



УДК 539.376

Численное и экспериментальное исследование чистого изгиба балок из титанового сплава АБВТ-20 в условиях ползучести с учетом различных свойств на растяжение и сжатие

С. В. Иявойнен, А. Ю. Ларичкин, В. Е. Колодезев

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН
Россия, 630090, Новосибирск, Лаврентьева проспект, 15.

Аннотация

Рассматривается решение задачи чистого изгиба балки прямоугольного сечения в режиме ползучести с учетом различных свойств ползучести на растяжение и сжатие. Построен алгоритм и разработано программное обеспечение для математического моделирования процесса перераспределения напряжений по высоте балки с учетом накопления повреждений. Моделирование процессов ползучести разупрочняющегося материала происходит на основе уравнений кинетической теории ползучести и повреждаемости. Численное решение задачи проводится на основе метода Рунге—Кутты—Мерсона. Проведено сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными чистого изгиба балок прямоугольного сечения из титанового сплава АБВТ-20 при действии знакопеременного изгибающего момента в условиях продолжительного воздействия температуры (750°С), которое показало удовлетворительное соответствие результатов расчета экспериментальным данным.

Ключевые слова: высокотемпературная ползучесть, разносопротивляемость, чистый изгиб, экспериментальные исследования, моделирование, сплав АБВТ-20.

Получение: 6 марта 2018 г. / Исправление: 24 августа 2018 г. /
Принятие: 3 сентября 2018 г. / Публикация онлайн: 10 октября 2018 г.

Научная статья

Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Иявойнен С. В., Ларичкин А. Ю., Колодезев В. Е. Численное и экспериментальное исследование чистого изгиба балок из титанового сплава АБВТ-20 в условиях ползучести с учетом различных свойств на растяжение и сжатие // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 3. С. 430–446. doi: [10.14498/vsgtu1614](https://doi.org/10.14498/vsgtu1614).

Сведения об авторах

Светлана Владимировна Иявойнен <http://orcid.org/0000-0002-1478-0533>
аспирант; младший научный сотрудник; лаб. статической прочности;
e-mail: svetaiyavoynen@gmail.com

Алексей Юрьевич Ларичкин <http://orcid.org/0000-0002-7306-9522>
кандидат физико-математических наук; научный сотрудник; лаб. статической прочности;
e-mail: larichking@gmail.com

Вадим Евгеньевич Колодезев <http://orcid.org/0000-0001-8035-7453>
кандидат технических наук; инженер-технолог; лаб. статической прочности;
e-mail: kolodezev.vadim@yandex.ru

Введение. Сохранение ресурса и свойств материала изделия на стадии его производства является актуальной проблемой современного авиастроения. Одним из возможных путей решения является внедрение в производство технологий формообразования, основанных на явлении ползучести и сверхпластического течения материала. Такие технологические процессы широко внедряются в производство зарубежными авиапроизводителями (Airbus, Boeing) [1, 2], поскольку позволяют сокращать количество технологических циклов обработки изделия на стадии формообразования, совмещать процессы медленного деформирования и старения, сохранять ресурс пластической деформации. Широкое распространение технологий медленного горячего формообразования затруднено наличием малого количества исследований о влиянии условий технологических процессов на прочностные свойства материалов в готовом изделии (прочность, долговечность, ударная вязкость, трещиностойкость и т. п.). Отсутствие информации об оптимальных режимах деформирования различных конструкционных материалов также не способствует широкому внедрению таких технологий. Варианты технологии горячего формообразования в режимах ползучести применяются на нескольких авиастроительных заводах России.

В США и Великобритании процесс формовки при температуре старения начали применять в восьмидесятих годах XX века. В иностранной литературе рассматриваемый процесс называют “creep age forming” (сокращенно САФ) [1–5]. Целью применения технологии являлась формовка больших алюминиевых панелей (около 15 м) для получения профиля крыла и поверхностей сложной геометрии. Технологию формовки применяли к элементам конструкций самолетов Airbus 330 и 340, придавая кривизну стрингерам при помощи кручения и изгиба [1]. В работе [1] приведен обзор ключевых зарубежных компаний, развивающих подход формовки в режимах старения, а также представлен один из подходов к формообразованию деталей в этом режиме при помощи вакуумизации, когда для прижатия заготовки к оснастке используют вакуумный мешок-диафрагму. Авторы подчеркивают, что после формовки прямоугольной пластины в цилиндрическую поверхность деталь испытывает около 70% распухивания. Показано, что при растяжении образцов из алюминиевого сплава 7075 (аналог отечественного сплава В95) в режиме старения остаточные напряжения не превосходят 25 МПа по сравнению с напряжениями в 150 МПа при холодной вытяжке. Авторы предлагают для создания больших оробранных панелей сложной геометрии отдельно формовать ребра и саму панель, а затем сваривать их между собой. Чтобы избежать искажений поверхности после распухивания, используются различные методы, например термофиксация.

В работе [6] приводится решение обратной задачи формообразования крупногабаритных монолитных разнотолщинных панелей двойной кривизны из сплава В95с4ТФ (состояние поставки) в режиме термофиксации для температуры старения, равной 165°C. Аббревиатура «оч» означает «очень чистый», которая указывает на низкое содержание кремния в сплаве (до 0.1%, что в пять раз меньше, чем в сплаве В95). Стоит отметить, что в [6] учтено изменение механических свойств сплава В95с4ТФ в процессе термической фиксации. Неучет такой эволюции свойств завышает максимальные напряжения в формируемой панели почти в три раза. Приводятся вариационная форму-

лировка задачи и результаты конечноэлементного моделирования формообразования панели крыла в среде MSC.Marc. Решения, основанные на выводах из данной работы, применяются для серийного формообразования крыловых панелей с использованием эффектов ползучести и деформационного старения на «КнААЗ» филиала ПАО «Компания «Сухой».

Алгоритмы расчета формообразования деталей усложняются в случае модели материала, разносопротивляющегося растяжению и сжатию при ползучести. В [7] решены трехмерные задачи по кручению металлических пластин в условиях ползучести под действием постоянных сосредоточенных сил, приложенных в ее углах. Представлен алгоритм определения компонент тензора напряжений, реализованный в модели материала конечноэлементного пакета PIONER (разработка ИГиЛ СО РАН) для определяющих соотношений ползучести с учетом разных свойств материала при растяжении и сжатии. Приведено сравнение результатов трех случаев моделирования кручения толстой плиты с экспериментальными данными. В первом случае в законе ползучести использовались параметры, полученные из одноосных экспериментов только на сжатие, во втором — только на растяжение, в третьем — обе группы параметров. Использование модели с учетом различия свойств на растяжение и сжатие по сравнению с моделью, где учитываются свойства ползучести только на растяжение или только на сжатие, позволяет добиться удовлетворительного соответствия расчетов и данных эксперимента, что увеличивает точность формы упреждающей оснастки. Отметим, что модель разносопротивляемости внедрена в конечноэлементный пакет PIONER, что позволяет решать трехмерные задачи ползучести.

Монография [8] посвящена фундаментальному описанию явления ползучести. В ней приведены решения различных задач длительной прочности с приложением к технике, в том числе задач изгиба балок, пластин, оболочек. Представлены подходы к описанию ползучести и накоплению повреждений при сложном напряженном состоянии. В частности, получены решения задачи чистого изгиба балок в режимах ползучести с учетом различных свойств на растяжение и сжатие, а также поврежденности материала. Зависимость скорости ползучести и скорости изменения сплошности от напряжений принимается в виде дробно-степенных функций. Приводится решение с учетом фронта разрушения.

В [2] приводятся различные способы формовки титановых сплавов, в том числе в режимах ползучести и сверхпластичности. В работе [2] отмечено, что использование явления сверхпластичности для формообразования деталей истребителя F-15 приводит к снижению их стоимости на 58% и снижению массы на 31%. Приводится пример, что ранее деталь двигателя гондолы для самолета Boeing 757 изготавливалась из сорок одной детали и более двухсот крепежных узлов (материал Ti-6Al-4V), а с применением формовки в режиме сверхпластического течения эта деталь формообразуется из одного листа.

Однако добиться режимов сверхпластического течения не так просто: наравне с основными параметрами процесса формовки — температурой и скоростью деформирования — рядом авторов отмечается важность влияния размера зерна материала [9]. Управление этими тремя параметрами позволяет деформировать материалы в режимах сверхпластичности. Управление предполагает подготовку зерна материала, знание температуры динамической ре-

кристаллизации и регулирование скорости формовки. Размер зерна существенно влияет на механические свойства материала. Уменьшение зерна титанового сплава ВТ-6 (Ti-6Al-4V) до 10 мкм после всестороннейковки дает понижение температуры сверхпластического течения и усиление эффекта диффузионной сварки [10]. На основе этих научных достижений удалось создать технологию получения полой лопатки турбины для вентилятора двигателя ПД-14.

Эффекты, связанные с процессом ползучести, используются и для последующей обработки изделий. Упрочнение поверхностных слоев лопаток и иных деталей двигателя проводится при помощи дробеструйной обработки, алмазного выглаживания, прокатки роликом, что увеличивает срок службы изделия. В технике известно благоприятное влияние сжимающих напряжений в поверхностных слоях деталей на их усталостную долговечность. Вопросы, связанные с релаксацией напряжений в поверхностно-упрочненных слоях элементов конструкций при ползучести, достаточно полно освещены в работе [11]. Авторы приводят способы учета пластических деформаций на фоне процесса ползучести. Дается обширный материал описания кинетики процесса накопления повреждений при ползучести. Приводится метод восстановления картины напряжений в поверхностном слое детали цилиндрической формы и описание процесса релаксации напряжений по его глубине.

Эффекты, связанные с формообразованием в режиме ползучести, часто зависят от времени выдержки при температуре. В настоящей работе рассмотрены особенности знакопеременного изгиба прямоугольных балок из титанового сплава АБВТ-20 в режиме ползучести с учетом температурной выдержки без нагрузки. В данной работе используется степенной закон ползучести с учетом поврежденности материала, в отличие от работы [12], где используется дробно-степенная зависимость скорости деформаций ползучести от напряжения. Кроме этого, в настоящей работе в реологической модели для исследуемого материала используется зависимость скорости ползучести от времени температурной выдержки, которая наблюдалась в экспериментальных исследованиях [13].

1. Математическое моделирование чистого изгиба балок. Рассмотрим процесс ползучести чистого изгиба прямоугольной балки шириной b и высотой h . Изгибающий момент M действует в плоскости симметрии балки и не приводит к появлению пластических деформаций. Моделирование процесса проводится для материала, имеющего различные свойства ползучести на растяжение и сжатие. Расчет основан на уравнениях энергетического варианта теории ползучести [14–19].

Считаем, что полная деформация ε^{total} в любой момент времени есть аддитивная составляющая упругой деформации ε^e и деформации ползучести ε :

$$\varepsilon^{total} = \varepsilon^e + \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon,$$

где $\sigma(t) = P/S_0$ — номинальное действующее напряжение в балке в момент времени t ; P — нагрузка; S_0 — начальная площадь; E — модуль упругости материала.

Для случая чистого изгиба справедлива гипотеза Бернулли:

$$\varepsilon^{total} = \varkappa(t)(z + \delta(t)), \quad \varepsilon(0) = 0, \quad (1)$$

где $\varkappa(t)$ и $\delta(t)$ — кривизна балки и смещение нейтральной поверхности для некоторого момента времени t соответственно; z — координата по высоте балки с началом в срединной поверхности.

Процесс ползучести материала с учетом его повреждаемости описывается уравнениями вида [12–17]:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \begin{cases} \frac{B_{A_1} \sigma^{n_1}}{(1-\omega)^{m_1}}, & \sigma > 0, \\ \frac{B_{A_2} |\sigma|^{n_2}}{(1-\omega)^{m_2}}, & \sigma \leq 0; \end{cases} \\ \frac{d\omega}{dt} &= \begin{cases} \frac{B_{\omega_1} \sigma^{r_1}}{(1-\omega)^{m_1}}, & \sigma > 0, \\ \frac{B_{\omega_2} |\sigma|^{r_2}}{(1-\omega)^{m_2}}, & \sigma \leq 0; \end{cases} \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{dA}{dt} \frac{1}{\sigma}, \end{aligned} \quad (2)$$

где A — величина удельной работы рассеяния, $A(z_j, 0) = 0$; ω — параметр поврежденности, $\omega(z_j, 0) = 0$; B_{A_1} , B_{ω_1} , n_1 , r_1 , m_1 и B_{A_2} , B_{ω_2} , n_2 , r_2 , m_2 — положительные константы материала на растяжение (с индексом 1) и сжатие (с индексом 2).

Уравнения равновесия имеют следующий вид:

$$b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma(z + \delta) dz = M, \quad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma dz = 0. \quad (3)$$

Кривизна балки \varkappa в любой момент времени находится из (1), (3):

$$\varkappa = \frac{M}{EJ_\delta} + \frac{b}{J_\delta} \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon(z + \delta) dz, \quad (4)$$

где $J_\delta = b(h^3/12 + h\delta^2)$ — осевой момент инерции сечения балки с учетом смещения нейтральной оси δ .

Из условия отсутствия нормальных внешних усилий в сечении бруса определяется δ :

$$\delta = \frac{1}{\varkappa h} \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon dz. \quad (5)$$

Подставляя значения напряжений в каждой точке разбиения по высоте поперечного сечения балки из (1) в (2), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно удельной работы рассеяния A , повреждаемости ω и деформации ε .

Численное моделирование изгиба разносопротивляющейся балки проводится интегрированием уравнений (2) с использованием (3)–(5) посредством метода Рунге–Кутты–Мерсона [20]. Метод основан на схеме Рунге–Кутты первого порядка итерационного решения задачи Коши, где определяются четыре коэффициента для нахождения неизвестных функций правых частей решаемой системы уравнений. Схема Мерсона добавляет дополнительный пятый коэффициент, что позволяет определять погрешность решения на каждом шаге интегрирования по времени.

2. Численный анализ чистого изгиба балки в условиях ползучести. Разбивая сечение балки по высоте на k равных интервалов, из (2) получаем систему дифференциально-алгебраических уравнений в каждой точке разбиения по высоте балки:

$$\begin{aligned} \frac{dA_j}{dt} &= \begin{cases} \frac{B_{A_1} \sigma_j^{n_1}}{(1 - \omega_j)^{m_1}}, & \sigma_j > 0, \\ \frac{B_{A_2} |\sigma_j|^{n_2}}{(1 - \omega_j)^{m_2}}, & \sigma_j \leq 0; \end{cases} \\ \frac{d\omega_j}{dt} &= \begin{cases} \frac{B_{\omega_1} \sigma_j^{r_1}}{(1 - \omega_j)^{m_1}}, & \sigma_j > 0, \\ \frac{B_{\omega_2} |\sigma_j|^{r_2}}{(1 - \omega_j)^{m_2}}, & \sigma_j \leq 0; \end{cases} \\ \frac{d\varepsilon_j}{dt} &= \frac{dA_j}{dt} \frac{1}{\sigma_j}, \quad j = 0, 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (6)$$

В начальный момент времени в каждом волокне сечения балки имеем

$$t = 0 : \varepsilon(z_j, 0) = 0; \omega(z_j, 0) = 0; A(z_j, 0) = 0.$$

Заменяя интегралы в уравнениях (4) и (5) на конечные суммы по формуле Симпсона [21], имеем

$$\begin{aligned} \varkappa(t) &= \frac{M}{EJ_\delta} + \frac{bh/k}{3J_\delta} \sum_{j=1}^{k-1} [\varepsilon(z_{j-1}, t)z_{j-1} + 4\varepsilon(z_j, t)z_j + \varepsilon(z_{j+1}, t)z_{j+1}], \\ \delta(t) &= -\frac{h/k}{3\varkappa h} \sum_{j=1}^{k-1} [\varepsilon(z_{j-1}, t)z_{j-1} + 4\varepsilon(z_j, t)z_j + \varepsilon(z_{j+1}, t)z_{j+1}], \end{aligned} \quad (7)$$

где z_j — значение высоты балки в j -той точке разбиения.

Для решения задачи ползучести балки используется широко применяемый метод «шагами по времени». Для этого кроме дискретизации по пространственной координате z задается дискретизация по времени, т.е. $t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$ ($t_0 = 0$), где Δt_i — шаг (в общем случае — переменный) интегрирования системы дифференциальных уравнений (6), при этом начальное напряженное состояние на отрезке $t \in [t_i, t_{i+1}]$ привязывается к времени $t = t_i$. Укрупненно алгоритм решения следующий:

- 1) задаются начальные данные $\varepsilon(z_j, 0) = 0$, $A(z_j, 0) = 0$, $\omega(z_j, 0) = 0$ и величина момента M ;
- 2) решается упругая задача чистого изгиба балки; поскольку разносопротивляемость заложена лишь для деформации ползучести, то вследствие симметрии упругих свойств на растяжение—сжатие начальная величина смещения нейтральной оси $\delta(0) = 0$;
- 3) с использованием распределения напряжений $\sigma(z_j, 0)$ как начального из решения упругой задачи в соотношениях (6) решается система дифференциальных уравнений (6) методом Рунге—Кутты—Мерсона [20], находятся деформации в момент времени $t = t_{i+1}$ при $i = 0$, далее из (7) последовательно определяются $\varkappa(t_{i+1})$ и $\delta(t_{i+1})$ и, наконец,

$$\sigma(z_j, t_{i+1}) = E[\varkappa(t_{i+1})(z_j + \delta(t_{i+1})) - \varepsilon(t_{i+1})].$$

Далее алгоритм повторяется при $t = t_{i+1}$, $i = 2, 3, \dots$

При реализации численного алгоритма использовалась заложенная в [20] возможность автоматического выбора шага интегрирования Δt_i (его увеличения и уменьшения в зависимости от требуемой погрешности вычислений).

3. Испытания на ползучесть сплава АБВТ-20 при температуре 750 °С. На испытательных машинах лаборатории статической прочности ИГиЛ СО РАН проведена серия испытаний по растяжению и сжатию круглых цилиндрических образцов из сплава АБВТ-20 при температуре 750 °С. Испытательная машина представляет собой установку рычажного типа с максимальным усилием 50 000 Н. Нагружение образцов, соединенных с коротким концом рычага и станиной машины, проводится за счет установки грузов на длинном конце рычага.

Установки укомплектованы нагревательными системами, которые состоят из регулятора нагрева и печного пространства. Нагрев производится при помощи галогеновых ламп, регулировка температуры проводится контрольно-измерительным прибором ОВЕН посредством термопар типа хромель-копель. Нагревательная система позволяет проводить испытания на ползучесть до 1 000 °С, после выхода на целевую температуру возможное отклонение не превышает ± 3 °С.

Измерение удлинений (укорочений) образцов проводилось посредством систем замеров с использованием электрических датчиков линейного перемещения, данные с которых записывались в память компьютера в виде таблиц. В силу длительности испытаний частота измерений устанавливалась один раз в три секунды.

Образцы для испытаний вырезались из плиты сплава АБВТ-20 толщиной 18.5 мм. Диаметр испытываемых образцов составлял 8 мм, длина рабочей части l_0 : 45 мм на растяжение, 16 мм на сжатие. Образцы разделялись на два типа:

- первый тип — образцы, вырезанные из плиты вдоль направления проката;
- второй тип — образцы, вырезанные в поперечном направлении относительно проката.

Образцы для испытаний изготавливались в ИГиЛ СО РАН.

При одноосном испытании к образцу прикладывалось постоянное напряжение $\sigma = P/S = \text{const}$. Значение усилий корректировалось через каждые 0.5 % деформации из условия несжимаемости материала при неупругом деформировании. Несжимаемость предполагает неизменность объема образца $V_0 = l_0 S_0 = lS$, отсюда, зная его удлинение Δl в процессе испытания, можно определять текущее значение площади сечения $S = l_0 S_0 / l = l_0 S_0 / (l_0 + \Delta l)$ и поддерживать необходимое усилие P . Стоит отметить, что принимая условие несжимаемости материала, мы считаем, что деформация ползучести равномерно распределена по длине образца, но в одноосных испытаниях это не так. Почти всегда при растяжении, если, конечно, мы не попали в температурно-скоростной режим сверхпластического деформирования, будет происходить локализация деформаций. По окончании установившейся стадии ползучести при растяжении будет возникать шейка. Кроме того, эффективная площадь поперечного сечения в процессе растяжения не равна геометрической в силу накопленных повреждений. Ряд авторов указывает на противо-

речивость принятия гипотезы о несжимаемости при оценке поврежденности материала и предлагают использовать закон сохранения массы $\rho_0 l_0 S_0 = \rho l S$, где ρ_0 и ρ — начальная и текущая плотности материала. Закон сохранения массы переходит в условие несжимаемости при равенстве плотностей материала до и после деформирования $\rho_0 = \rho$, что наблюдается при отсутствии разрыхления материала. Однако в настоящей работе, следуя идеям Ю. Н. Работнова [22] и О. В. Соснина [14, 16], для корректировки усилия в процессе деформирования мы использовали условие несжимаемости материала.

На рис. 1 приведены зависимости деформации от времени для одноосных испытаний круглых образцов из сплава АБВТ-20 при температуре 750 °С, экспериментальные данные отображены маркерами в координатах «деформация ε – время t », где $\varepsilon = \ln(1 + \Delta l/l_0)$. Стоит отметить, что для данной температуры материал проявляет слабые свойства анизотропии при ползучести, что отражается в различии скоростей деформации при одинаковых напряжениях и в характере разрушения образцов при растяжении (см. рис. 1, a – b). Здесь символом (*) обозначен момент разрушения образца — разделение его на две части. Также стоит отметить, что в испытаниях на растяжение при уменьшении прикладываемых напряжений имеет место рост предельных деформаций для образцов второго типа и уменьшение предельных деформаций для образцов первого типа. На рис. 1, c – d приведены экспериментальные данные испытаний на сжатие.

На рис. 2 представлена зависимость мощности работы рассеяния от напряжения на установившейся стадии ползучести в двойных логарифмических координатах. Диаграмма построена по данным одноосных испытаний, которые обозначены маркерами. Пунктирными линиями приведены зависимости отдельно для растяжения и для сжатия, которые построены на основе степенного закона ползучести с $n = (n_1 + n_2)/2$ и соответствующими уже для этого n значениями параметров B_{A_i} .

В табл. 1, 2 приведены значения параметров модели ползучести на растяжение и сжатие соответственно, которые получены по данным одноосных испытаний (величина h для B_{A_i} и B_{ω_i} ($i = 1, 2$) — время в часах). Параметры модели ползучести определялись по алгоритму, приведенному в [23]. Из данных таблиц и рис. 2 следует, что для описания поведения материала при данной температуре необходимо использовать модель ползучести, которая описывает различное сопротивление растяжению и сжатию. В работе [24] представлен вариант модели ортотропной ползучести с различными свойствами при растяжении и сжатии. Автором используется степенная форма закона ползучести без учета поврежденности материала. Учет различия свойств при растяжении и сжатии производится путем представления потенциала ползучести в виде полусуммы потенциалов для растяжения и для сжатия, а также добавления слагаемого, которое учитывает знак первого инварианта тензора напряжений. Модель (2) является частным случаем модели, рассмотренной в [24], отличие заключается в учете поврежденности материала и отсутствии учета ортотропии.

Кроме описанных выше экспериментальных исследований, проведены два испытания на знакопеременный чистый изгиб прямоугольных балок из АБВТ-20 при температуре 750 °С. Балки вырезались поперек проката плиты и имели следующие геометрические размеры:

- балка I: $b = 20.77$ мм, $h = 18.44$ мм;
- балка II: $b = 19.60$ мм, $h = 18.40$ мм.

Испытания проводились на установке для чистого изгиба балок в ИГиЛ СО РАН, схема установки приведена в [13]. Изменение прогиба балки посредством системы замеров фиксировалось электрическим датчиком линейных перемещений с последующей записью в память компьютера. Частота сбора данных: один раз в три секунды. База измерений прогиба составляла 100 мм. Программы нагружений изгибающими моментами были следующими:

- балка I: $M_I = 52.79$ Н·м, $M_{II} = -52.79$ Н·м, $M_{III} = -52.79$ Н·м, $M_{IV} = 52.79$ Н·м, $M_V = 52.79$ Н·м, $M_{VI} = -52.79$ Н·м;
- балка II: $M_I = 36.30$ Н·м, $M_{II} = -36.30$ Н·м, $M_{III} = -72.59$ Н·м, $M_{IV} = 72.59$ Н·м, $M_V = 72.59$ Н·м.

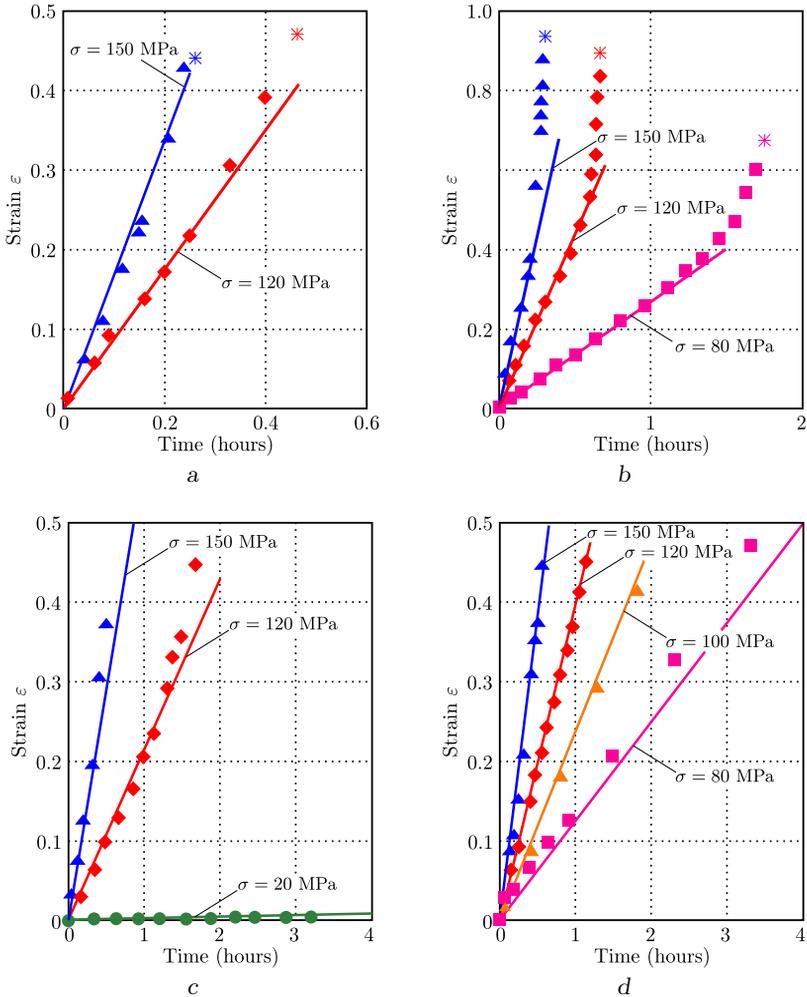
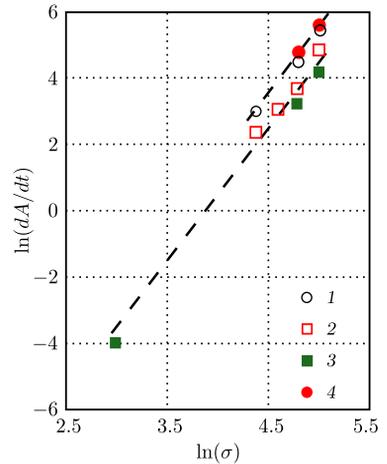


Рис. 1. Данные одноосных испытаний круглых образцов из сплава АБВТ-20 при температуре 750 °С: (а) растяжение образцов второго типа; (б) растяжение образцов первого типа; (в) сжатие образцов второго типа; (д) сжатие образцов первого типа

[Figure 1. The data for an uniaxial tests of the circle specimens at 750 °C: (a) tension specimens cut out crosswise of the rolling direction of plate; (b) tension specimens cut out along the direction of the rolling direction of plate; (c) compression specimens cut out crosswise of the rolling direction of plate; (d) compression specimens cut out along the direction of the rolling direction of plate]

Рис. 2. Зависимость мощности работы рассеяния на установившейся стадии ползучести от напряжения в двойных логарифмических координатах: 1 – растяжение образцов, вырезанных вдоль проката; 2 – сжатие образцов вдоль проката; 3 – сжатие образцов поперек проката; 4 – растяжение образцов поперек проката



[Figure 2. Dissipation energy under secondary creep and stresses in double logarithmical coordinates as the dependence curve: 1—tension specimens cut out along the direction of the rolling direction of plate; 2—compression specimens cut out along the direction of the rolling direction of plate; 3—compression specimens cut out crosswise of the rolling direction of plate; 4—tension specimens cut out crosswise of the rolling direction of plate]

Таблица 1

Значения параметров степенного закона ползучести на растяжение
[Power law creep parameters under tension]

Направление проката [Rolling direction]	n_1	$B_{A_1} \cdot 10^7,$ (MPa) $^{-n_1}$ /h	r_1	m_1	$B_{\omega_1} \cdot 10^6,$ (MPa) $^{-k_1}$ /h
вдоль [along]	3.82	11.08	2.72	1.34	1.55
поперек [crosswise]	3.46	79.29	2.92	0.81	3.56

Таблица 2

Значения параметров степенного закона ползучести на сжатие
[Power law creep parameters under compression]

Направление проката [Rolling direction]	n_2	$B_{A_2} \cdot 10^7,$ (MPa) $^{-n_2}$ /h	r_2	m_2	$B_{\omega_2} \cdot 10^7,$ (MPa) $^{-n_2}$ /h
вдоль [along]	3.86	4.54	0	0	0
поперек [crosswise]	4.06	0.92	0	0	0

На рис. 3, а приведена зависимость прогиба балки I при знакопеременном чистом изгибе. На каждом цикле нагружения балка испытывала действие постоянного по модулю момента, после достижения прогиба $\delta_0 \approx 4$ мм производились снятие момента и дальнейшая выдержка при температуре испытания без нагрузки. После снятия нагрузки датчик прогиба записывал процесс обратной ползучести. На рис. 3, б представлена зависимость модуля прогиба от времени для каждого цикла. Начальные точки графиков совмещены в начале координат, поэтому можно видеть уменьшение скорости прогиба балки с ростом номера цикла нагружения. Стоит отметить, что модель ползучести, представленная в настоящей работе, не учитывает эффект обратной ползучести. Поэтому в дальнейшем для теоретической обработки результатов использовались лишь кривые ползучести при активном нагружении, а деформация обратной ползучести не учитывалась.

4. Сравнение численного расчета с данными испытаний на балках. Результаты численного решения (6)–(7) сравнивались с данными испытаний знакопеременного чистого изгиба балок. На рис. 4 представлены ре-

зультаты первых этапов нагружения балок I (a) и II (b). Точки соответствуют экспериментальным зависимостям кривизны балки от времени нагружения $\varkappa = \varkappa(t)$. Черные линии представляют расчетные значения кривизны, вычисленные по выражению (7). Анализ данной зависимости показывает, что расчетная скорость роста кривизны больше экспериментальной.

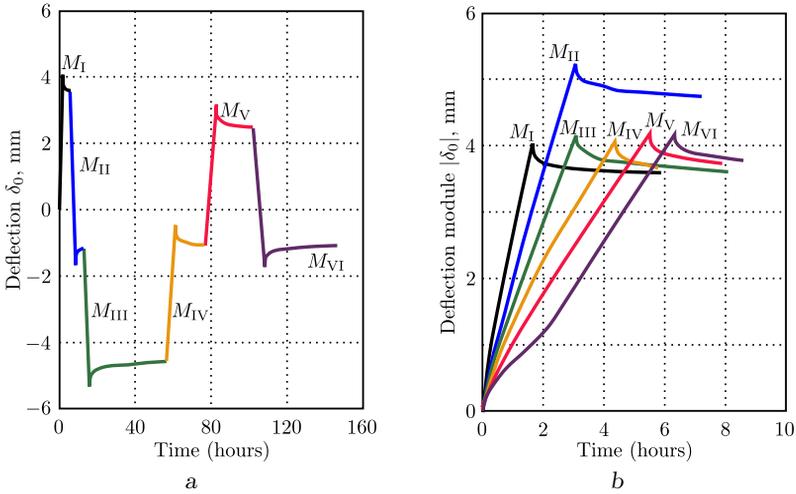


Рис. 3. Чистый знакопеременный изгиб балки I из титанового сплава АБВТ-20 при температуре 750°C: (a) зависимость абсолютного прогиба от длительности эксперимента; (b) зависимость прогиба от времени в каждом цикле

[Figure 3. Pure reversed bending of type I beam made of the titanium ABVT-20 alloy at 750°C: (a) the dependence absolute deflection at duration of experiment; (b) the dependence deflection at time in each cycle; the test program: $M_I = 52.79 \text{ N} \cdot \text{m}$, $M_{II} = -52.79 \text{ N} \cdot \text{m}$, $M_{III} = -52.79 \text{ N} \cdot \text{m}$, $M_{IV} = 52.79 \text{ N} \cdot \text{m}$, $M_V = 52.79 \text{ N} \cdot \text{m}$, $M_{VI} = -52.79 \text{ N} \cdot \text{m}$]

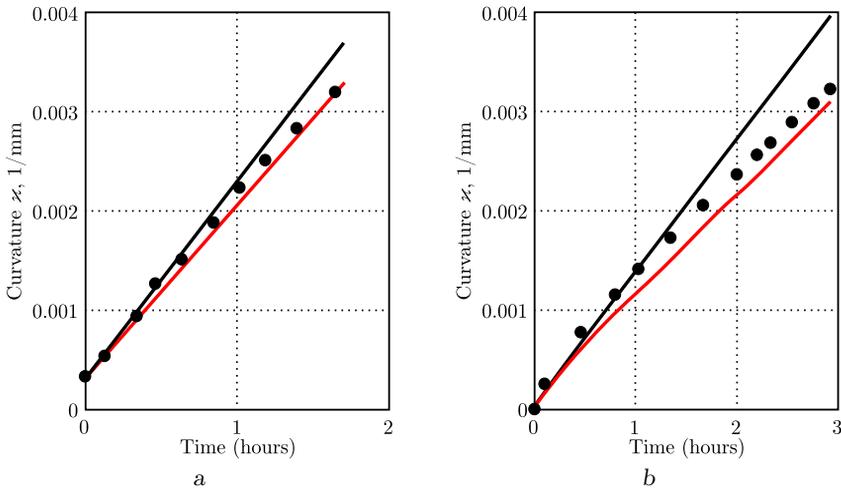


Рис. 4. Зависимость кривизны от времени для экспериментальных (точки) и расчетных данных без учета (черные линии) и с учетом (красные линии) скорости изменения прогиба от длительности эксперимента соответственно для $M = 52.79 \text{ Н} \cdot \text{м}$ (a), $M = 36.30 \text{ Н} \cdot \text{м}$ (b)
 [Figure 4. Experimental (points) and calculated curvature (solid lines) as the dependence deflection at time for $M = 52.79 \text{ N} \cdot \text{m}$ (a), $M = 36.3 \text{ N} \cdot \text{m}$ (b)]

В связи с неудовлетворенностью таким описанием процесса была проанализирована зависимость изменения скорости ползучести от времени выдержки при температуре. Такая зависимость для скорости прогиба балки приведена в [13]. Эта зависимость была использована для корректировки параметров модели ползучести. В результате на рис. 4 красные кривые представляют расчетные значения кривизны балки с учетом влияния выдержки при температуре. Расчет скорости деформаций ползучести производился с учетом зависимости параметра B_{A_i} от времени по следующей зависимости [13]:

$$B_{A_i}(t) = 8\psi(t)^{n_i-1}/(L^2 M^{n_i-1}),$$

где скорость прогиба $\psi(t) = -0.009 \cdot \ln(t) + 0.0544$; $L = 100$ мм — длина базы измерений; $M = 52790$ Н·м; n_i — показатели ползучести при растяжении ($i = 1$) и сжатии ($i = 2$). Данная зависимость получена на основе анализа экспериментальных данных изменения скорости прогиба балки I, приведенных на рис. 3, b. Это позволило приблизить расчетные данные к экспериментальным (ошибка на каждом этапе нагружения не превосходит 2 %).

На рис. 5 представлена зависимость кривизны балки от времени для знакопеременного чистого изгиба прямоугольной балки II. Изгибающие моменты на каждом этапе были различными, в связи с чем данные этого испытания являются проверочными для рассматриваемой модели ползучести. Точками обозначены экспериментальные данные, сплошными линиями — расчетные зависимости с учетом разнсопротивляемости, поврежденности и влияния температурной выдержки. Видно, что модель описывает уменьшение скорости прогиба с увеличением времени выдержки при температуре.

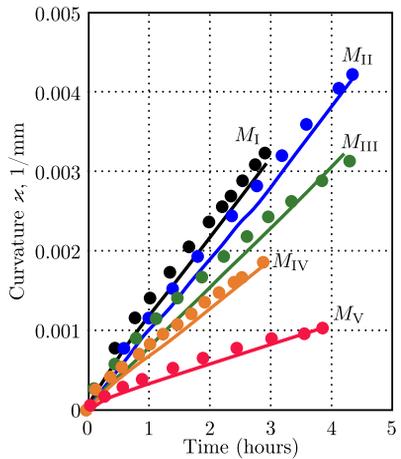


Рис. 5. Зависимость кривизны от времени в виде экспериментальных (точки) и расчетных данных (сплошные линии) и под действием моментов на каждом этапе: $M_I = 36.3$ Н·м, $M_{II} = 72.59$ Н·м, $M_{III} = -36.3$ Н·м, $M_{IV} = -72.59$ Н·м, $M_V = 72.59$ Н·м

[Figure 5. Experimental (points) and calculated curvature (solid lines) as the dependence curve by the action of moments at every step: $M_I = 36.3$ N·m, $M_{II} = 72.59$ N·m, $M_{III} = -36.3$ N·m, $M_{IV} = -72.59$ N·m, $M_V = 72.59$ N·m]

Выводы. Проведено экспериментальное исследование и математическое моделирование знакопеременного чистого изгиба балок из титанового сплава АБВТ-20 с учетом длительности пребывания материала при температуре 750°C. Данные одноосных испытаний при этой температуре позволили установить, что материал является разнсопротивляющимся растяжению и сжатию. Испытания при знакопеременном изгибе балок показали падение скорости прогиба в зависимости от длительности пребывания при температуре. Такая зависимость была определена на основе данных знакопеременного изгиба прямоугольной балки под действием постоянного по модулю момента

сил. Предложена модификация параметров B_{A_i} ($i = 1, 2$) в модели ползучести при активном нагружении, учитывающая длительность температурной выдержки, что позволило с удовлетворительной погрешностью описать знакопеременный изгиб балок. Одно из возможных применений модификации модели ползучести, учитывающих длительность температурных выдержек, связано, например, с формоизменением изделий в технологических операциях в условиях ползучести материалов, обладающих наблюдаемыми в данном исследовании свойствами.

Конкурирующие интересы. Мы заявляем, что у нас нет конфликта интересов в авторстве и публикации этой статьи.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Мы несем полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была нами одобрена.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-08-00713_a).

Благодарность. Авторы благодарны рецензенту за тщательное прочтение статьи и ценные предложения и комментарии.

Библиографический список

- Ribeiro F. C., Marinho E. P., Inforzato D. J., Costa P. R., Batalha G. F. Creep age forming: a short review of fundamentals and applications // *Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering*, 2010. vol. 43, no. 1. pp. 353–361, Available at http://jamme.acmsse.h2.pl/papers_vol43_1/43139.pdf (August 24, 2018).
- Beal J. D., Boyer R., Sanders D. Forming of titanium and titanium Alloys / *ASM Handbook*. vol. 14B, Metalworking: Sheet Forming. ASM International, 2006. pp. 656–669.
- Yang Y., Zhan L., Ma Q. et al. Effect of pre-deformation on Creep age forming of AA2219 plate: Springback, microstructures and mechanical properties // *J. Mater. Process Technology*, 2016. vol. 229. pp. 697–702. doi: [10.1016/j.jmatprotec.2015.10.030](https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2015.10.030).
- Lam A. C. L., Shi Z., Yang H. et al. Creep-age forming AA2219 plates with different stiffener designs and pre-form age conditions: Experimental and finite element studies // *J. Mater. Process Technology*, 2015. vol. 219. pp. 155–163. doi: [10.1016/j.jmatprotec.2014.12.012](https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2014.12.012).
- Yang Y., Zhan L., Shen R. et al. Effect of pre-deformation on creep age forming of 2219 aluminum alloy: Experimental and constitutive modelling // *Mater. Sci. Eng. A*, 2017. vol. 683. pp. 227–235. doi: [10.1016/j.msea.2016.12.024](https://doi.org/10.1016/j.msea.2016.12.024).
- Олейников А. И., Бормотин К. С. Моделирование формообразования крыловых панелей в режиме ползучести с деформационным старением в решениях обратных задач // *Ученые записки КнАГТУ*, 2015. № II-1(22). С. 346–365.
- Коробейников С. Н., Олейников А. И., Горев Б. В., Бормотин К. С. Математическое моделирование процессов ползучести металлических изделий из материалов, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии // *Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии*, 2008. Т. 9, № 1. С. 346–365.
- Локощенко А. М. *Ползучесть и длительная прочность металлов*. М.: Физматлит, 2016. 504 с.
- Кайбышев О. А. *Сверхпластичность промышленных сплавов*. М.: Металлургия, 1984. 264 с.
- Сафиуллин Р. В. Сверхпластическая формовка и сварка давлением многослойных полых конструкций. Часть II. Опыт ИПСМ РАН // *Письма о материалах*, 2012. Т. 2, № 1. С. 36–39.
- Радченко В. П., Саушкин М. Н. *Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях*. М.: Машиностроение-1, 2005. 226 с.

12. Локощенко А. М., Агахи К. А., Фомин Л. В. Изгиб балки при ползучести с учетом поврежденности и разносопротивляемости материала // *Машиностроение и инженерное образование*, 2012. № 3(32). С. 29–35.
13. Колодезев В. Е., Горев Б. В., Ларичкин А. Ю., Шевцова Л. И. Чистый изгиб балки из сплава АБВТ-20 в режиме ползучести при знакопеременном нагружении // *Технология машиностроения*, 2017. № 2(176). С. 11–16.
14. Соснин О. В., Горев Б. В., Никитенко А. Ф. *Энергетический вариант теории ползучести*. Новосибирск: ИГиЛ СО АН СССР, 1986. 95 с.
15. Никитенко А. Ф. *Ползучесть и длительная прочность металлических материалов*. Новосибирск: Новосиб. гос. архит.-строит. ун-т, 1997. 278 с.
16. Горев Б. В., Любашевская И. В., Панамарев В. А., Иявойнен С. В. Описание процесса ползучести и разрушения современных конструкционных материалов с использованием кинетических уравнений в энергетической форме // *ПМТФ*, 2014. Т. 55, № 6. С. 132–144.
17. Горев Б. В. К расчету на неустановившуюся ползучесть изгибаемого бруса из материала с разными характеристиками на растяжение и сжатие / *Динамика сплошной среды: сб. науч. тр.*, Вып. 14. Новосибирск: АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики, 1973. С. 44–51.
18. Кузнецов Е. Б., Леонов С. С. Чистый изгиб балки из разномодульного материала в условиях ползучести // *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование*, 2013. Т. 6, № 4. С. 26–38.
19. Соснин О. В. О ползучести материалов с разными характеристиками на растяжение и сжатие // *ПМТФ*, 1970. № 5. С. 136–139.
20. Merson R. H. An operational method for the study of integration processes / *Proc. Symp. Data Processing, Weapons Res. Establ. Salisbury*. Salisbury, 1957. pp. 110–125; Pospelov V. V. *Kutta-Merson method*: Encyclopedia of Mathematics, 2014, Available at http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Kutta-Merson_method&oldid=33669 (August 24, 2018).
21. Pao Y. C. *Engineering analysis. Interactive methods and programs with FORTRAN, Quick-BASIC, MATLAB, and Mathematica*. Boca Raton, FL: CRC Press, 1998. 360 pp.
22. Работнов Ю. Н. *Ползучесть элементов конструкций*. М.: Наука, 2014. 752 с.
23. Горев Б. В., Клопотов И. Д. К описанию процесса ползучести и длительной прочности по уравнениям с одним скалярным параметром повреждаемости // *ПМТФ*, 1994. № 5. С. 92–102.
24. Цвелодуб И. Ю. К построению определяющих уравнений ползучести ортотропных материалов с различными свойствами при растяжении и сжатии // *ПМТФ*, 2012. № 6. С. 98–101.

MSC: 74S30, 74D10

Numerical and experimental research of pure bending of beams made of the titanium ABVT-20 alloy with different properties for tension and compression under creep conditions

S. V. Iyavoynen, A. Yu. Larichkin, V. E. Kolodezev

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics
of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
15, Lavrentyev av., Novosibirsk, 630090, Russian Federation.

Abstract

Solution of the problem of pure bending of a beam of rectangular cross section taking into account the difference of properties tension and compression under creep is considered. Program algorithm of mathematical simulation of the stress redistribution process along the height of a beam with allowance for damage accumulation is constructed and implemented. Modeling of creep processes of softening material is based on equations of the kinetic theory of creep and damage. In this paper, Runge–Kutta–Merson numerical integration algorithm for creep damage analysis is presented. The simulation results are compared with the experimental data of pure bending of rectangular section beams from the titanium ABVT-20 alloy under the action of an alternating moment and a prolonged exposure to temperature of 750°C. A satisfactory agreement between the simulation results and the experimental data was obtained, taking into account the duration of the temperature aging in the creep law.

Keywords: high temperature creep, different resistivity, pure bending, experimental studies, modeling, ABVT-20 alloy.

Received: 6th March, 2018 / Revised: 24th August, 2018 /

Accepted: 3rd September, 2018 / First online: 10th October, 2018

Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Iyavoynen S. V., Larichkin A. Yu., Kolodezev V. E. Numerical and experimental research of pure bending of beams made of the titanium ABVT-20 alloy with different properties for tension and compression under creep conditions, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 3, pp. 430–446. doi: [10.14498/vsgtu1614](http://doi.org/10.14498/vsgtu1614) (In Russian).

Authors' Details:

Svetlana V. Iyavoynen  <http://orcid.org/0000-0002-1478-0533>

Postgraduate Student; Junior Researcher; Lab. of Static Strength;

e-mail: svetaiyavoynen@gmail.com

Aleksey Yu. Larichkin  <http://orcid.org/0000-0002-7306-9522>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Researcher; Lab. of Static Strength;

e-mail: larichking@gmail.com

Vadim E. Kolodezev  <http://orcid.org/0000-0001-8035-7453>

Cand. Tech. Sci.; Incorporated Engineer; Lab. of Static Strength;

e-mail: kolodezev.vadim@yandex.ru

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-08-00713_a).

Acknowledgments. The authors are grateful to the referee for careful reading of the paper and valuable suggestions and comments.

References

- Ribeiro F. C., Marinho E. P., Inforzato D. J., Costa P. R., Batalha G. F. Creep age forming: a short review of fundamentals and applications, *Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering*, 2010, vol. 43, no. 1, pp. 353–361, Available at http://jamme.acmsse.h2.pl/papers_vol43_1/43139.pdf (August 24, 2018).
- Beal J. D., Boyer R., Sanders D. Forming of titanium and titanium Alloys, In: *ASM Handbook*, vol. 14B, Metalworking: Sheet Forming. ASM International, 2006, pp. 656–669.
- Yang Y., Zhan L., Ma Q. et al. Effect of pre-deformation on Creep age forming of AA2219 plate: Springback, microstructures and mechanical properties, *J. Mater. Process Technology*, 2016, vol. 229, pp. 697–702. doi: [10.1016/j.jmatprotec.2015.10.030](https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2015.10.030).
- Lam A. C. L., Shi Z., Yang H. et al. Creep-age forming AA2219 plates with different stiffener designs and pre-form age conditions: Experimental and finite element studies, *J. Mater. Process Technology*, 2015, vol. 219, pp. 155–163. doi: [10.1016/j.jmatprotec.2014.12.012](https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2014.12.012).
- Yang Y., Zhan L., Shen R. et al. Effect of pre-deformation on creep age forming of 2219 aluminum alloy: Experimental and constitutive modelling, *Mater. Sci. Eng. A*, 2017, vol. 683, pp. 227–235. doi: [10.1016/j.msea.2016.12.024](https://doi.org/10.1016/j.msea.2016.12.024).
- Oleinikov A. I., Bormotin K.S. Modeling the process of forming wing panels in the creep mode with strain aging in the solution of inverse problems, *Uchenye Zapiski Komsomol'skogo-na-Amure Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta*, 2015, no. II-1(22), pp. 346–365 (In Russian).
- Korobeynikov S. N., Oleinikov A. I., Gorev B. V., Bormotin K. S. Mathematical simulation of creep processes in metal patterns made of materials with different extension compression properties, *Vychislitel'nye Metody i Programmirovaniye: Novye Vychislitel'nye Tekhnologii*, 2008, vol. 9, no. 1, pp. 346–365 (In Russian).
- Lokoshchenko A. M. *Polzuchest' i dlitel'naiia prochnost' metallov* [Creep and Long-Term Strength of Metals]. Moscow, Fizmatlit, 2016, 504 pp. (In Russian)
- Kaibyshev O. A. *Sverkhplastichnost' promyshlennykh splavov* [The Superplasticity of Industrial Alloys]. Moscow, Metallurgii, 1984, 264 pp. (In Russian)
- Safullin R. V. Superplastic forming and pressure welding of multilayer hollow structures. Part II. Experience of IMSP RAS, *Pis'ma o Materialakh*, 2012, vol. 2, no. 1, pp. 36–39 (In Russian).
- Radchenko V. P., Saushkin M. N. *Polzuchest' i relaksatsiia ostatochnykh napriazhenii v uprochnennykh konstruktivnykh* [Creep and Relaxation of Residual Stresses in Hardened Structures]. Moscow, Mashinostroenie-1, 2005, 226 pp. (In Russian)
- Lokoshchenko A. M., Agakhi K. A., Fomin L. V. Beam bending under creep considering the damage and multimodulus behavior of the material, *Mechanic Engineering and Engineering Education*, 2012, no. 3(32), pp. 29–35 (In Russian).
- Kolodezev V. E., Gorev B. V., Larichkin A. Iu., Shevtsova L. I. Pure bending of beams from an alloy ABVT-20 in creep mode at alternating loading, *Tekhnologiya Mashinostroeniia*, 2017, no. 2(176), pp. 11–16 (In Russian).

14. Sosnin O. V., Gorev B. V., Nikitenko A. F. *Energeticheskii variant teorii polzuchesti* [Energy Variant of the Creep Theory]. Novosibirsk, Lavrentiev Institute of Hydrodynamics, 1986, 95 pp. (In Russian)
15. Nikitenko A. F. *Polzuchest' i dlitel'naiia prochnost' metallicheskih materialov* [Creep and Long-term Strength of Metal Materials]. Novosibirsk, Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, 1997, 278 pp. (In Russian)
16. Gorev B. V., Lubashevskaya I. V., Panamarev V. A., Iyavoynen S.V. Description of creep and fracture of modern construction materials using kinetic equations in energy form, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2014, vol.55, no.6, pp. 1020–1030. doi: [10.1134/S0021894414060145](https://doi.org/10.1134/S0021894414060145).
17. Gorev B. V. To calculation for transient creep beam bending of material with different characteristics in tension and compression, In: *Dinamika sploshnoi sredy* [Continuum Dynamics], Issue 14. Novosibirsk, Lavrentiev Institute of Hydrodynamics, 1973, pp. 44–51 (In Russian).
18. Kuznetsov E. B., Leonov S. S. Pure Bending for the Multimodulus Material Beam at Creep Conditions, *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, 2013, vol. 6, no. 4, pp. 26–38 (In Russian).
19. Sosnin O. V. Creep in materials with different tension and compression behavior, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1970, vol. 11, no. 5, pp. 832–835. doi: [10.1007/BF00851914](https://doi.org/10.1007/BF00851914).
20. Merson R. H. An operational method for the study of integration processes, In: *Proc. Symp. Data Processing, Weapons Res. Establ. Salisbury*. Salisbury, 1957, pp. 110–125; Pospelov V. V. *Kutta-Merson method*, Encyclopedia of Mathematics, 2014, Available at http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Kutta-Merson_method&oldid=33669 (August 24, 2018).
21. Pao Y. C. *Engineering analysis. Interactive methods and programs with FORTRAN, Quick-BASIC, MATLAB, and Mathematica*. Boca Raton, FL, CRC Press, 1998, 360 pp.
22. Rabotnov Yu. N. *Polzuchest' elementov konstruktzii* [Creep of Construction Elements]. Moscow, Nauka, 2014, 752 pp. (In Russian)
23. Gorev B. V., Klopotov I. D. Description of the creep process and long-term strength by equations with one scalar damage parameter, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1994, vol. 35, no. 5, pp. 726–734. doi: [10.1007/BF02369552](https://doi.org/10.1007/BF02369552).
24. Tselodub I. Yu. Construction of constitutive equations of creep in orthotropic materials with different properties under tension and compression, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2012, vol. 53, no. 6, pp. 888–890. doi: [10.1134/S0021894412060119](https://doi.org/10.1134/S0021894412060119).