Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22, № 4. С. 607–619
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) http://doi.org/10.14498/vsgtu1659

Дифференциальные уравнения и математическая физика

УДК 517.95

О дифференциальных операторах и дифференциальных уравнениях на торе

В. П. Бурский

Московский физико-технический институт (государственный университет),
Россия, 141700, Московская обл., Долгопрудный, Институтский пер., 9.

Аннотация

Рассматриваются периодические граничные задачи для дифференциального уравнения, коэффициентами которого являются тригонометрические полиномы. Строятся пространства обобщенных функций, в которых рассмотренные задачи имеют решения, в частности, построено пространство разрешимости периодического аналога уравнения Мизохаты. Строится периодический аналог и обобщение конструкции нестандартного анализа, содержащее в себе не только функции, но и функциональные пространства. В качестве иллюстрации к высказыванию, что не все конструкции на торе ведут к упрощению по сравнению с плоскостью, рассматривается периодический аналог понятия гипоэллиптического дифференциального оператора, где оказываются существенными теоретико-числовые свойства. В частности, оказывается, что если полином с целыми коэффициентами неприводим в рациональном поле, то соответствующий дифференциальный оператор гипоэллиптичен на торе.

Ключевые слова: дифференциальный оператор на торе, линейное дифференциальное уравнение на торе, уравнение Мизохаты, нестандартный анализ, гипоэллиптичность.

Получение: 29 октября 2018 г. / Исправление: 11 ноября 2018 г. /
Принятие: 12 ноября 2018 г. / Публикация онлайн: 30 ноября 2018 г.

Научная статья

Образец для цитирования

Бурский В. П. О дифференциальных операторах и дифференциальных уравнениях на торе // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 4. С. 607–619. doi: 10.14498/vsgtu1659.

Сведения об авторе

Владимир Петрович Бурский http://orcid.org/0000-0001-5496-6132
доктор физико-математических наук, профессор; профессор каф. высшей математики;
e-mail: bvp30@mail.ru

1. О разрешимости дифференциальных уравнений на торе. Периодическая граничная задача для дифференциального уравнения — популярный объект и в математическом образовании, и в исследовательской деятельности (см., напр., [1–3]). Как отметил Лакс [4], в периодической теории дифференциальных уравнений отсутствуют некоторые технические трудности, поэтому возможно построение особо красивой теории.

Рассматривая периодическую граничную задачу для линейного дифференциального уравнения, мы попадаем в удивительный мир функций на торе, когда представление тора в виде произведения окружностей позволяет нам отслеживать поведение функций нескольких переменных по каждой переменной в отдельности, когда базисные элементы являются собственными для операторов дифференцирования и для любого линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами, а кроме того, компактность многообразия без края позволяет нам забыть о границе и о поведении на бесконечности, и единственная бесконечность, с которой мы здесь сталкиваемся, — это бесконечность по размерности, что дает нам возможность сосредоточить свое внимание единственно на ней.

1.1. Пространства периодических функций. Количество переменных для наших целей несущественно, поэтому будем вести изложение для случая двух переменных.

Хорошо известно, что каждый ряд Фурье (или, иначе, тригонометрический ряд)

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}} a_k e^{ikx},$$

коэффициенты которого таковы, что

$$\sum_k |a_k|^2 < \infty,$$

представляет собой периодическую функцию, суммируемую с квадратом. Здесь $a_k \in \mathbb{C}$, $k = (k_1, k_2)$, $kx = k_1x_1 + k_1x_2$. Такие ряды образуют пространство $L_2(T^2)$, где $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ — тор размерности 2.

Пусть для $m \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant 2$ H^m — пространство 2π-периодических по обоим аргументам комплексных функций в $\mathbb{R}^2$, для которых

$$\|u\|_m^2 = \int_{(0,2\pi)^2} \overline{u}(x)(1-\Delta)^m u(x)dx < \infty.$$

Здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$. Все пространства H^m — гильбертовы. Это известные соболевские пространства.

Как известно (см. напр. [1]), функции $\exp(ikx)$, где $kx = k_1x_1 + k_2x_2$, образуют ортогональный базис в H^m и, таким образом, каждая функция f из H^m разложима в ряд Фурье

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}\oplus Z} f_k e^{ikx},$$

сходящийся к f в топологии H^m. Мы будем рассматривать тригонометрические ряды с любыми конечными коэффициентами, которые называются формальными. Можно рассматривать H^m как множество формальных рядов Фурье с конечной нормой

$$\|f\|_m^2 = \sum_k (1 + k \cdot k)^m \cdot |f_k|^2.$$

Этой формулой мы можем ввести норму в пространстве H^m с любым вещественным m.

Рассмотрим линейное пространство формальных тригонометрических рядов с топологией пространства $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, в которое пространство H^m непрерывно вложено. При $m < 0$ пространство H^m таких рядов является сопряженным в смысле топологии пространства $H^0 = L_2(T^2)$ к пространству H^{-m}. Для более сложных подпространств можно доказать следующее

Утверждение 1.1. *Пусть E — бочечное линейное топологическое пространство 2π-периодических функций, вложенное с топологией в H^0 и имеющее систему $\left\{e^{ikx}\right\}$ базисом, то есть*

$$\forall v \in E, \exists! \{v_k\} \ (\textit{единственный набор коэффициентов такой, что}),$$

$$\sum_{k^2 \leqslant N} v_k e^{ikx} \overset{N \to \infty}{\longrightarrow} v.$$

Тогда сопряженное пространство E^* естественно изоморфно подпространству пространства F, общий элемент $u = \sum_k u_k e^{ikx}$ которого таков, что

$$\forall v = \sum v_k e^{ikx} \in E, \quad \langle u, v \rangle = \sum u_k \bar{v}_k < \infty,$$

и спаривание $\langle \, , \rangle$ порождает двойственность.

Это утверждение следует из того, что для бочечных пространств топологии Макки совпадают с исходной топологией (см. [5]), поскольку она сильнейшая из тех, которые согласованы с двойственностью.

Примерами здесь могут служить следующие пространства, которые мы будем использовать ниже.

1. Пространство бесконечно дифференцируемых периодических функций $H^\infty = \bigcap_m H^m$, в котором общий элемент $u = \sum u_k e^{ikx}$ таков, что $\forall l$, $k^{2l} u_k \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$, и ему сопряженное пространство $H^{-\infty} = \bigcup_m H^m$ периодических распределений, коэффициенты которых стремятся к ∞ не быстрее некоторой степени k^{2l}.
2. Пространство функций E_0, общий элемент которого таков, что $\exists \delta_1 > 0$, $\exists \delta_2 > 0$, $\sum e^{|k_1|\delta_1 + |k_2|\delta_2} |u_k| < \infty$, включенное в пространство периодических аналитических в вещественном смысле функций, и сопряженное ему пространство E_0^*, состоящее из рядов, коэффициенты которых стремятся к ∞ медленнее любой экспоненты $e^{|k_1|\delta_1 + |k_2|\delta_2}$, и включающее пространство гиперфункций [6].
3. Пространство $l_1(|k_1|!)$ функций, для коэффициентов которых выполнено соотношение $\sum_k |k_1|! \, |u_k| < \infty$, и пространство $l_1^*(|k_1|!)$ рядов, для которых $v_k = O(|k_1|!)$.

Пусть теперь $P(x_1, x_2)$ — однородный полином степени p с постоянными коэффициентами. Рассмотрим дифференциальный оператор, порожденный полиномом P:

$$Pu = P\Big(-i\frac{\partial}{\partial x_1}, -i\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)u.$$

Его действие на функциях из H^m, $m \geqslant p$,

$$P\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}\oplus Z} f_k e^{ikx}\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}\oplus Z} P(k_1, k_2) f_k e^{ikx}$$

может быть задано на любом формальном тригонометрическом ряде этой же формулой, и мы будем считать, что оператор P задан на пространстве F формальных тригонометрических рядов.

1.2. Разрешимость уравнения Мизохаты. В работе [7] Г. Леви привел пример дифференциального уравнения первого порядка с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, не имеющего решений из пространства распределений в пространстве трех переменных.

В работе [8] В. В. Грушин, развивая идеи Г. Леви и П. Гарабедяна [9], приводит пример дифференциального уравнения первого порядка с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, не имеющего решений из пространства распределений на плоскости. Уравнение имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + ix\frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y).$$

Оператор левой части этого уравнения — один из операторов Мизохаты, рассматриваемых им в работе [10]. Правая часть $f(x, y)$, построенная Грушиным особым образом, была четной по x функцией, принадлежащей $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Мы рассмотрим некоторую модификацию этого уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\sin x\frac{\partial u}{\partial y} = \tilde{f}(x, y), \tag{1}$$

где функция $\tilde{f}$ получена из f 2π-периодическим продолжением. Можно проверить, что рассуждения Грушина проходят и для этого модифицированного уравнения. Мы докажем, что последнее разрешимо в более широком пространстве обобщенных функций.

Утверждение 1.2. *Уравнение (1) имеет единственное нечетное по x_1 периодическое решение в пространстве $l_1^*(|k_1|!)$ для любой четной правой части $\tilde{f} \in H^m$.*

Доказательство. Мы предъявим коэффициенты решения и увидим, что оно лежит в $l_1^*(|k_1|!)$. Уравнение перепишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{e^{ix_1} - e^{-ix_1}}{2}\frac{\partial u}{\partial x_2} = \tilde{f}$$

или

$$k_1 u_{k_1,k_2} + \frac{k_2}{2}\left(u_{k_1-1,k_2} - u_{k_1+1,k_2}\right) = f_k. \tag{2}$$

При фиксированном $k_2 \neq 0$ получаем по k_1 рекуррентную формулу

$$u_{k_1+1,k_2} = \frac{2}{k_2}\,(k_1 u_{k_1,k_2} - f_k)\,u_{k_2-1,k_2}.$$

В силу нечетности u_k, $u_{0,k_2} = 0$, $u_{-k_1,k_2} = -u_{k_1,k_2}$, поэтому коэффициенты u_k однозначно определяются. Отбрасывая множитель $(2/k_2)$ и оценивая полученное выражение, получаем перед f_k в выражении для u_{k_1+1,k_2} коэффициент $(k_1+1)!$. Таким образом получаем оценку

$$|u_{k_1+1,k_2}| < \sum_{\lambda=0}(\lambda+1)!f_{k_1-\lambda} < (k_1+1)!\sum_k f_k = c(k_1+1)!.$$

Утверждение доказано. $\square$

Заметим, что операции дифференцирования и умножения на тригонометрический полином, определяемые в пространстве F формально, совпадают с аналогичными операциями в $l_1^*(|k_1|!)$ (банаховом пространстве), определенными как обычно в пространствах обобщенных функций через сопряжение.

Утверждение 1.3. *Каждое периодическое решение $u(x_1,x_2)$ однородного уравнения (1) четно по x_1, однозначно определяется функциями*

$$u_0(x_2) := \int_0^{2\pi} u(x_1,x_2)dx_1 := \langle u, 1\rangle_{x_1},$$
$$u_1(x_2) := \int_0^{2\pi} u(x_1,x_2)e^{-ix_1}dx_1 := \langle u, e^{ix_1}\rangle_{x_1}$$

и принадлежит пространству $l_1^*(|k_1|!)$, если u_0 и u_1 имеют ограниченные последовательности коэффициентов.

Здесь функцию мы понимаем как формальный тригонометрический ряд, а спаривание по одной координате как обычно:

$$\langle u, v\rangle_{x_1} := \sum_n\Big\langle\sum_k u_{kn}e^{ikx_1}\ ,\sum_m v_{mn}e^{imx_1}\Big\rangle e^{inx_2} = \sum_n\Big(\sum_m u_{m\,n}\overline{v}_{-m\,n}\Big)e^{inx_2}.$$

Ясно, что спаривание по x_1 существует не всегда, но если t — тригонометрический полином, то функция $\langle t, v\rangle_{x_1}(x_2)$ существует.

Доказательство утверждения 1.3 проводится анализом формулы (2).

1.3. Разрешимость общих уравнений. Рассмотрим теперь общий оператор

$$L : \sum_{|\alpha|\leqslant m} T_\alpha(x)D^\alpha,$$

где $T_\alpha(x)$ — тригонометрический полином степени (s_α^1, s_α^2). Можно записать его также в виде

$$L = \sum_{n_1=-s^1}^{s^1}\ \sum_{n_2=-s^2}^{s^2} e^{inx}P_n(D).$$

Здесь $s^1 := \max_\alpha s^1_\alpha$, $s^2 := \max_\alpha s^2_\alpha$.

Предположим, что оператор L удовлетворяет следующему условию: *для всех n уравнение*

$$P_n(x) = 0 \tag{3}$$

не имеет решений в целых числах.

Справедливо следующее обобщение утверждения 1.3.

Утверждение 1.4. *Каждое формальное периодическое решение $u(x_1, x_2)$ уравнения $Lu = 0$ со свойством (3) однозначно определяется функциями*

$$u_{02}(x_2) := \langle u, 1\rangle_{x_1}, \quad u_{12}(x_2) := \langle u, e^{ix_1}\rangle_{x_1}, \quad \ldots, \quad u_{s^12}(x_2) := \langle u, e^{is^1x_1}\rangle_{x_1};$$

$$u_{01}(x_1) := \langle u, 1\rangle_{x_2}, \quad u_{11}(x_1) := \langle u, e^{ix_2}\rangle_{x_2}, \quad \ldots, \quad u_{s^21}(x_1) := \langle u, e^{is^2x_2}\rangle_{x_2},$$

если для них выполнены условия согласования:

$$\langle u_{q1}, e^{ipx_1}\rangle_{x_1} = \langle u_{p2}, e^{iqx_2}\rangle_{x_2}, \quad p, q = 1, \ldots, \min(s^1, s^2).$$

Доказательство проводится непосредственной подстановкой формального ряда в уравнение.

Рассмотрим опять линейное пространство формальных тригонометрических рядов F и введем в нем отношение порядка $u \leqslant v$ (будем говорить: u регулярнее v или v сингулярнее u), если существует элемент $h \in f$ с ограниченной последовательностью положительных коэффициентов такой, что $u = v * h$. Здесь

$$v * h = \sum_n v_n h_n e^{inx}$$

— свертка. Отношение «u регулярнее v», очевидно, эквивалентно тому, что

$$\exists C > 0,\ \forall n,\ \left|\frac{u_n}{v_n}\right| < C.$$

Подобные отношения порядка используются в асимптотических разложениях [11]. Назовем линейным сечением всякое линейное подпространство в F такое, что вместе с каждым элементом v оно содержит элемент $u \leqslant v$. Если $v \in f$, то множество таких u, что $u \leqslant v$, является примером линейного сечения. Такое линейное сечение естественно назвать главным. Все рассмотренные нами выше подпространства также являются линейными сечениями. Заметим, что спаривание, рассмотренное в п. 1.1, естественным образом порождает отделимую топологию на любом линейном подпространстве пространства F (см. [5]), и поэтому каждое линейное сечение α можно считать полным линейным топологическим пространством, а его сопряженным оказывается пространство тех $g \in F$, что $\forall f \in \alpha$, $\langle f, g\rangle < \infty$.

Множество M линейных сечений упорядочено по включению и для каждых двух сечений α и β существует $\sup(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$, определяемое как наименьшее линейное сечение, содержащее $\alpha \cup \beta$, и $\inf(\alpha, \beta) = \alpha \cap \beta$. Нетрудно видеть, что выполнены соотношения дистрибутивности: $\alpha \cap (\beta + \gamma) = \alpha \cap \beta + \alpha \cap \gamma$, $\alpha + (\beta \cap \gamma) = (\alpha + \beta) \cap (\alpha + \gamma)$. Таким образом, в множестве M введена структура дистрибутивной решетки с нулевым и единичным элементами. Если A —

любое множество, $\{\delta_a |\ a \in A\}$ — семейство линейных сечений, то назовем точной верхней гранью $\sup \delta_a$ наименьшее линейное сечение, содержащее в себе каждое δ_a. Точная верхняя грань у любого семейства существует по лемме Цорна.

Справедливо следующее

Утверждение 1.5.

1. *Оператор*
$$L = \sum_{|\alpha| \leqslant m} T_\alpha(x) D^\alpha$$
переводит любое линейное сечение в линейное сечение и таким образом индуцирует отображение $\tilde{L}$ в множестве M, которое сохраняет структуру решетки.
2. *Пусть выполнено условие (3). Тогда отображение $\tilde{L}$ является эпиморфизмом решетки M и для любого линейного сечения G существует максимальное β среди тех линейных сечений α, для которых $\tilde{L}\alpha \leqslant G$, причем $\beta \neq F$.*

Доказательство. Действительно, и дифференцирование, и умножение на скаляр, и сдвиг $\{u_n\} \to \{u_{n+k}\}$, и сложение сохраняют отношение порядка $\leqslant$, поэтому линейное сечение при отображении L переходит в линейное сечение, а индуцированное отображение сохраняет отношение порядка и операции решетки. Из условия (3) следует, что каждое уравнение $Lu = e^{inx}$ имеет решение u_n среди тригонометрических полиномов. Далее, если f — формальный ряд, а оператор L удовлетворяет указанному свойству, то уравнение $Lu = f = \sum_n f_n e^{inx}$ разрешимо в формальных рядах, его решением, например, является формальный ряд $w = \sum_{n,k} f_n u_{nk} e^{ikx}$, где при каждом k сумма по n конечна, а коэффициенты u_{nk} однозначно находятся по условию (3).

Рассмотрим для каждого f из заданного линейного сечения G множество W_f решений уравнения $Lu = f$ и множество им соответствующих главных сечений. Их точная верхняя грань, существующая по лемме Цорна, и является искомым линейным сечением. Построенное линейное сечение β не совпадает с F, так как в противном случае было бы $G = F$. Доказательство закончено. □

Заметим, что здесь условие (3) можно было бы заменить более слабым условием:
$$\forall m \in \mathbb{Z}^2,\ \exists n, P_n(m) \neq 0,$$
что сейчас не является принципиальным.

Мы пришли к следующему определению.

Определение. Линейное сечение β, существующее по утверждению 1.5, естественно называть решением уравнения $L\beta = G$ с линейным сечением G в правой части.

Мы доказали ранее, что для уравнения (1) и правой части $G = H^m$ решением будет сечение $\beta \subset l_1^*(|n_1|!)$.

Замечание 1. Термин «сечение» выбран ввиду явной аналогии с сечениями Дедекинда при построении поля вещественных чисел. Заметим также, что описанная конструкция созвучна конструкциям нестандартного анализа, где, расширяя поле вещественных чисел, вводят ростки функций, называя их бесконечно малыми, образующими поле с одной стороны и ультрафильтр — с другой. Отметим отличия. Множество M линейных сечений всего лишь частично упорядочено, но зато содержит все ростки последовательностей в качестве главных сечений, а не только лишь некоторые. Во множестве M существует ассоциативная коммутативная и дистрибутивная по сложению и пересечению свертка, определенная всегда, но не всегда с обратным элементом, а также сопряжение, и все линейные сечения рефлексивны. Во множестве M можно также ввести ассоциативное коммутативное произведение, определенное не всегда, но охватывающее произведение гладких функций и произведение распределений по Микусинскому—Хирате—Огаве, и, кроме того, не лежащий в M обратный элемент как т.с. сингулярное сечение, содержащее не все более регулярные последовательности, а все более сингулярные, и так далее. Наиболее важным здесь является то, что это множество содержит не только все функции, но и все функциональные пространства, которые вместе с каждым своим элементом содержат и все более гладкие элементы. И теперь можно рассматривать вопрос о решении дифференциального уравнения в классе пространств функций, если заданная правая часть — пространство, как это было в утверждении 1.5.

2. О гипоэллиптичности дифференциального оператора на торе. Повторимся, что в периодической теории дифференциальных уравнений отсутствуют некоторые технические трудности. Однако переход к периодическому случаю не всегда приводит к упрощению. В данном параграфе мы охарактеризуем гипоэллиптические в пространстве периодических функций на плоскости однородные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, на которых тезис Лакса можно оспаривать.

Пусть H^m $(m \geqslant 0)$ — пространство 2π-периодических по обоим аргументам комплексных функций на плоскости, для которых

$$\|u\|_m^2 = \int_{(0,z\pi)^2} \overline{u}(x)(1-\Delta)^m u(x)dx < \infty.$$

Здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$. Пространство H^{-m} определяется как пространство, двойственное к H^m в H^0-топологии. Пространства H^m — гильбертовы.

Мы отмечали в п. 1.1, что функции $\exp(inx)$, где $nx = n_1x_1 + n_2x_2$, образуют ортогональный базис в H^m и, таким образом, каждая функция f из H^m разложима в ряд Фурье

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}} f_n e^{inx},$$

сходящийся к f в топологии H^m. Можно рассматривать H^m, $m \in \mathbb{R}$ как множество формальных рядов Фурье с конечной нормой (см. п. 1.1)

$$\|f\|_m^2 = \sum_n (1+n\cdot n)^m \cdot |f_n|^2.$$

Это известные соболевские пространства.

Пусть теперь $P(x_1, x_2)$ — однородный полином степени $p \geqslant 2$ с постоянными коэффициентами. Рассмотрим дифференциальный оператор $L : H^m \to H^{m-p}$, действующий по правилу

$$Lu = P\Big(-i\frac{\partial}{\partial x_1}, -i\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)u.$$

Будем называть оператор L *гипоэллиптическим*, если для всякой функции $u \in H^{-\infty}$ принадлежность $Lu \in H^{\infty}$ влечет $u \in H^{\infty}$. Здесь $H^{\infty} = \bigcap_m H^m$, $H^{-\infty} = \bigcup_m H^m$ — пространства соответственно бесконечно дифференцируемых и обобщенных функций [1].

Нетрудно видеть, что справедлива следующая

Лемма 2.1. *Гипоэллиптичность оператора L эквивалентна существованию постоянных $C > 0$ и k_1 таких, что $|P(n)| > C(n^2)^{k_1}$ для всех n.*

Доказательство. Действительно, из существования $C > 0$ и k_1 таких, что для всех n выполняется $|P(n)| > Cn^{2k_1}$ и $f \in H^{\infty}$, следует, что $f_n/P(n)$ убывает быстрее любой степени.

Если же существует последовательность пар n^j такая, что $|P(n^j)| \xrightarrow{j\to\infty} 0$ быстрее любой степени, то, например, для функции $f = \sum_j P(n^j)e^{in^j x} \in H^{\infty}$ решение $\sum_j e^{in^j x} \in H^{-2}$ и гипоэллиптичности нет. □

Напомним, что на плоскости одно из эквивалентных необходимых и достаточных условий гипоэллиптичности записывается так [12]: *существуют такие постоянные C и c, что для любого достаточно большого $\xi \in \mathbb{R}^2$ и любого мультииндекса α выполнено*

$$\Big|\frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)}\Big| \leqslant C|\xi|^{-|\alpha|c}.$$

Последнее неравенство при $\alpha = p$ дает неравенство $|P(\xi)| \geqslant C|\xi|^{pc}$, совпадающее на целочисленной решетке с полученным. Это означает, что каждый оператор, гипоэллиптический на плоскости, является гипоэллиптическим на торе, но не наоборот.

Утверждение 2.1. *Оператор L гипоэллиптичен тогда и только тогда, когда для каждого вещественного корня α полинома $P(x, 1)$ существуют постоянные $C > 0$ и k такие, что для каждого рационального p/q, достаточно близкого к α, выполнено неравенство*

$$\Big|\alpha - \frac{p}{q}\Big| > \frac{C}{q^k}.$$

Доказательство. Пусть $u \in H^{-\infty}$, тогда $u \in H^m$ с каким-то m и $u = \sum_n u_n e^{inx}$, $Lu = \sum_n u_n P(n)e^{inx}$. Пусть $f = \sum_n f_n e^{inx}$. Видно, что $f \in H^{\infty}$, если и только если $|f_n| \to 0$ при $n^2 \to \infty$ быстрее любой степени n^2. Заметим, что если оператор гипоэллиптичен, то уравнение $P(x) = 0$ имеет единственное целое решение $x = 0$, поскольку, если бы $u = (n_1, n_2)$ было другим решением, то функция $\sum_{k=\infty}^{\infty} e^{iknx}$, принадлежащая $H^{-\infty}$, была бы из ядра оператора L, что невозможно в силу гипоэллиптичности. Решение уравнения $Lu = f$ может быть поэтому формально записано в виде

$$u = \sum_{n\neq 0} \frac{f_n}{P(n)} e^{inx} + C_0.$$

Условие $f_0 = 0$ является, очевидно, условием разрешимости уравнения $Lu = f$. Применим лемму 2.1. Пусть α — действительный корень полинома $P(x,1)$ кратности r. Неравенство $|P(n)| > Cn^{zk_1}$ равносильно неравенству

$$\left|P\Big(\frac{n_1}{n_2}, 1\Big)\right| > C(n^2)^{(k_1 - \frac{p}{2})},$$

поскольку $P(n_1/n_2, 1)$ близко к нулю там, где n_1/n_2 близко к одному из корней. Получаем

$$\left|P\Big(\frac{n_1}{n_2}, 1\Big)\right| = \left|\frac{n_1}{n_2}\alpha\right|^r \cdot \left|P^{(r)}_{x_1}\Big(\frac{n_1}{n_2} + \tau\Big(\alpha - \frac{n_1}{n_2}\Big)\right| > C(n^2)^{(k_1 - \frac{p}{2})}.$$

Для достаточно близких n_1/n_2 к α имеем

$$\left|\frac{n_1}{n_2} - \alpha\right| > Cn^{2k_1} > Cn_2^{2k}.$$

Точный подсчет дает

$$k = \frac{1}{r}\Big(k_1 - \frac{p}{2}\Big).$$

Наоборот, если

$$\left|\frac{n_1}{n_2} - \alpha\right| > Cn_2^{2k},$$

то

$$\left|\frac{n_1}{n_2} - \alpha\right| > Cn^{2k}, \quad k < 0,$$

откуда получаем $|P(n)| > Cn^{2k_1}$. Доказательство закончено. □

Необходимо заметить, что существуют трансцендентные числа α, для которых неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^k}$$

не выполняется. Таково, например, число $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{10^{\nu}!}$ [13].

Для любого алгебраического числа α степени ν наше неравенство выполнено с $k = \nu$ (теорема Лиувилля [13]). В частности, получаем

Утверждение 2.2. *Если полином P с целыми (или рациональными) коэффициентами неприводим в поле $\mathbb{Q}$, то оператор L гипоэллиптичен.*

Легко заметить, что гипоэллиптический оператор $L : H^\infty \to H^\infty$ обратим. Здесь и ниже пространства считаются профакторизованными по подпространству постоянных. Оператор L^{-1} действует из H^m в какое-то H^k. По теореме Туэ—Зигеля—Рота [13] для любого алгебраического числа α степени

$r \geqslant 2$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $C > 0$ такое, что для всякой рациональной дроби p/q

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^{2+\varepsilon}}.$$

Используя подсчет показателей из доказательства утверждения 2.1, получаем

Утверждение 2.3. *Если r — наибольшая кратность вещественных корней неприводимого полинома P, то оператор L^{-1} действует из пространства H^m в $H^{p/2+m-r-\varepsilon}$ для всякого $\varepsilon > 0$ ограниченно.*

Заметим, что при $p = 2$ в силу теоремы Лиувилля можно положить $\varepsilon = 0$.

3. Комментарии. Периодической граничной задаче для дифференциального уравнения, интерпретируемой как уравнение на торе, посвящено большое количество публикаций, см., например, книги [1–3] и ссылки в них, но исследования этой главы с ними не пересекаются. Взгляд на строение множества инфинитезимальных, помещенный в конце п. 1.3 в замечании 1, отличается от принятого в нестандартном анализе, сравни, например, с [14].

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Bers L., John F., Schechter M. *Partial differential equations* / Lectures in Applied Mathematics. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1979. xiii+343 pp.
2. Дезин А. А. *Общие вопросы теории граничных задач.* М.: Наука, 1980. 208 с.
3. Пташник Б. Й. *Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными.* Киев: Наук. думка, 1984. 264 с.
4. Lax P. D. On Cauchy's problem for hyperbolic equations and the differentiability of elliptic equations // *Comm. Pure Appl. Math.*, 1955. vol. 8, no. 4. pp. 615–633. doi: 10.1002/cpa.3160080411.
5. Bourbaki N. *Elements of mathematics. Topological vector spaces.* Berlin: Springer Verlag, 1987. vii+364 pp.
6. Hörmander L. *The analysis of linear partial differential operators.* II: Differential operators with constant coefficients / Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. vol. 257. Berlin: Springer Verlag, 1983. viii+391 pp.
7. Lewy H. An example ol a smooth linear partial differential equation without solution // *Ann. Math.*, 1957. vol. 66, no. 1. pp. 155–158. doi: 10.2307/1970121.
8. Грушин В. В. Об одном примере дифференциального уравнения без решений // *Матем. заметки*, 1971. Т. 10, № 2. С. 125–128.
9. Garabedian P. R. An unsolvable equation // *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1970. vol. 25, no. 1. pp. 207–208. doi: 10.1090/s0002-9939-1970-0252809-6.
10. Mizohata S. Solutions nulles et solution non analytiques // *J. Math. Kyoto Univ.*, 1962. vol. 1, no. 2. pp. 271–302. doi: 10.1215/kjm/1250525061.
11. Федорюк М. В. *Метод перевала.* М.: Наука, 1977. 368 с.
12. Hörmander L. *Linear partial differential operators* / Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. vol. 116. Berlin: Springer Verlag, 1963. vii+285 pp.
13. Бухштаб А. А. *Теория чисел.* М.: Просвещение, 1966. 384 с.
14. Davis M. *Applied nonstandard analysis* / Pure and Applied Mathematics. New York: John Wiley & Sons, 1977. xii+181 pp.

MSC: 35B10, 35D99, 58J15, 35H10, 26E35

On differential operators an differential equations on torus

V. P. Burskii

Moscow Institute of Physics and Technology (State University),
9, Inststitutskii per., Dolgoprudny, Moscow region, 141700, Russian Federation.

Abstract

In this paper, we consider periodic boundary value problems for a differential equation whose coefficients are trigonometric polynomials. The spaces of generalized functions are constructed, in which the problems considered have solutions, in particular, the solvability space of a periodic analogue of the Mizohata equation is constructed. A periodic analogue and a generalization of the construction of a nonstandard analysis are constructed, containing not only functions, but also functional spaces. As an illustration of the statement that not all constructions on a torus lead to simplification compared to a plane, a periodic analogue of the concept of a hypoelliptic differential operator is considered, where number-theoretic properties are significant. In particular, it turns out that if a polynomial with integer coefficients is irreducible in the rational field, then the corresponding differential operator is hypoelliptic on the torus.

Keywords: differential operator on torus, linear differential equation on torus, Mizohata equation, nonstandard analysis, hypoellipticity.

Received: 29th October, 2018 / Revised: 11th November, 2018 /
Accepted: 12th November, 2018 / First online: 30th November, 2018

Competing interests. I declare that I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. Bers L., John F., Schechter M. *Partial differential equations*, Lectures in Applied Mathematics. Providence, R.I., Amer. Math. Soc., 1979, xiii+343 pp.
2. Dezin A. A. *Obshchie voprosy teorii granichnykh zadach* [General questions of the theory of boundary value problems]. Moscow, Nauka, 1980, 208 pp. (In Russian)

Research Article

Please cite this article in press as:
B u r s k i i V. P. On differential operators an differential equations on torus, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 4, pp. 607–619. doi: 10.14498/vsgtu1659 (In Russian).

Author's Details:
Vladimir P. Burskii http://orcid.org/0000-0001-5496-6132
Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Higher Mathematics; e-mail: bvp30@mail.ru

3. Ptashnik B. I. *Nekorrektnye granichnye zadachi dlia differentsial'nykh uravnenii s chastnymi proizvodnymi* [Ill-Posed Boundary-Value Problems for Partial Differential Equations]. Kiev, Nauk. dumka, 1984, 264 pp. (In Russian)
4. Lax P. D. On Cauchy's problem for hyperbolic equations and the differentiability of elliptic equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1955, vol. 8, no. 4, pp. 615–633. doi: 10.1002/cpa.3160080411.
5. Bourbaki N. *Elements of mathematics. Topological vector spaces.* Berlin, Springer Verlag, 1987, vii+364 pp.
6. Hörmander L. *The analysis of linear partial differential operators.* II: Differential operators with constant coefficients, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 257. Berlin, Springer Verlag, 1983, viii+391 pp.
7. Lewy H. An example ol a smooth linear partial differential equation without solution, *Ann. Math.*, 1957, vol. 66, no. 1, pp. 155–158. doi: 10.2307/1970121.
8. Grushin V. V. A differential equation without a solution, *Math. Notes*, 1971, vol. 10, no. 2, pp. 499–501. doi: 10.1007/BF01822870.
9. Garabedian P. R. An unsolvable equation, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1970, vol. 25, no. 1, pp. 207–208. doi: 10.1090/s0002-9939-1970-0252809-6.
10. Mizohata S. Solutions nulles et solution non analytiques, *J. Math. Kyoto Univ.*, 1962, vol. 1, no. 2, pp. 271–302. doi: 10.1215/kjm/1250525061.
11. Fedoriuk M. V. *Metod perevala* [The pass method]. Moscow, Nauka, 1977, 368 pp. (In Russian)
12. Hörmander L. *Linear partial differential operators*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 116. Berlin, Springer Verlag, 1963, vii+285 pp.
13. Bukhshtab A. A. *Teoriia chisel* [Number theory]. Moscow, Prosveshchenie, 1966, 384 pp. (In Russian)
14. Davis M. *Applied nonstandard analysis*, Pure and Applied Mathematics. New York, John Wiley & Sons, 1977, xii+181 pp.