



УДК 517.938

## Хаотические режимы фрактального нелинейного осциллятора

*Р. И. Паровик*

<sup>1</sup> Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Россия, 684034, Камчатский край, Паратунка, ул. Мирная, 7.

<sup>2</sup> Камчатский государственный университет им. Витуса Беринга, Россия, 683032, Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4.

### Аннотация

В работе проведено исследование фрактального нелинейного осциллятора с целью идентификации его хаотических колебательных режимов. Мерой хаоса для динамической системы являются максимальные показатели Ляпунова. Они рассматриваются как мера разбегания нескольких фазовых траекторий, построенных при разных начальных условиях. Для определения максимальных показателей Ляпунова используются алгоритмы, которые связаны либо с исследованием временных рядов (алгоритм Бенеттина), либо с непосредственным решением расширенной динамической системы (алгоритм Вольфа). В работе в качестве методики построения максимальных показателей Ляпунова был выбран алгоритм Вольфа с процедурой ортогонализации Грама–Шмидта. Этот алгоритм использует решение расширенной исходной динамической системы совместно с уравнениями в вариациях, а процедура ортогонализации Грама–Шмидта позволяет нивелировать составляющую максимального показателя Ляпунова при вычислении векторов вдоль фазовых траекторий. Далее алгоритм Вольфа был использован для построения спектров показателей Ляпунова в зависимости от значений управляющих параметров исходной динамической системы. В работе было показано, что некоторые спектры показателей Ляпунова содержат наборы положительных значений, что подтверждает наличие хаотического режима, а также это подтверждается фазовыми траекториями. Установлено, что фрактальный нелинейный осциллятор имеет режимы не только колебания, но и вращения. Эти вращения могут быть хаотическими и регулярными.

**Ключевые слова:** максимальные показатели Ляпунова, алгоритм Вольфа, хаотический аттрактор, предельный цикл, спектр показателей Ляпунова, нелинейный фрактальный осциллятор.

### Научная статья

Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

### Образец для цитирования

Паровик Р. И. Хаотические режимы фрактального нелинейного осциллятора // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2018. Т. 22, № 2. С. 364–379. doi: [10.14498/vsgtu1611](https://doi.org/10.14498/vsgtu1611).

### Сведения об авторе

*Роман Иванович Паровик*  <http://orcid.org/0000-0002-1576-1860>

кандидат физико-математических наук, доцент; старший научный сотрудник; лаб. моделирования физических процессов<sup>1</sup>; декан; физико-математический факультет<sup>2</sup>;  
e-mail: [parovik@ikir.ru](mailto:parovik@ikir.ru)

Получение: 27 февраля 2018 г. / Исправление: 26 апреля 2018 г. /

Принятие: 11 июня 2018 г. / Публикация онлайн: 28 июня 2018 г.

**Введение.** Исследование различных динамических систем с целью выявления хаотических режимов имеет важное практическое значение. Это связано с тем, что хаотические режимы практически всегда возникают в нелинейных средах и обладают такими важными свойствами, как зависимость от начальных условий и потеря информации о них [1]. Хаотические режимы исследуются, например, в электроэнергетических системах [2, 3], радиоэлектронике [4], биологии [5], химии [6], экономике [7] и других науках.

Количественной мерой хаотических режимов выступают показатели Ляпунова, которые определяют скорость разбегания фазовых траекторий, построенных при различных начальных условиях [8]. Существование хаотического режима будет определяться положительностью максимального показателя Ляпунова. Для расчета максимального показателя Ляпунова существуют такие основные алгоритмы, как алгоритм Вольфа [9] или алгоритм Бенеттина [10, 11]. Первый алгоритм связан с нахождением решения исходной динамической системы совместно с комплектами уравнений в вариациях, а второй алгоритм — с оценкой расстояния между несколькими временными рядами. Отметим, что для этих алгоритмов в силу того, что максимальный показатель Ляпунова является доминирующим по величине, для вычисления остальных минимальных показателей необходимо проводить процедуру ортогонализации Грама—Шмидта [12, Chapter 4, pp. 44–46]. Чтобы определить границы существования хаотического режима, строят спектр показателей Ляпунова в зависимости от значений управляющего параметра динамической системы.

В работе с помощью алгоритма Вольфа с ортогонализацией Грама—Шмидта рассчитаны спектры показателей Ляпунова для нелинейного фрактально-го осциллятора.

### Постановка задачи и методика исследования.

**Задача.** Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\partial_{0t}^{\beta} x(\eta) + \lambda \partial_{0t}^{\gamma} x(\eta) + \omega^{\beta} \sin(x(t)) = \delta \cos(\varphi t), \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0, \quad (1)$$

где  $x(t) \in C^2(0, T)$  — функция смещения,  $t \in [0, T]$  — время рассматриваемого процесса,  $T > 0$  — время моделирования,  $\lambda > 0$  — коэффициент трения,  $\omega$  — собственная частота;  $\delta$  и  $\varphi$  — амплитуда и частота внешнего воздействия, а операторы

$$\partial_{0t}^{\beta} x(\eta) = \frac{1}{\Gamma(2 - \beta)} \int_0^t \frac{\ddot{x}(\eta) d\eta}{(t - \eta)^{\beta - 1}}, \quad 1 < \beta < 2,$$

$$\partial_{0t}^{\gamma} x(\eta) = \frac{1}{\Gamma(1 - \gamma)} \int_0^t \frac{\dot{x}(\eta) d\eta}{(t - \eta)^{\gamma}}, \quad 0 < \gamma < 1,$$

понимаются в смысле Герасимова—Капуто [13, 14].

Задача Коши (1) описывает фрактальный нелинейный осциллятор, а в случае малых колебаний  $\sin(x(t)) \approx x(t)$  — фрактальный линейный осциллятор, рассмотренный в работах [15, 16]. В работе [17] было рассмотрено обобщение модели (1) в случае переменных дробных порядков  $\beta(t)$  и  $\gamma(t)$ , построена и исследована конечно-разностная схема. Отметим, что при значениях  $\beta = 2$  и  $\gamma = 1$  задача Коши (1) переходит в задачу Коши для классического нелинейного осциллятора [18].

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что классический нелинейный осциллятор может обладать двумя движениями: колебательным и вращательным. Поэтому возникает вопрос: обладает ли этими движениями осциллятор (1)? На него мы постараемся ответить в этой статье.

Фрактальный нелинейный осциллятор (1) является представителем более общего класса осцилляторов — эрдитарных нелинейных осцилляторов, рассмотренных в монографии автора [19]. Эрдитарность, или эффект памяти в осцилляторах, определяет свойство состояний колебательной системы сохранять информацию о предыстории. В работе итальянского математика Вито Вольтерра [20] был рассмотрен пример эрдитарного осциллятора, который описывался с помощью интегро-дифференциального уравнения с разностным ядром — функцией памяти. Функции памяти определяет тип эрдитарного осциллятора. Для осциллятора (1) функция памяти является степенной функцией и она входит в определение операторов дробных производных Герасимова—Капуто, поэтому фрактальные осцилляторы иногда называют осцилляторами со степенной памятью.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что вопросы существования и единственности решения задачи Коши (1) были рассмотрены в работе [21], а в [19] предложены и исследованы конечно-разностные схемы для ее численного решения.

Фрактальный нелинейный осциллятор (1) удобно записать в виде неавтономной системы

$$\begin{cases} \partial_{0t}^{\alpha_1} x_1(t) = x_2(t), & \alpha_1 = \gamma, \\ \partial_{0t}^{\alpha_2} x_2(t) = \delta \cos(\varphi t) - \lambda x_2(t) - \omega^\beta \sin(x_1(t)), & \alpha_2 = \beta - \gamma, \\ x_1(0) = x_0, & x_2(0) = y_0. \end{cases} \quad (2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что в системе (2) возможны случаи, когда  $\alpha_2 \leq 1$  и  $\alpha_2 > 1$ , что необходимо учитывать при построении ее численного решения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Системой уравнений в вариациях для фрактальной динамической системы (2) будем называть систему вида

$$\begin{cases} \partial_{0t}^{\alpha_1} \Delta x_1(t) = \Delta x_2, \\ \partial_{0t}^{\alpha_2} \Delta x_2(t) = -\omega^\beta \cos(x_1(t)) \Delta x_1 - \lambda \Delta x_2. \end{cases} \quad (3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Систему уравнений в вариациях (3) можно получить из более общей формулы, записанной в векторной форме:

$$\partial_{0t}^\alpha X = J(X)X, \quad \partial_{0t}^\alpha X = \{\partial_{0t}^{\alpha_1} \Delta x_1, \partial_{0t}^{\alpha_2} \Delta x_2\}, \quad X = \{\Delta x_1, \Delta x_2\},$$

где  $J(X)$  — якобиан системы (2).

Система уравнений в вариациях (3) для исходной динамической системы (2) является ключевой при построении максимальных показателей Ляпунова по алгоритму Вольфа [9]. Эти уравнения описывают эволюцию бесконечно малого возмущения фазовой траектории исходной динамической системы (2).

**Алгоритм Вольфа.** Рассмотрим алгоритм Вольфа с ортогонализацией Грама—Шмидта для построения максимальных показателей Ляпунова. Алгоритм состоит из следующих этапов.

1. Выбираем начальную точку — начальный вектор  $x_0$  и вместе с ней будем отслеживать  $K$  возмущенных траекторий. В нашем случае  $K = 2$ .
2. Решаем численно исходное уравнение совместно с двумя комплектами возмущенных уравнений или уравнений в вариациях (3). Причем общее количество решаемых уравнений можно определить по формуле  $n(n + 1)$ , где  $n$  — количество уравнений в исходной системе. В качестве начальных векторов для уравнений в вариациях (3) необходимо выбрать набор векторов  $\tilde{x}_0^0, \tilde{y}_0^0$ , которые являются ортогональными и нормированными на единицу.
3. Через время  $T$  траектория перейдет в некоторую точку  $x_1$ , векторы возмущения  $\tilde{x}_1, \tilde{y}_1$  перенормируем с помощью метода Грама—Шмидта по формулам

$$\tilde{x}_1^0 = \frac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}_1\|}, \quad \tilde{y}_1' = \tilde{y}_1 - (\tilde{y}_1, \tilde{x}_1^0) \tilde{x}_1^0, \quad \tilde{y}_1^0 = \frac{\tilde{y}_1'}{\|\tilde{y}_1'\|}.$$

Здесь  $(,)$  — скалярное произведение векторов.

4. Далее продолжаем счет от точки  $x_1$  и векторов возмущений  $\tilde{x}_1^0, \tilde{y}_1^0$ . Через очередной интервал времени  $T$  получаем новый набор векторов возмущений  $\tilde{x}_2, \tilde{y}_2$ , которые подвергаются ортогонализации и перенормировке.
5. Этапы 2–4 повторяются  $M$  раз и по ходу вычислений подсчитываются суммы

$$S_1 = \sum_{i=1}^M \ln(\|\tilde{x}_i\|), \quad S_2 = \sum_{i=1}^M \ln(\|\tilde{y}_i\|),$$

в которых фигурируют векторы возмущений до перенормировки, но после ортогонализации.

6. Оценка максимальных показателей Ляпунова вычисляется по формуле

$$\Lambda_{\max}^i = \frac{S_i}{MT}, \quad i = 1, \dots, n.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Процедура ортогонализации Грама—Шмидта необходима для того, чтобы исключить доминирование составляющей максимального показателя Ляпунова на больших временах при вычислении векторов вдоль фазовой траектории. В противном случае задача будет являться плохо обусловленной.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Отметим, что для существования аттрактора в рассматриваемой динамической системе (2) необходимо, чтобы сумма всех показателей Ляпунова была отрицательной:

$$\sum_{i=1}^n \Lambda_{\max}^i < 0.$$

Большое значение имеет исследование спектра максимальных показателей Ляпунова, который строится в зависимости от значений интересующего нас управляющего параметра исходной системы. Управляющими параметрами для системы (2) могут быть  $\lambda$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Поэтому мы будем исследовать следующие зависимости максимального показателя Ляпунова:  $\Lambda_{\max}(\lambda)$ ,  $\Lambda_{\max}(\beta)$  и  $\Lambda_{\max}(\gamma)$ .

Рассмотрим нелинейный фрактальный осциллятор (2) и будем считать, что в этой динамической системе  $\alpha_2 \leq 1$ . Рассмотрим этапы алгоритма Вольфа для построения максимальных показателей Ляпунова.

Так как система (2) состоит из двух уравнений, количество уравнений в вариациях также будет два, для которых мы выберем начальные условия  $x_1^{(1)}(0) = 1$ ,  $x_2^{(1)}(0) = 0$  и  $x_1^{(2)}(0) = 0$ ,  $x_2^{(2)}(0) = 1$ . Легко проверить, что эти начальные условия ортогональны и нормированы на единицу.

Для построения уравнений в вариациях определим якобиан для системы (2):

$$J(X) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^\beta \cos(x_1) & -\lambda \end{bmatrix}.$$

Тогда уравнения в вариациях и совместно с системой (2) имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{0t}^{\alpha_1} x_1(t) = x_2(t), \\ \partial_{0t}^{\alpha_2} x_2(t) = \delta \cos(\varphi t) - \lambda x_2(t) - \omega^\beta \sin(x_1(t)), \\ \partial_{0t}^{\alpha_1} x_1^{(1)}(t) = x_2^{(1)}(t), \\ \partial_{0t}^{\alpha_2} x_2^{(1)}(t) = -\omega^\beta \sin(x_1(t)) x_1^{(1)}(t) - \lambda x_2^{(1)}(t), \\ \partial_{0t}^{\alpha_1} x_1^{(2)}(t) = x_2^{(2)}(t), \\ \partial_{0t}^{\alpha_2} x_2^{(2)}(t) = -\omega^\beta \sin(x_1(t)) x_1^{(2)}(t) - \lambda x_2^{(2)}(t), \\ x_1(0) = x_0, \quad x_2(0) = y_0, \\ x_1^{(1)}(0) = 1, \quad x_2^{(1)}(0) = 0, \\ x_1^{(2)}(0) = 0, \quad x_2^{(2)}(0) = 1. \end{array} \right. \quad (4)$$

Вся сложность алгоритма Вольфа заключается в решении системы (4), которая точного решения не имеет. Поэтому систему (4) необходимо решать численно, например, с помощью аппроксимации операторов дробных производных и перехода к алгебраической системе уравнений [19].

После некоторых преобразований система (4) может иметь дискретный аналог, который можно записать следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x_{1,j+1} = \frac{1}{A} \left( x_{2,j} - A \sum_{k=1}^{j-1} w_k (x_{1,j-k-1} - x_{1,k-j}) + Ax_{1,j} \right), \\
 x_{2,j+1} = \frac{1}{B} \left( (B - \lambda) x_{2,j} - B \sum_{k=1}^{j-1} v_k (x_{2,j-k-1} - x_{2,k-j}) - \right. \\
 \qquad \qquad \qquad \left. - \delta \cos(j\tau\varphi) - \omega^\beta \sin x_{1,j} \right), \\
 x_{1,j+1}^{(1)} = \frac{1}{A} \left( x_{2,j}^{(1)} - A \sum_{k=1}^{j-1} w_k (x_{2,j-k-1}^{(1)} - x_{2,k-j}^{(1)}) + Ax_{1,j}^{(1)} \right), \\
 x_{2,j+1}^{(1)} = \frac{1}{B} \left( (B - \lambda) x_{2,j}^{(1)} - B \sum_{k=1}^{j-1} v_k (x_{2,j-k-1}^{(1)} - x_{2,k-j}^{(1)}) - \right. \\
 \qquad \qquad \qquad \left. - \omega^\beta \cos(x_{1,j}) x_{1,j}^{(1)} \right), \\
 x_{1,j+1}^{(2)} = \frac{1}{A} \left( x_{2,j}^{(2)} - A \sum_{k=1}^{j-1} w_k (x_{1,j-k-1}^{(2)} - x_{1,k-j}^{(2)}) + Ax_{1,j}^{(2)} \right), \\
 x_{2,j+1}^{(2)} = \frac{1}{B} \left( (B - \lambda) x_{2,j}^{(2)} - B \sum_{k=1}^{j-1} v_k (x_{2,j-k-1}^{(2)} - x_{2,k-j}^{(2)}) - \right. \\
 \qquad \qquad \qquad \left. - \omega^\beta \cos((x_{1,j}) x_{1,j}^{(2)}) \right), \\
 x_{10} = x_0, \quad x_{20} = y_0, \quad x_{10}^{(1)} = 1, \quad x_{20}^{(1)} = 0, \quad x_{10}^{(2)} = 0, \quad x_{20}^{(2)} = 1, \\
 j = 1, \dots, N,
 \end{array} \right. \quad (5)$$

где

$$A = \frac{\tau^{-\alpha_1}}{\Gamma(2 - \alpha_1)}, \quad B = \frac{\tau^{-\alpha_2}}{\Gamma(2 - \alpha_2)},$$

$$w_k = (k + 1)^{1-\alpha_1} - k^{1-\alpha_1}, \quad v_k = (k + 1)^{2-\alpha_2} - k^{2-\alpha_2}$$

— весовые коэффициенты;  $N$  — количество расчетных узлов сетки;  $\tau = T/N$  — шаг сетки;  $\Gamma(z)$  — гамма-функция Эйлера.

**Замечание.** Вопросы устойчивости и сходимости численного алгоритма (5) представляют самостоятельный интерес и рассматриваться в рамках этой работы не будут. Заметим, что значения параметров в системе (5) будут выбраны небольшими, чтобы исключить «жесткость» системы, т.е. мы будем рассматривать «мягкую» задачу.

Решение системы (5) при выборе значений управляющих параметров  $\lambda$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  дает пару векторов

$$V_1 = \begin{bmatrix} x_{1,j+1}^{(1)} \\ x_{2,j+1}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} x_{1,j+1}^{(2)} \\ x_{2,j+1}^{(2)} \end{bmatrix},$$

которые подвергаются процедуре ортогонализации Грама—Шмидта и нормализации согласно пунктам 3 и 4 алгоритма Вольфа. Потом вычисляются суммы и сами показатели Ляпунова согласно пунктам 5 и 6.

Для нашей задачи Коши (1) мы будем получать два показателя Ляпунова:  $\Lambda_{\max}^1$  и  $\Lambda_{\max}^2$ , так как мы имеем два уравнения в исходной системе (2). Сумма показателей  $\Lambda_{\max}^1$  и  $\Lambda_{\max}^2$  является отрицательной, что говорит о том, что система (2) диссипативна и для такой системы существует аттрактор.

Расчеты по алгоритму Вольфа показали, что один из показателей Ляпунова всегда отрицательный, а другой может менять свой знак, и поэтому мы его выберем для построения спектра показателя Ляпунова в зависимости от значений управляющих параметров  $\lambda, \beta, \gamma$ .

**Результаты исследования.** Рассмотрим алгоритм Вольфа с ортогонализацией Грама—Шмидта для задачи Коши (1) для построения спектров  $\Lambda = \Lambda_{\max}(\lambda)$ ,  $\Lambda = \Lambda_{\max}(\gamma)$ ,  $\Lambda = \Lambda_{\max}(\beta)$ .

**ПРИМЕР 1.** Спектр Ляпунова  $\Lambda_{\max} = \Lambda_{\max}(\lambda)$ . Выберем значения параметров для системы (5):  $N = 2000$ ,  $T = 200$ ,  $\beta = 1.8$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $\delta = 3$ ,  $x_0 = -0.2$ ,  $y_0 = -0.3$ ,  $\varphi = 2.8$ ,  $\lambda \in [0, 1]$  с шагом  $\Delta\lambda = 0.01$ .

Решение системы (5) и применение алгоритма Вольфа с ортогонализацией Грама—Шмидта дает спектр Ляпунова для значений управляющего параметра  $\lambda$ , представленный на рис. 1.

На рис. 1 мы видим, что существуют положительные области изменения значений максимального показателя Ляпунова, а также отрицательные области, которые были получены в зависимости от диапазона значений управляющего параметра  $\lambda \in [0, 1]$  с шагом  $\Delta\lambda = 0.01$ .

Напомним, что положительные значения спектра показателей Ляпунова соответствуют хаотическим режимам, а отрицательные значения спектра — регулярным. Для определения вида движения нелинейного фрактального осциллятора и типа его аттрактора мы построим для каждой из этих областей фазовые траектории (рис. 2).

Сопоставим фазовые траектории на рис. 2 со спектром показателей Ляпунова на рис. 1. Мы можем сделать вывод о том, что для диапазона изменения значений параметра  $\lambda \in [0, 0.515]$  наблюдаются фазовые траектории, которые

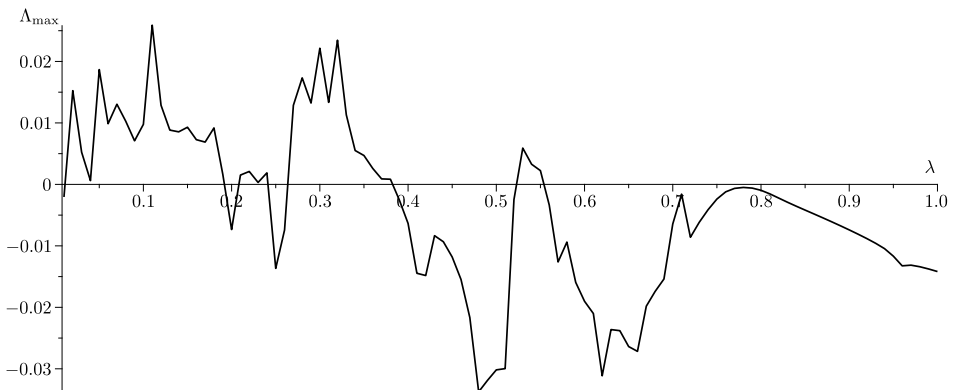


Рис. 1. Спектр показателя Ляпунова  $\Lambda_{\max} = \Lambda_{\max}(\lambda)$

[Figure 1. The spectrum of the Lyapunov exponent  $\Lambda_{\max} = \Lambda_{\max}(\lambda)$ ]

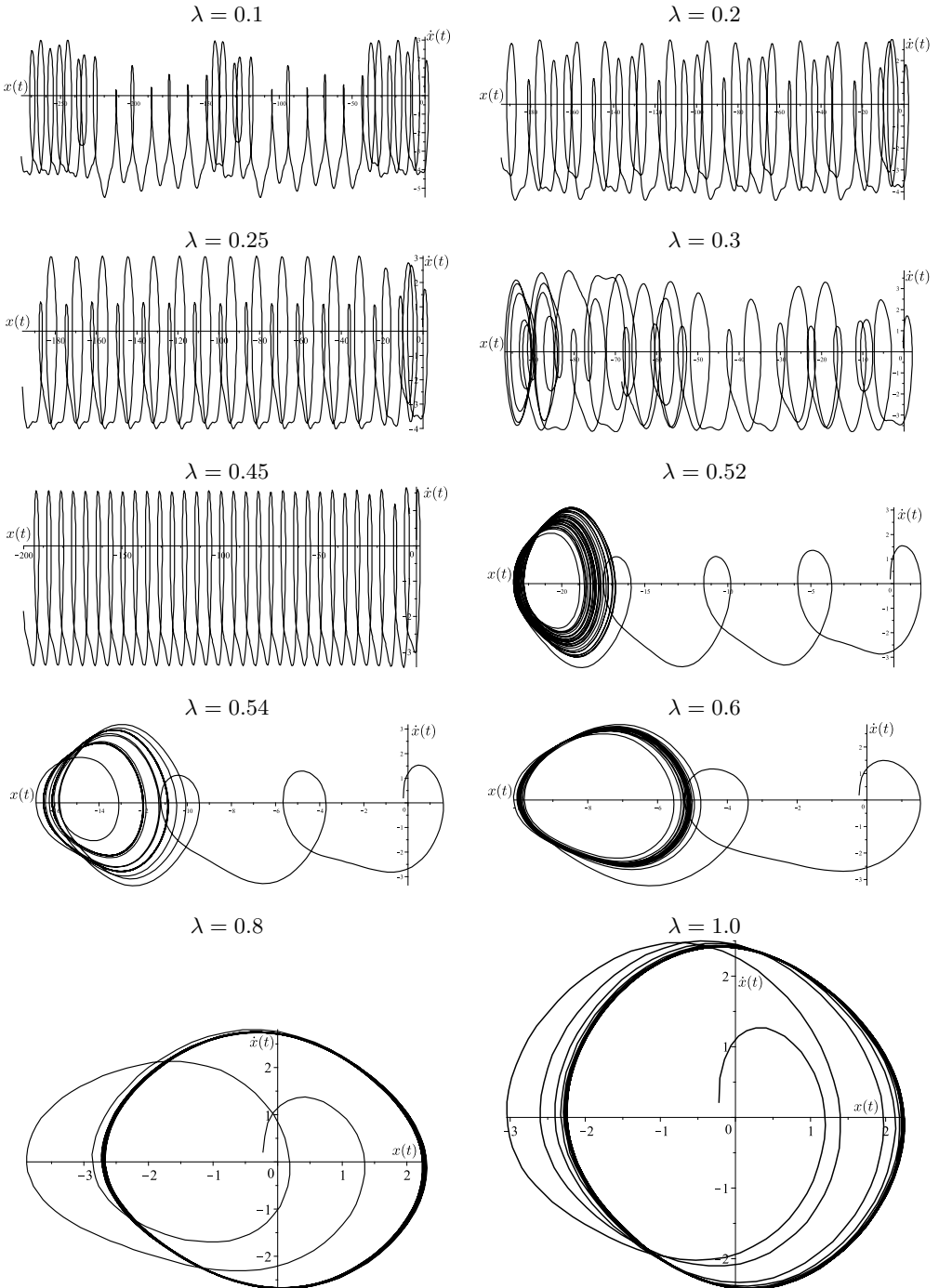


Рис. 2. Фазовые траектории для примера 1  
 [Figure 2. The phase trajectories for Example 1]



соответствуют вращению, причем наблюдаются как хаотические ( $\lambda = 0.1$ ,  $\lambda = 0.3$ ), так и регулярные вращения ( $\lambda = 0.25$ ,  $\lambda = 0.45$ ).

Заметим, что переход от регулярного вращения при  $\lambda = 0.25$  к другому регулярному вращению при  $\lambda = 0.45$  осуществляется через хаотические вращения. Для диапазона изменения значений параметра  $\lambda \in [0.516, 1]$  наблюдаются хаотические и регулярные колебания. Причем здесь мы наблюдаем переход от хаотического аттрактора к предельному циклу.

**ПРИМЕР 2.** Спектр Ляпунова  $\Lambda_{\max} = \Lambda_{\max}(\gamma)$ . Выберем значения параметров для системы (5):  $N = 2000$ ,  $T = 200$ ,  $\beta = 1.2$ ,  $\lambda = 0.6$ ,  $\omega = 1$ ,  $\delta = 3$ ,  $x_0 = -0.2$ ,  $y_0 = -0.3$ ,  $\varphi = 2.8$ ,  $\gamma \in [0.2, 1]$  с шагом  $\Delta\gamma = 0.01$ .

Результаты исследований приведены на рис. 3. Можно заметить, что для этого случая диапазон изменения значений параметра  $\gamma$  не выходит в положительную область, поэтому хаотического режима здесь не наблюдается. Так как все значения показателей Ляпунова отрицательны, мы имеем аттрактор, который является предельным циклом. Фазовые траектории при различных значениях параметра  $\gamma$  приведены на рис. 4.

**ПРИМЕР 3.** Спектр Ляпунова  $\Lambda_{\max} = \Lambda_{\max}(\beta)$ . Выберем значения параметров для системы (5):  $N = 2000$ ,  $T = 200$ ,  $\lambda = 0.6$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $\delta = 3$ ,  $x_0 = -0.2$ ,  $y_0 = -0.3$ ,  $\varphi = 2.8$ ,  $\beta \in [1, 2]$  с шагом  $\Delta\beta = 0.01$ .

Отметим, что хаотический режим в этом случае может возникнуть только в диапазоне значений  $\beta \in [1.85, 2]$ , однако также можно заметить, что есть положительные значения в окрестности значения  $\beta = 1.63$ . Рассмотрим более подробно фазовые траектории, приведенные на рис. 6.

Из рис. 6 мы сможем заметить, что фазовая траектория при  $\beta = 1.63$  является некоторой промежуточной траекторией при переходе между разными предельными циклами ( $\beta = 1.4$  и  $\beta = 1.7$ ). В области положительности параметра  $\beta$  мы наблюдаем хаотические аттракторы ( $\beta = 1.88$ ,  $\beta = 1.98$ ,  $\beta = 2$ ).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Необходимо заметить, что приведенные выше примеры были построены согласно численной схеме (5) при условии, что  $\beta - \gamma \leq 1$ . В случае, когда  $\beta - \gamma > 1$ , исходную систему (2) можно переписать в виде системы из

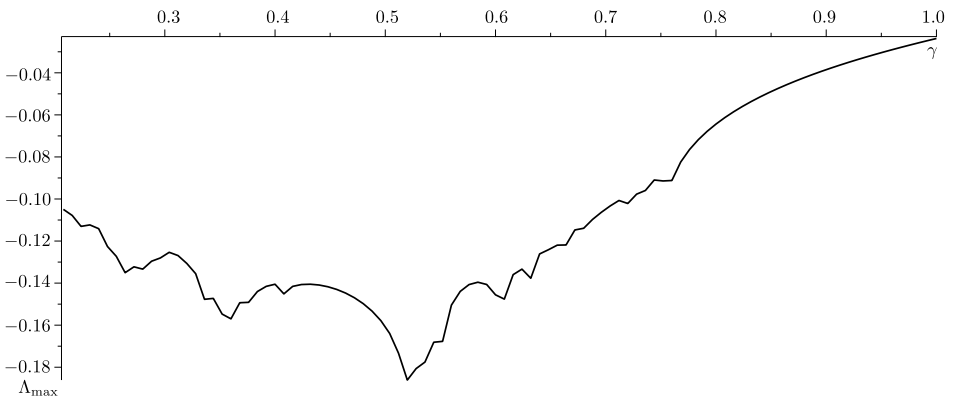


Рис. 3. Спектр показателя Ляпунова  $\Lambda_{\max} = \Lambda_{\max}(\gamma)$

[Figure 3. The spectrum of the Lyapunov exponent  $\Lambda_{\max} = \Lambda_{\max}(\gamma)$ ]

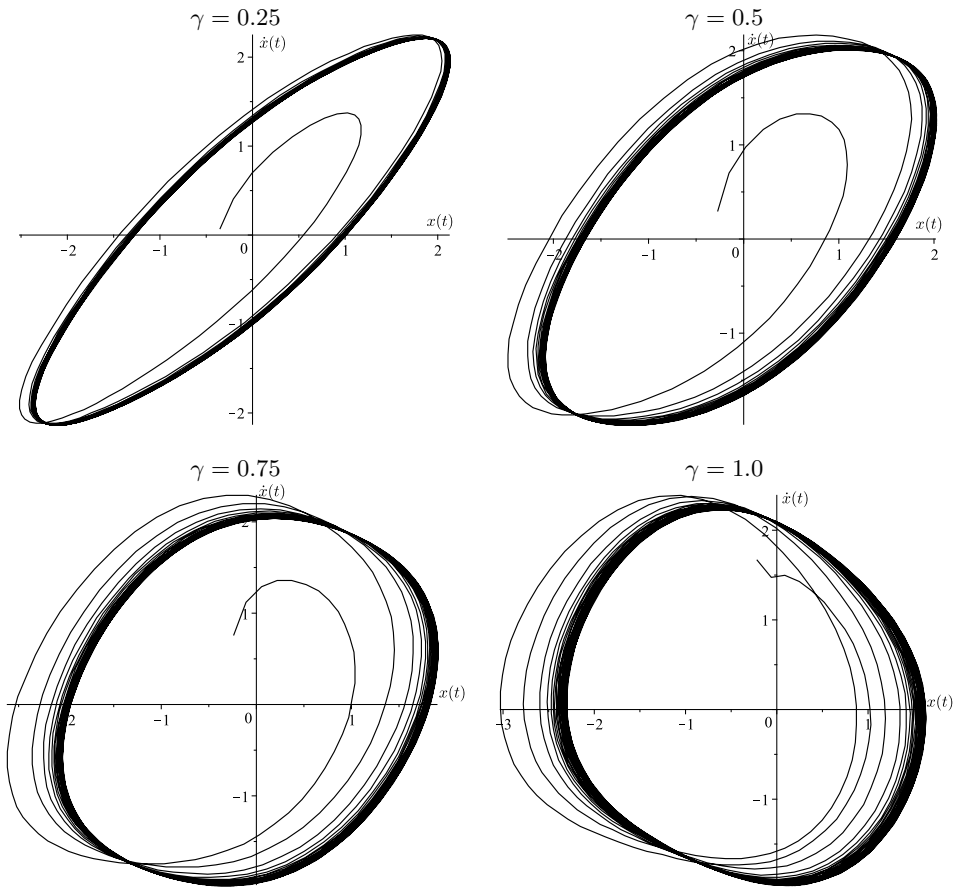


Рис. 4. Фазовые траектории для примера 2  
 [Figure 4. The phase trajectories for Example 2]

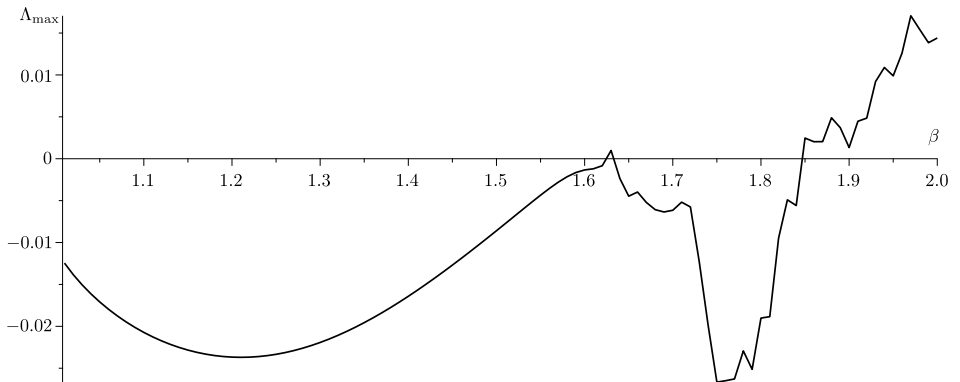


Рис. 5. Спектр показателя Ляпунова  $\Lambda_{\max} = \Lambda_{\max}(\beta)$   
 [Figure 5. The spectrum of the Lyapunov exponent  $\Lambda_{\max} = \Lambda_{\max}(\beta)$ ]

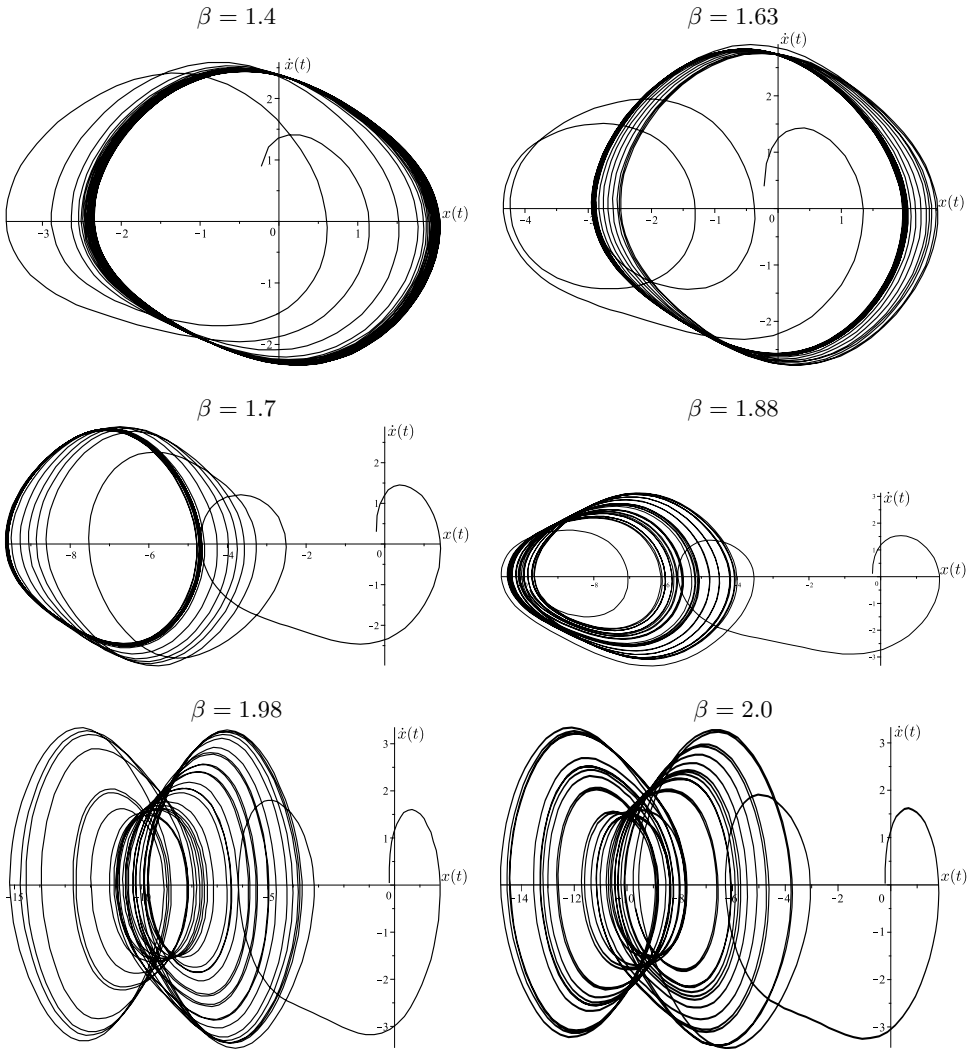


Рис. 6. Фазовые траектории для примера 3  
 [Figure 6. The phase trajectories for Example 3]

трех уравнений, для которой необходимо составить три комплекта уравнений в вариациях. Поэтому численная система (5) будет состоять уже из 12 уравнений, что значительно увеличивает время численного расчета. Также необходимо отметить, что результаты исследований можно уточнить, выбрав более мелкий шаг сетки  $\tau$  и выбрать более мелкие шаги изменения параметров  $\lambda, \beta, \gamma$ . Однако это также приводит к увеличению времени численного расчета.

**Заключение.** Подводя итоги наших исследований нелинейного фрактального осциллятора, мы можем ответить на несколько вопросов. Первый вопрос — о существовании хаотических режимов для нелинейного фрактального осциллятора (1), который имеет положительный ответ. Мы показали (примеры 1 и 2), что в спектрах показателей Ляпунова, построенных в зави-

симости от значений параметров  $\lambda$  и  $\beta$ , существуют области, когда показатели положительны.

Второй вопрос, связанный с существованием вращения в системе (2), также имеет положительный ответ. Как показал пример 1, существует широкая область  $\lambda \in [0, 0.515]$ , в которой имеют место как регулярные, так и хаотические вращения.

Мы также показали, что спектр показателей Ляпунова, построенный в зависимости от значений параметра  $\gamma \in [0.2, 1]$ , состоит из отрицательных значений. Поэтому хаотических режимов в этом случае быть не может, это подтверждают фазовые траектории на рис. 4.

Дальнейшее исследование нелинейного фрактального осциллятора (1) может быть связано с исследованием точек покоя системы (2) по аналогии с работой [22] с построением сечений Пуанкаре [23], а также с построением карт динамических режимов [24], что вместе с показателями Ляпунова даст целостную картину колебательных режимов нелинейного фрактального осциллятора.

**Конкурирующие интересы.** Конкурирующих интересов не имею.

**Авторский вклад и ответственность.** Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

**Финансирование.** Работа выполнена при финансовой поддержке гранта президента РФ для государственной поддержки молодых ученых № МК-1152.2018.1.

### Библиографический список

1. Ахромеева Т С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. *Структуры и хаос в нелинейных средах*. М: Физматлит, 2007. 488 с.
2. Федоров В. К., Федянин В. В. Особенности режимов детерминированного хаоса преобразователей постоянного напряжения для ветро- и гелиоэлектростанций // *Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов*, 2016. Т. 327, № 3. С. 47–56.
3. Аливер В. Ю. Хаотические режимы в непрерывных динамических системах // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2006. № 1. С. 65–84.
4. Beninca E, Ballantine B., Ellner S. P., Huisman J. Species fluctuations sustained by a cyclic succession at the edge of chaos // *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 2015. vol. 112, no. 20. pp. 6389–6394. doi: [10.1073/pnas.1421968112](https://doi.org/10.1073/pnas.1421968112).
5. Solé R. V., Valls J. On structural stability and chaos in biological systems // *J. Theor. Biol.*, 1992. vol. 155, no. 1. pp. 87–102. doi: [10.1016/S0022-5193\(05\)80550-8](https://doi.org/10.1016/S0022-5193(05)80550-8).
6. Bodalea I., Oancea V. A. Chaos control for Willamowski–Rössler model of chemical reactions // *Chaos, Solitons and Fractals*, 2015. vol. 78. pp. 1–9. doi: [10.1016/j.chaos.2015.06.019](https://doi.org/10.1016/j.chaos.2015.06.019).
7. Peters E. E *Chaos and order in the capital markets*. New York, Toronto, Singapore: John Wiley & Sons, Inc., 1991. 240 pp.
8. Верисокин А. Ю. Определение показателей Ляпунова на примере модели Селькова в присутствии внешней периодической силы // *Ученые записки. Электронный научный журнал Курского государственного университета*, 2013. № 2(26). С. 18–29.
9. Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L., Vastano J. A. Determining Lyapunov exponents from a time series // *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1985. vol. 16, no. 3. pp. 285–317. doi: [10.1016/0167-2789\(85\)90011-9](https://doi.org/10.1016/0167-2789(85)90011-9).
10. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents

- for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. Part 1: Theory // *Meccanica*, 1980. vol. 15, no. 1. pp. 9–21. doi: [10.1007/BF02128236](https://doi.org/10.1007/BF02128236).
11. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them, Part 2: Numerical application // *Meccanica*, 1980. vol. 15, no. 1. pp. 21–30. doi: [10.1007/BF02128237](https://doi.org/10.1007/BF02128237).
  12. Bellman R. *Introduction to matrix analysis*. New York: McGraw-Hill Book Comp., 1970. xxiii+403 pp.
  13. Герасимов А. Н. Обобщение линейных законов деформирования и его применение к задачам внутреннего трения // *ПММ*, 1948. Т. 12, № 3. С. 251–260.
  14. Caruto M. *Elasticità e dissipazione*. Bologna: Zanichelli, 1969. 150 pp.
  15. Мейланов Р. П., Янполов М. С. Особенности фазовой траектории фрактального осциллятора // *Письма в ЖТФ*, 2002. Т. 28, № 1. С. 67–73.
  16. Mainardi F. Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena // *Chaos, Soliton & Fractal*, 1996. vol. 7, no. 9. pp. 1461–1477. doi: [10.1016/0960-0779\(95\)00125-5](https://doi.org/10.1016/0960-0779(95)00125-5).
  17. Parovik R.I. Mathematical Model of a Wide Class Memory Oscillators // *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, 2018. vol. 11, no. 2. pp. 108–122. doi: [10.14529/mmp180209](https://doi.org/10.14529/mmp180209).
  18. Босс В. *Лекции по математике. Дифференциальные уравнения*. Т. 2. М.: Либроком, 2014. 208 с.
  19. Паровик Р. И. *Математическое моделирование нелинейных эрдитарных осцилляторов*. Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга, 2017. 135 с.
  20. Volterra V. Sur les équations intégro-différentielles et leurs applications // *Acta Math.*, 1912. vol. 35, no. 1. pp. 295–356. doi: [10.1007/BF02418820](https://doi.org/10.1007/BF02418820).
  21. Паровик Р. И. Существование и единственность задачи Коши для фрактального нелинейного уравнения осциллятора // *Узб. мат. ж.*, 2017. № 4. С. 110–118.
  22. Паровик Р. И. Об исследовании устойчивости эрдитарного осциллятора Ван-дер-Поля // *Фундаментальные исследования*, 2016. № 3-2. С. 283–287.
  23. Parovik R. I. Mathematical modeling of nonlocal oscillatory Duffing system with fractal friction // *Bulletin KRASEC. Phys. Math. Sci.*, 2015. vol. 10, no. 1. pp. 16–21. doi: [10.18454/2313-0156-2015-10-1-16-21](https://doi.org/10.18454/2313-0156-2015-10-1-16-21).
  24. Паровик Р. И. Построение карт динамических режимов и бифуркационных диаграмм в нелинейной динамике с помощью среды компьютерной математики Maple / *Математика и методика ее преподавания: Сборник научно-методических статей*. Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга, 2015. С. 110–120.

MSC: 26A33, 34A08, 37N30, 74H60

## Chaotic regimes of a fractal nonlinear oscillator

*R. I. Parovik*

<sup>1</sup> Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation, Far East Division, Russian Academy of Sciences, 7, Mirnaya st., Paratunka, Kamchatkiy kray, 684034, Russian Federation.

<sup>2</sup> Vitus Bering Kamchatka State University, 4, Pogranichnaya st., Petropavlovsk-Kamchatskiy, 683032, Russian Federation.

### Abstract

In the paper, a fractal nonlinear oscillator was investigated with the aim of identifying its chaotic oscillatory regimes. The measure of chaos for a dynamic system is the maximum Lyapunov exponents. They are considered as a measure of the dispersal of several phase trajectories constructed under different initial conditions. To determine the maximum Lyapunov exponents, algorithms are used which are related either to the study of time series (Benettin's algorithm) or to the direct solution of an extended dynamical system (Wolff's algorithm). In this paper, the Wolf algorithm with the Gram-Schmidt orthogonalization procedure was used as the method for constructing Lyapunov's maximum exponents. This algorithm uses the solution of the extended initial dynamical system in conjunction with the variational equations, and the Gram-Schmidt orthogonalization procedure makes it possible to level out the component of the maximum Lyapunov exponent when computing vectors along phase trajectories. Further, the Wolf algorithm was used to construct the spectra of Lyapunov exponents as a function of the values of the control parameters of the initial dynamical system. It was shown in the paper that certain spectra of Lyapunov exponents contain sets of positive values, which confirms the presence of a chaotic regime, and this is also confirmed by phase trajectories. It was also found that the fractal nonlinear oscillator has not only oscillatory modes, but also rotations. These rotations can be chaotic and regular.


**Keywords:** maximum Lyapunov exponents, Wolf algorithm, chaotic attractor, limit cycle, spectrum of Lyapunov exponents, fractal nonlinear oscillator.

Received: 27<sup>th</sup> February, 2018 / Revised: 26<sup>th</sup> April, 2018 /

Accepted: 11<sup>th</sup> June, 2018 / First online: 28<sup>th</sup> June, 2018

---

### Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

**Please cite this article in press as:**

Parovik R. I Chaotic regimes of a fractal nonlinear oscillator, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 2, pp. 364–379. doi: [10.14498/vsgtu1611](https://doi.org/10.14498/vsgtu1611) (In Russian).

**Author's Details:**

*Roman I. Parovik*  <http://orcid.org/0000-0002-1576-1860>

Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Senior Researcher; Lab. of Modeling of Physical Processes<sup>†</sup>; Dean; Faculty of Physics and Mathematics<sup>2</sup>; e-mail: [parovik@ikir.ru](mailto:parovik@ikir.ru)

**Competing interests.** I declare that I have no competing interests.

**Author's Responsibilities.** I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

**Funding.** This work was supported by the grant of the President of the Russian Federation for state support of scholarly research by young scholars no. MK-1152.2018.1.

## References

1. Akhromeeva T S., Kurdyumov S. P., Malinetskiy G. G., Samarskiy A. A. *Struktury i khaos v nelineynykh sredakh* [Structures and chaos in nonlinear media]. Moscow, Fizmatlit, 2007, 488 pp. (In Russian)
2. Fedorov V. K., Fedyanin V. V. Features of regimes of deterministic chaos of constant voltage converters for wind and solar power plants, *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*, 2016, vol. 327, no. 3, pp. 47–56 (In Russian).
3. Aliver V. Yu. Chaotic regimes in continuous dynamic systems, *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Instrument Engineering*, 2006, no. 1, pp. 65–84 (In Russian).
4. Beninca E, Ballantine B., Ellner S. P., Huisman J. Species fluctuations sustained by a cyclic succession at the edge of chaos, *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 2015, vol. 112, no. 20, pp. 6389–6394. doi: [10.1073/pnas.1421968112](https://doi.org/10.1073/pnas.1421968112).
5. Solé R. V., Valls J. On structural stability and chaos in biological systems, *J. Theor. Biol.*, 1992, vol. 155, no. 1, pp. 87–102. doi: [10.1016/S0022-5193\(05\)80550-8](https://doi.org/10.1016/S0022-5193(05)80550-8).
6. Bodalea I., Oancea V. A. Chaos control for Willamowski–Rössler model of chemical reactions, *Chaos, Solitons and Fractals*, 2015, vol. 78, pp. 1–9. doi: [10.1016/j.chaos.2015.06.019](https://doi.org/10.1016/j.chaos.2015.06.019).
7. Peters E. *E Chaos and order in the capital markets*. New York, Toronto, Singapore, John Wiley & Sons, Inc., 1991, 240 pp.
8. Verisokin A. Yu. The definition of Lyapunov exponents on the example of the Selkov model in presence of external periodic force, *Uchenye zapiski. Elektronnyy nauchnyy zhurnal Kurskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2013, no. 2(26), pp. 18–29 (In Russian).
9. Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L., Vastano J. A. Determining Lyapunov exponents from a time series, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1985, vol. 16, no. 3, pp. 285–317. doi: [10.1016/0167-2789\(85\)90011-9](https://doi.org/10.1016/0167-2789(85)90011-9).
10. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. Part 1: Theory, *Meccanica*, 1980, vol. 15, no. 1, pp. 9–21. doi: [10.1007/BF02128236](https://doi.org/10.1007/BF02128236).
11. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them, Part 2: Numerical application, *Meccanica*, 1980, vol. 15, no. 1, pp. 21–30. doi: [10.1007/BF02128237](https://doi.org/10.1007/BF02128237).
12. Bellman R. *Introduction to matrix analysis*. New York, McGraw-Hill Book Comp., 1970, xxiii+403 pp.
13. Gerasimov A. N. A generalization of linear laws of deformation and its application to internal friction problem, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1948, vol. 12, no. 3, pp. 251–260 (In Russian).
14. Caputo M. *Elasticità e dissipazione*. Bologna, Zanichelli, 1969, 150 pp.
15. Meilanov R. P., Yanpolov M. S. Features of the phase trajectory of a fractal oscillator, *Technical Physics Letters*, 2002, vol. 28, no. 1, pp. 30–32. doi: [10.1134/1.1448634](https://doi.org/10.1134/1.1448634).
16. Mainardi F. Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena, *Chaos, Soliton & Fractal*, 1996, vol. 7, no. 9, pp. 1461–1477. doi: [10.1016/0960-0779\(95\)00125-5](https://doi.org/10.1016/0960-0779(95)00125-5).
17. Parovik R.I. Mathematical Model of a Wide Class Memory Oscillators, *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, 2018, vol. 11, no. 2, pp. 108–122. doi: [10.14529/mmp180209](https://doi.org/10.14529/mmp180209).

18. Boss V. *Lektsii po matematike. Differentsial'nye uravneniya* [Lectures on mathematics. Differential equations]. Moscow, Librokom, 2014, 208 pp. (In Russian)
19. Parovik R. I. *Matematicheskoe modelirovanie nelineynykh ereditarnykh ostsillyatorov* [Mathematical Modeling of Nonlinear Heterogeneous Oscillators]. Petropavlovsk-Kamchatskiy, Vitus Bering Kamchatka State University, 2017, 135 pp. (In Russian)
20. Volterra V. Sur les équations intégro-différentielles et leurs applications, *Acta Math.*, 1912, vol. 35, no. 1, pp. 295–356. doi: [10.1007/BF02418820](https://doi.org/10.1007/BF02418820).
21. Parovik R. I. The existence and uniqueness of the Cauchy problem for fractal of the nonlinear equation of the oscillator, *Uzbek Math. J.*, 2017, no. 4, pp. 110–118 (In Russian).
22. Parovik R. I. On the investigation of the stability of the van der Pol oscillator oscillator, *Fundamental'nye issledovaniya*, 2016, no. 3-2, pp. 283–287 (In Russian).
23. Parovik R. I. Mathematical modeling of nonlocal oscillatory Duffing system with fractal friction, *Bulletin KRASEC. Phys. Math. Sci.*, 2015, vol. 10, no. 1, pp. 16–21. doi: [10.18454/2313-0156-2015-10-1-16-21](https://doi.org/10.18454/2313-0156-2015-10-1-16-21).
24. Parovik R. I. The construction of maps of dynamic regimes and bifurcation diagrams in Nonlinear dynamics using the computer mathematics environment Maple, In: *Matematika i metodika yeye prepodavaniya* [Mathematics and its teaching methodology]. Petropavlovsk-Kamchatskiy, Vitus Bering Kamchatka State University, 2015, pp. 110–120 (In Russian).