Thermo-damage-viscoelastic constitutive model of HTPB composite propellant, *Int. J. Sol. Struct.*, 2014, vol. 51, no. 18, pp. 3209–3217. doi: [10.1016/j.ijsolstr.2014.05.024](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.05.024).
21. Krempl E., Khan F. Rate (time)-dependent deformation behavior: an overview of some properties of metals and solid polymers, *Int. J. Plasticity*, 2003, vol. 19, no. 7, pp. 1069–1095. doi: [10.1016/S0749-6419\(03\)00002-0](https://doi.org/10.1016/S0749-6419(03)00002-0).
22. Khan A. S., Farrokh B. Thermo-mechanical response of nylon 101 under uniaxial and multi-axial loadings: Part I, Experimental results over wide ranges of temperatures and strain rates, *Int. J. Plasticity*, 2006, vol. 22, no. 8, pp. 1506–1529. doi: [10.1016/j.ijplas.2005.10.001](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2005.10.001).
23. Taleb L., Cailletaud G. Cyclic accumulation of the inelastic strain in the 304L SS under stress control at room temperature: Ratcheting or creep?, *Int. J. Plasticity*, 2011, vol. 27, no. 12, pp. 1936–1958. doi: [10.1016/j.ijplas.2011.02.001](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2011.02.001).
24. Zhang J., Wang Y., Zan X., Wang Y. The constitutive responses of Ti-6.6Al-3.3Mo-1.8Zr-0.29Si alloy at high strain rates and elevated temperatures, *J. All. Compounds*, 2015, vol. 647, pp. 97–104. doi: [10.1016/j.jallcom.2015.05.131](https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2015.05.131).
25. Bergstrom J. S. *Mechanics of Solid Polymers. Theory and Computational Modeling*, Elsevier, William Andrew, 2015, 509+xiv pp. doi: [10.1016/c2013-0-15493-1](https://doi.org/10.1016/c2013-0-15493-1).
26. Lee W.-S., Lin C.-R. Deformation behavior and microstructural evolution of 7075-T6 aluminum alloy at cryogenic temperatures, *Cryogenics*, 2016, vol. 79, pp. 26–34. doi: [10.1016/j.cryogenics.2016.07.007](https://doi.org/10.1016/j.cryogenics.2016.07.007).
27. Xiong Y., Yu Q., Jiang Y. An experimental study of cyclic plastic deformation of extruded ZK60 magnesium alloy under uniaxial loading at room temperature, *Int. J. Plasticity*, 2014, vol. 53, no. 2, pp. 107–124. doi: [10.1016/j.ijplas.2013.07.008](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2013.07.008).
28. Launay A., Maitournam M. H., Marco Y., Raoult I., Szymtka F. Cyclic behaviour of short glass fibre reinforced polyamide: Experimental study and constitutive equations, *Int. J. Plasticity*, 2011, vol. 27, no. 8, pp. 1267–1293. doi: [10.1016/j.ijplas.2011.02.005](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2011.02.005).
29. Da Costa Mattos H. S., Reis J. M. L., De Medeiros L. G. M. O., Monteiro A. H., Teixeira S. C. S., Chaves E. G. Analysis of the cyclic tensile behaviour of an elasto-viscoplastic polyamide, *Polymer Testing*, 2017, vol. 58, pp. 40–47. doi: [10.1016/j.polymertesting.2016.12.009](https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2016.12.009).
30. Kujawski D., Kallianpur V., Krempl E. An experimental study of uniaxial creep, cyclic creep and relaxation of aisi type 304 stainless steel at room temperature, *J. Mech. Phys. Solids*, 1980, vol. 28, no. 2, pp. 129–148. doi: [10.1016/0022-5096\(80\)90018-6](https://doi.org/10.1016/0022-5096(80)90018-6).
31. Drozdov A. D., Klitkou R., Christiansen J. Multi-cycle deformation of semicrystalline polymers: Observations and constitutive modeling, *Mech. Res. Commun.*, 2013, vol. 48, pp. 70–75. doi: [10.1016/j.mechrescom.2013.01.001](https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2013.01.001).
32. Jiang Y., Zhang J. Benchmark experiments and characteristic cyclic plasticity deformation, *Int. J. Plasticity*, 2008, vol. 24, no. 9, pp. 1481–1515. doi: [10.1016/j.ijplas.2007.10.003](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2007.10.003).
33. Fung Y. C. *Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues*. New York, Springer-Verlag, 1993, 568+xviii pp. doi: [10.1007/978-1-4757-2257-4](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2257-4).
34. Lakes R. S. *Viscoelastic Materials*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2009, 461+xvi pp. doi: [10.1017/CB09780511626722](https://doi.org/10.1017/CB09780511626722).

35. Diani J., Fayolle B., Gilormini P. A review on the Mullins effect, *Eur. Polym. J.*, 2009, vol. 45, pp. 601–612. doi: [10.1016/j.eurpolymj.2008.11.017](https://doi.org/10.1016/j.eurpolymj.2008.11.017).
36. Machado G., Chagnon G., Favier D. Induced anisotropy by the Mullins effect in filled silicone rubber, *Mech. Mater.*, 2012, vol. 50, pp. 70–80. doi: [10.1016/j.mechmat.2012.03.006](https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2012.03.006).
37. Fernandes V. A., De Focatiis D. S. The role of deformation history on stress relaxation and stress memory of filled rubber, *Polymer Testing*, 2014, vol. 40, pp. 124–132. doi: [10.1016/j.polymertesting.2014.08.018](https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2014.08.018).
38. Zhu Y., Kang G., Yu C., Poh L. H. Logarithmic rate based elasto-viscoplastic cyclic constitutive model for soft biological tissues, *J. Mech. Behav. Biomed. Mater.*, 2016, vol. 61, pp. 397–409. doi: [10.1016/j.jmbbm.2016.03.014](https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2016.03.014).
39. Drozdov A. D., Dusunceli N. Unusual mechanical response of carbon black-filled thermo-plastic elastomers, *Mech. Mater.*, 2014, vol. 69, no. 1, pp. 116–131. doi: [10.1016/j.mechmat.2013.09.019](https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2013.09.019).
40. Hassan T., Kyriakides S. Ratcheting of cyclically hardening and softening materials: I. Uniaxial behavior, *Int. J. Plasticity*, 1994, vol. 10, no. 2, pp. 149–184. doi: [10.1016/0749-6419\(94\)90033-7](https://doi.org/10.1016/0749-6419(94)90033-7).
41. Kang G., Kan Q., Zhang J., Sun Y. Time-dependent ratchetting experiments of SS304 stainless steel, *Int. J. Plasticity*, 2006, vol. 22, no. 5, pp. 858–894. doi: [10.1016/j.ijplas.2005.05.006](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2005.05.006).
42. Kang G. Ratchetting: recent progresses in phenomenon observation, constitutive modeling and application, *Int. J. Fatigue*, 2008, vol. 30, no. 8, pp. 1448–1472. doi: [10.1016/j.ijfatigue.2007.10.002](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2007.10.002).
43. Cao W., Kim Y. R. A viscoplastic model for the confined permanent deformation of asphalt concrete in compression, *Mech. Mater.*, 2016, vol. 92, pp. 235–247. doi: [10.1016/j.mechmat.2015.10.001](https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2015.10.001).
44. Kregers A. F., Vilks U. K., Leitane M. Ya. Forward and reverse creep of a physically nonlinear polymer material, *Polymer Mechanics*, 1973, vol. 9, no. 5, pp. 696–703. doi: [10.1007/BF00856260](https://doi.org/10.1007/BF00856260).
45. Khan A. S., Lopez-Pamies O. Time and temperature dependent response and relaxation of a soft polymer, *Int. J. Plasticity*, 2002, vol. 18, no. 10, pp. 1359–1372. doi: [10.1016/S0749-6419\(02\)00003-7](https://doi.org/10.1016/S0749-6419(02)00003-7).
46. Dorfmann A., Ogde R. W. A constitutive model for the Mullins effect with permanent set in particle-reinforced rubber, *Int. J. Sol. Struct.*, 2004, vol. 41, no. 7, pp. 1855–1878. doi: [10.1016/j.ijsolstr.2003.11.014](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2003.11.014).
47. Qi H., Boyce M. Stress–strain behavior of thermoplastic polyurethanes, *Mech. Mater.*, 2005, vol. 37, no. 8, pp. 817–839. doi: [10.1016/j.mechmat.2004.08.001](https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2004.08.001).
48. Drozdov A. D. Time-dependent response of polypropylene after strain reversal, *Int. J. Sol. Struct.*, 2010, vol. 47, no. 24, pp. 3221–3233. doi: [10.1016/j.ijsolstr.2010.08.001](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.08.001).
49. Khan F., Yeakle C. Experimental investigation and modeling of non-monotonic creep behavior in polymers, *Int. J. Plasticity*, 2011, vol. 27, no. 4, pp. 512–521. doi: [10.1016/j.ijplas.2010.06.007](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2010.06.007).
50. Khan F., Yeakle C., Gomaa S. Characterization of the mechanical properties of a new grade of ultra high molecular weight polyethylene and modeling with the viscoplasticity based on overstress, *J. Mech. Behav. Biomed. Mater.*, 2012, vol. 6, no. 2, pp. 174–180. doi: [10.1016/j.jmbbm.2011.10.009](https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2011.10.009).
51. Khokhlov A.V. The Qualitative Analysis of Theoretic Curves Generated by Linear Viscoelasticity Constitutive Equation, *Science and Education*, 2016, №5, C. 187–245 (In Russian). doi: [10.7463/0516.0840650](https://doi.org/10.7463/0516.0840650).
52. Khokhlov A. V. Specific features of stress-strain curves at constant stress rate or strain rate yielding from linear viscoelasticity, *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2015, vol. 77, no. 2, pp. 139–154 (In Russian).