



УДК 517.956.4, 517.977.1

Модальная идентификация граничного воздействия в двумерной обратной задаче теплопроводности

Э. Я. Рапопорт, А. Н. Дилигенская

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Предлагается метод приближенного решения двумерной граничной обратной задачи теплопроводности на компактном множестве непрерывных вместе со своими первыми производными функций, позволяющий восстановить граничное воздействие, зависящее от времени и пространственной координаты.

Используется модальное описание объекта в форме бесконечной системы линейных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов разложения температурного поля в ряд по собственным функциям исследуемой начально-краевой задачи. Такой подход приводит к восстановлению искомой величины плотности теплового потока в виде взвешенной суммы конечного числа ее модальных составляющих. Их значения определяются по значениям временных мод температурного поля, которые находятся на основе его модального представления из экспериментальных данных. Использование математической модели объекта в пространстве изображений по Лапласу и метода конечных интегральных преобразований приводит к описанию идентифицируемых воздействий и температурного поля в форме их разложений в ряды по собственным функциям одинаковой пространственной размерности и формированию на этой основе замкнутой системы уравнений относительно искомым величин.

Решена задача планирования температурных измерений, обеспечивающая на линии контроля в конечный момент интервала идентификации минимизацию ошибки аппроксимации экспериментального температурного поля его модельным представлением в равномерной метрике оценивания температурных невязок.

Научная статья

Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Рапопорт Э. Я., Дилигенская А. Н. Модальная идентификация граничного воздействия в двумерной обратной задаче теплопроводности // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 2. С. 380–394. doi: [10.14498/vsgtu1627](https://doi.org/10.14498/vsgtu1627).

Сведения об авторах

Эдгар Яковлевич Рапопорт  <http://orcid.org/0000-0002-0604-8801>

доктор технических наук, профессор; профессор; каф. автоматизации и управления в технических системах; e-mail: rapoport@samgtu.ru

Анна Николаевна Дилигенская  <http://orcid.org/0000-0002-9867-9781>

кандидат технических наук, доцент; доцент; каф. автоматизации и управления в технических системах; e-mail: adiligenskaya@mail.ru

Предложенный подход позволяет построить последовательность приближений, равномерно сходящихся с увеличением числа учитываемых модальных составляющих, к искомому решению.

Численное решение задачи реализовано в среде имитационного моделирования динамических систем Simulink MATLAB® и показало удовлетворительную точность решения задачи.

Ключевые слова: обратная задача теплопроводности, двумерная постановка, компактное множество, непрерывные и непрерывно дифференцируемые функции, модальная идентификация.

Получение: 14 мая 2018 г. / Исправление: 8 июня 2018 г. /

Принятие: 11 июня 2018 г. / Публикация онлайн: 27 июня 2018 г.

Введение. Результаты решения обратных задач математической физики находят применение во многих областях техники, в том числе при решении задач идентификации и диагностики процессов теплообмена [1–3]. Теория обратных задач теплопроводности (ОЗТ) [1–6], направленная на развитие вычислительных методов и подходов, позволяющих восстанавливать неизвестные и недоступные для непосредственного измерения характеристики нестационарных тепловых процессов, в настоящее время является одним из базовых направлений современной технологической теплофизики. Широкое применение находят граничные ОЗТ, позволяющие определять характеристики, входящие в граничные условия. Такие задачи, в том числе, рассматриваются в нелинейных постановках [7, 8], а также формулируются относительно многомерных областей [9–11].

Решение ОЗТ может основываться на одном из двух подходов, первый из которых состоит в аппроксимации оператора обратной задачи, не являющегося непрерывным, семейством непрерывных операторов и осуществляет регуляризацию некорректно поставленных задач [12]. Второй подход реализует переход к условно-корректной постановке задачи на основе информации о характере решения, что позволяет переопределить метрические пространства входных и выходных воздействий процесса. Такой подход предусматривает априорное назначение классов корректности, на которых задача становится устойчивой [13, 14].

В данной работе предлагается основанный на результатах теории оптимального управления объектами с распределенными параметрами [15] метод приближенного решения двумерной граничной ОЗТ на компактных множествах специальной структуры, не требующий применения численных регулирующих алгоритмов.

1. Постановка двумерной граничной обратной задачи теплопроводности. Рассматривается, подобно [4, 11, 16], граничная обратная задача нестационарной теплопроводности в двумерной области, заданной декартовыми координатами x и y , при одностороннем нагреве тела тепловым потоком $q(y, \varphi)$ и отсутствии теплообмена на ограничивающих плоскостях $x = 0$, $y = 0$ и $y = 1$. В этом случае базовая линейная математическая модель процесса описывается двумерным уравнением теплопроводности в относительных еди-

ницах для изменяющегося во времени φ температурного поля $\theta(x, y, \varphi)$:

$$\frac{\partial \theta(x, y, \varphi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 \theta(x, y, \varphi)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta(x, y, \varphi)}{\partial y^2}, \quad x, y \in (0, 1), \quad \varphi \in (0, \varphi^*) \quad (1)$$

с начальным

$$\theta(x, y, 0) = 0, \quad x, y \in [0, 1] \quad (2)$$

и граничными условиями второго рода:

$$\frac{\partial \theta(x, y, \varphi)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \theta(x, y, \varphi)}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial \theta(x, y, \varphi)}{\partial y} \Big|_{y=1} = 0, \quad \varphi \in [0, \varphi^*], \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta(x, y, \varphi)}{\partial x} \Big|_{x=1} = q(y, \varphi), \quad \varphi \in [0, \varphi^*]. \quad (4)$$

В граничной ОЗТ функция $q(y, \varphi)$ неизвестна и подлежит определению на основе дополнительной информации о температуре, измеряемой на некотором доступном для контроля подмножестве области $(x, y) \in [0, 1]$ определения $\theta(x, y, \varphi)$. При постановке двумерных ОЗТ в качестве такого подмножества обычно рассматривается некоторая линия $x = x^* = \text{const}$, $0 \leq x^* \leq 1$, $y \in [0, 1]$ [4, 11, 16] или некоторое число точек, расположенных во всей области $x, y \in [0, 1]$ [1, 17].

В настоящей работе в качестве входной информации для решения ОЗТ используются экспериментальные температурные зависимости $\theta^*(x^*, y_i, \varphi)$, полученные на интервале идентификации $\varphi \in [0, \varphi^*]$ в точках (x^*, y_i) , $i = \overline{1, \overline{R}}$, $x = x^* = \text{const}$, $0 \leq x^* \leq 1$, по которым требуется восстановить неизвестное пространственно-временное граничное воздействие $q(y, \varphi)$ по температурной невязке, оцениваемой в равномерной метрике на интервале $[0, \varphi^*]$.

2. Модальное представление объекта идентификации. Для решения ОЗТ по восстановлению граничного управления $q(y, \varphi)$ будем использовать метод модальной идентификации, позволяющий представить искомое воздействие в виде разложения в усеченный ряд по собственным функциям краевой задачи [18]. Модальное описание объекта с распределенными параметрами (ОРП) (1)–(4) основывается на применении к модели объекта (1)–(4) конечных интегральных преобразований [18]

$$\bar{\theta}(\mu_m, \lambda_n, \varphi) = \int_0^1 \int_0^1 \theta(x, y, \varphi) K(\mu_m, x) K^*(\lambda_n, y) dx dy \quad (5)$$

по пространственным переменным с ядрами, равными собственным функциям $K(\mu_m, x) = \cos \mu_m x$ и $K^*(\lambda_n, y) = \cos \lambda_n y$ объекта по соответствующему аргументу x и y , где собственные числа $\mu_m^2 = \pi^2 m^2$, $m = 0, 1, 2, \dots$ и $\lambda_n^2 = \pi^2 n^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$ являются корнями уравнений $\sin \mu = 0$, $\sin \lambda = 0$ соответственно. Применение преобразования (5) к модели ОРП (1)–(4) позволяет перейти к описанию объекта в виде бесконечной системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\bar{\theta}(\mu_m, \lambda_n, \varphi)}{d\varphi} = -(\mu_m^2 + \lambda_n^2) \bar{\theta}(\mu_m, \lambda_n, \varphi) + \bar{q}_n(\varphi) \cos \mu_m, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

относительно коэффициентов (временных мод) $\bar{\theta}(\mu_m, \lambda_n, \varphi)$ разложения функции $\theta(x, y, \varphi)$ в двумерный сходящийся в среднем ряд по собственным функциям [18]:

$$\theta(x, y, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_m^2 C_n^2 \bar{\theta}(\mu_m, \lambda_n, \varphi) \cos \mu_m x \cos \lambda_n y, \quad (7)$$

$$\bar{\theta}(\mu_n, \lambda_n, 0) = \bar{\theta}_0(\mu_n, \lambda_n) = 0, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

В (6) временные моды

$$\bar{q}_n(\varphi) = \bar{q}(\lambda_n, \varphi) = \int_0^1 q(y, \varphi) \cos \lambda_n y dy, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

граничного управления $q(y, \varphi)$ являются коэффициентами его разложения в одномерный бесконечный ряд

$$q(y, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 \bar{q}(\lambda_n, \varphi) \cos \lambda_n y. \quad (9)$$

Множители C_m^2 и C_n^2 , нормирующие собственные функции, определяются следующим образом

$$C_m^2 = \left(\int_0^1 \cos^2 \mu_m x dx \right)^{-1} = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 2, & m \geq 1; \end{cases}$$

$$C_n^2 = \left(\int_0^1 \cos^2 \lambda_n y dy \right)^{-1} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2, & n \geq 1. \end{cases}$$

3. Метод модальной идентификации граничного управления. Равенства (6) формально определяют искомые соотношения между модальными составляющими $\bar{q}_n(\varphi)$ и $\bar{\theta}(\mu_m, \lambda_n, \varphi)$. Однако при учете любого достаточно большого конечного числа членов рядов (7) и (9) для $m = \overline{0, M}$, $n = \overline{0, N}$, $M, N > 1$, обеспечивающего требуемую точность описания температурного поля, соответствующая «укороченная» система $(M+1) \times (N+1)$ уравнений (6) оказывается неразрешимой относительно меньшего числа $N+1$ неизвестных $\bar{q}_n(\varphi)$, которые должны быть найдены на основе поведения $(M+1) \times (N+1)$ величин $\bar{\theta}(\mu_m, \lambda_n, \varphi)$. Такая ситуация объясняется описанием $\theta(x, y, \varphi)$ и $q(y, \varphi)$ рядами (7) и (9) различной пространственной размерности.

Для устранения этого затруднения будем, подобно [19], использовать модальное описание объекта на основе его модели (1)–(4), записанной в изображениях Лапласа по переменной φ :

$$p\tilde{\theta}(x, y, p) = \frac{\partial^2 \tilde{\theta}(x, y, p)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\theta}(x, y, p)}{\partial y^2}, \quad x, y \in (0, 1), \quad (10)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}(x, y, p)}{\partial x} \Big|_{x=1} = \tilde{q}(y, p), \quad (11)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}(x, y, p)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\theta}(x, y, p)}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\theta}(x, y, p)}{\partial y} \Big|_{y=1} = 0, \quad (12)$$

где p — комплексная переменная преобразования Лапласа; $\tilde{\theta}(x, y, p)$, $\tilde{q}(y, p)$ — изображения функций $\theta(x, y, \varphi)$ и $q(y, \varphi)$.

Применение конечного интегрального преобразования по пространственному аргументу y граничного управляющего воздействия $\tilde{q}(y, p)$ к уравнениям объекта (10)–(12) приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d^2 \tilde{\theta}_n}{dx^2} - A_n^2 \tilde{\theta}_n = 0, \quad A_n^2 = p + \lambda_n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

по переменной x относительно модальных составляющих

$$\tilde{\theta}_n(x, p) = \int_0^1 \tilde{\theta}(x, y, p) \cos \lambda_n y dy, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

разложения

$$\tilde{\theta}(x, y, p) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 \tilde{\theta}_n(x, p) \cos \lambda_n y \quad (14)$$

в ряд по ортогональной системе собственных функций $\cos \lambda_n y$, дополняемым граничными условиями

$$\frac{d \tilde{\theta}_n(x, p)}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{d \tilde{\theta}_n(x, p)}{dx} \Big|_{x=1} = \tilde{q}_n(p). \quad (15)$$

Здесь $\tilde{q}_n(p)$ — модальные составляющие граничного воздействия, равные коэффициентам

$$\tilde{q}_n(p) = \int_0^1 \tilde{q}(y, p) \cos \lambda_n y dy, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

разложения

$$\tilde{q}(y, p) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 \tilde{q}_n(p) \cos \lambda_n y \quad (16)$$

в ряд по собственным функциям $\cos \lambda_n y$.

Решение задачи (13), (15) на линии $x = x^*$ температурных измерений находится известными методами в виде

$$\tilde{\theta}_n(x^*, p) = H_n(x^*, p) \tilde{q}_n(p), \quad H_n(x, p) = \frac{\text{ch}(A_n(p) \cdot x)}{A_n(p) \text{sh}(A_n(p))}, \quad (17)$$

однозначным образом связывающем в операторной форме моды $\tilde{q}_n(p)$ и $\tilde{\theta}_n(x^*, p)$ разложений $\tilde{q}(y, p)$ и $\tilde{\theta}(x^*, y, p)$ в одномерные ряды (14), (16) по пространственной координате y при учете любого числа N составляющих в (14) и (16)

$$\tilde{q}_n(p) = H_n^{-1}(x^*, p) \tilde{\theta}_n(x^*, p), \quad n = \overline{0, N}. \quad (18)$$

Таким образом, предлагаемый метод решения условно-корректной задачи идентификации граничного управления, рассматриваемого на компактном множестве непрерывных вместе со своими первыми производными модальных переменных $\bar{\theta}_n(x^*, \varphi)$, реализуется в пространстве изображений по Лапласу и состоит в восстановлении искомой величины $\tilde{q}(y, p)$ в виде конечной взвешенной суммы

$$\tilde{q}(y, p) = \sum_{n=0}^N C_n^2 \tilde{q}_n(p) \cos \lambda_n y \quad (19)$$

мод $\tilde{q}_n(p)$, вычисляемых согласно (17), (18), по значениям модальных составляющих $\tilde{\theta}_n(x^*, p)$ температурного поля $\tilde{\theta}(x^*, y, p)$. Выражения $\tilde{\theta}_n(x^*, p)$ могут рассматриваться как преобразованные по Лапласу зависимости $\bar{\theta}_n(x^*, \varphi)$, значения которых должны быть найдены по экспериментальным данным путем решения относительно $\bar{\theta}_n(x^*, \varphi)$ замкнутой системы уравнений, образуемой оригиналами равенств (14), рассматриваемых в точках контроля $x = x^*$, $y = y_i$, $i = \overline{1, N}$, для укороченной суммы ряда

$$\theta^*(x^*, y_i, \varphi) = \sum_{n=0}^N C_n^2 \bar{\theta}_n(x^*, \varphi) \cos \lambda_n y_i, \quad i = \overline{1, N+1}. \quad (20)$$

Предварительно на основе преобразования Лапласа должен быть выполнен переход от температурных кривых $\theta^*(x^*, y_i, \varphi)$, зависящих от времени, к их изображениям $\tilde{\theta}^*(x^*, y_i, p)$. Переход к оригиналу $q(y, \varphi)$ производится применением обратного преобразования Лапласа к равенству (19) с учетом достаточно большого числа членов разложения гиперболических функций в (17) в ряды Тейлора по степеням их аргументов. При этом, как будет показано далее, при практическом решении задачи (18), как правило, переход от оригиналов к изображениям и обратно реализуется современными программными средствами моделирования динамических систем.

4. Планирование температурных измерений. Точность решения ОЗТ во многом определяется входной экспериментальной информацией, которая существенно зависит от расположения датчиков температуры, в связи с чем эффективное решение двумерных обратных задач возможно только при предварительно выполненном этапе оптимального планирования температурных измерений. В рамках предлагаемого подхода найдем оптимальную в определенном смысле совокупность значений $N+1$ координат y_i , $i = \overline{1, N+1}$, точек $\{(x^*, y_1), (x^*, y_2), \dots, (x^*, y_{N+1})\}$ контроля температуры при заданном числе N , определяемом априори выбранным числом членов усеченного ряда (19).

При вариациях набора (x^*, y_i) , $i = \overline{1, N+1}$, точек контроля решение $\bar{\theta}_n$, $n = \overline{0, N}$, системы уравнений (20) определяется в форме соответствующей зависимости $\bar{\theta}_n(x^*, \varphi, \Delta)$ от вектора $\Delta = (y_i)$, $i = \overline{1, N+1}$, значений искомых координат. В таком случае расчетное температурное поле представляется в форме оригинала укороченной суммы $N+1$ членов ряда (14):

$$\theta_{N+1}(x^*, y, \varphi, \Delta) \approx \sum_{n=0}^N C_n^2 \bar{\theta}_n(x^*, \varphi, \Delta) \cos \lambda_n y, \quad y \in [0, 1], \quad \varphi \in [0, \varphi^*].$$

Согласно концепции минимаксной оптимизации, реализующей оценивание температурного отклонения в равномерной метрике [20], в качестве критерия оптимизации будем использовать минимизацию максимального значения температурной невязки во всей области определения аргументов:

$$I_1(x^*, \Delta) = \max_{\substack{\varphi \in [0, \varphi^*] \\ y \in [0, 1]}} |\theta_{N+1}(x^*, y, \varphi, \Delta) - \theta^*(x^*, y, \varphi)| \rightarrow \min_{(x^*, \Delta)}, \quad (21)$$

где $\theta^*(x^*, y, \varphi)$ — измеряемая температура, полагаемая доступной для контроля при всех $y \in [0, 1]$.

Учет очевидных соображений физического характера приводит к тому, что ошибка аппроксимации с течением времени увеличивается и достигает своего максимального значения в последний момент времени φ^* , в связи с чем критерий (21) может быть сформулирован по отношению не ко всему интервалу идентификации $[0, \varphi^*] \ni \varphi$, а к моменту φ^* :

$$I_2(x^*, \Delta) = \max_{y \in [0, 1]} |\theta_{N+1}(x^*, y, \varphi^*, \Delta) - \theta^*(x^*, y, \varphi^*)| \rightarrow \min_{(x^*, \Delta)}. \quad (22)$$

Таким образом, минимаксная задача математического программирования (22) может быть решена относительно координат (x^*, y_i) , $i = \overline{1, N+1}$, или, при фиксированном значении x^* , заданном, например, исходя из технологических требований, относительно вектора $\Delta = (y_i)$, $i = \overline{1, N+1}$.

Для решения задачи (22) могут быть использованы известные качественные свойства оптимальных температурных распределений, обладающих при оптимальных значениях координат $(x^*, y_1^0), (x^*, y_2^0), \dots, (x^*, y_{N+1}^0)$ наилучшим равномерным приближением к требуемому состоянию $\theta^*(x^*, y, \varphi)$ [20]. Данные свойства фиксируют в отдельных точках (x^*, y_j^{al}) , $j = \overline{1, R}$, на интервале $y \in [0, 1]$ достижение предельных отклонений расчетной температуры $\theta_{N+1}(x^*, y_j^{al}, \varphi^*, \Delta^0)$ от экспериментальной $\theta^*(x^*, y_j^{al}, \varphi^*)$, равных $\pm I_2(x^*, \Delta^0)$, и тем самым устанавливают конфигурацию погрешности $\theta_{N+1}(x^*, y, \varphi^*, \Delta^0) - \theta^*(x^*, y, \varphi^*)$ аппроксимации температурного распределения $\theta^*(x^*, y, \varphi^*)$.

Оптимальное решение $\theta_{N+1}(x^*, y, \varphi^*, \Delta^0) - \theta^*(x^*, y, \varphi^*)$, соответствующее вектору значений Δ^0 для каждого фиксированного x^* , обладает свойствами чебышевского альтернанса, в соответствии с чем при $\varphi = \varphi^*$ на интервале $y \in [0, 1]$ в точках (x^*, y_j^{al}) , число которых R на единицу превышает количество $N+1$ искомым координат, достигаются знакопередающиеся максимальные по величине отклонения, равные $\pm(\theta_{N+1}(x^*, y_j^{al}, \varphi^*, \Delta^0) - \theta^*(x^*, y_j^{al}, \varphi^*))$.

Данное свойство приводит к замкнутой системе $N+2$ соотношений для предельных значений температурных невязок в этих точках относительно неизвестных — значений координат (y_j^{al}) точек альтернанса и величины предельного отклонения $I_2(x^*, \Delta^0)$. Условия существования экстремума

$$\frac{\partial}{\partial y} (\theta_{N+1}(x^*, y_s^{al}, \varphi^*, \Delta^0) - \theta^*(x^*, y_s^{al}, \varphi^*))$$

во внутренних точках $y_s^{al} \in \{y_j^{al}\}$, $j = \overline{1, R}$, интервала $[0, 1] \ni y$ дополняют систему, которая в результате принимает вид

$$\theta_{N+1}(x^*, y_j^{al}, \varphi^*, \Delta^0) - \theta^*(x^*, y_j^{al}, \varphi^*) = \pm(-1)^{j+1} I_2; \quad (23)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (\theta_{N+1}(x^*, y_s^{al}, \varphi^*, \Delta^0) - \theta^*(x^*, y_s^{al}, \varphi^*)) = 0.$$

Влияние координаты x^* на точность решения задачи может быть исследовано методом математического моделирования.

5. Пример решения обратной задачи теплопроводности. Для демонстрации возможностей представленного метода была решена серия ОЗТ по восстановлению пространственно-временного управления $q(y, \varphi)$ методом модальной идентификации с учетом от трех до десяти мод температурного поля. Модельное идентифицируемое воздействие $q^*(y, \varphi)$ в форме произведения двух функций одной переменной $q^*(y, \varphi) = q^{(1)}(y)q^{(2)}(\varphi)$ имело вид

$$q^*(y, \varphi) = \sin(\alpha\pi y)(e^{\beta\varphi} - 1), \quad (24)$$

с учетом которого было получено выражение, моделирующее наблюдаемое температурное поле [18]:

$$\begin{aligned} \theta^*(x, y, \varphi) = & \int_0^\varphi \bar{q}_{00}(\tau) d\tau + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos \mu_m x \int_0^\varphi \bar{q}_{m0}(\tau) e^{-\mu_m^2(\varphi-\tau)} d\tau + \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \lambda_n y \int_0^\varphi \bar{q}_{0n}(\tau) e^{-\lambda_n^2(\varphi-\tau)} d\tau + \\ & + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \mu_m x \cos \lambda_n y \int_0^\varphi \bar{q}_{mn}(\tau) e^{-(\mu_m^2 + \lambda_n^2)(\varphi-\tau)} d\tau, \quad (25) \end{aligned}$$

$$\bar{q}_{mn}(\varphi) = \bar{q}_n(\varphi) \cos \mu_m, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\bar{q}_n(\varphi)$ определяются согласно (8) с подстановкой $q(y, \varphi)$ в форме (24).

На основе выражений (24), (25) была решена серия ОЗТ для ряда возрастающих значений N .

Предварительно для каждого конкретного значения N решалась задача планирования температурных измерений (22) при использовании выражения (25) для $\theta^*(x^*, y, \varphi^*)$. При этом координата x^* полагалась заданной, и определению подлежали координаты (y_i^0) , $i = \overline{1, N+1}$, значения которых были найдены в результате численного решения системы альтернансных соотношений (23).

Далее были решены прямые задачи теплопроводности, моделирующие на интервале идентификации $\varphi \in [0, \varphi^*]$ экспериментальные температурные зависимости $\theta^*(x^*, y_i, \varphi)$ в точках с найденными координатами (x^*, y_i^0) , $i = \overline{1, N+1}$.

Равенства (20) позволяют записать для всей совокупности экспериментальных кривых систему N алгебраических уравнений

$$\theta^* = \Phi \bar{\theta}, \quad (26)$$

где $\theta^* = [\theta^*(x^*, y_1, \varphi) \quad \theta^*(x^*, y_2, \varphi) \quad \dots \quad \theta^*(x^*, y_{N+1}, \varphi)]^\top$ — вектор-столбец температурных зависимостей, полученных во всех точках контроля на всем

интервале идентификации, матрица

$$\Phi = \begin{bmatrix} C_0^2 & C_1^2 \cos \pi y_1 & \cdots & C_{N-1}^2 \cos(N-1)\pi y_1 \\ C_0^2 & C_1^2 \cos \pi y_2 & \cdots & C_{N-1}^2 \cos(N-1)\pi y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_0^2 & C_1^2 \cos \pi y_N & \cdots & C_{N-1}^2 \cos(N-1)\pi y_N \end{bmatrix}$$

составлена из значений собственных функций в точках контроля с учетом нормирующих коэффициентов, а $\bar{\theta} = [\bar{\theta}_0(x^*, \varphi) \ \bar{\theta}_1(x^*, \varphi) \ \cdots \ \bar{\theta}_{N-1}(x^*, \varphi)]^T$ — вектор-столбец модальных составляющих температур $\theta(x^*, y_i, \varphi)$.

Таким образом, на основе (26) при известном векторе θ^* могут быть определены $N + 1$ модальные составляющие $\bar{\theta}_n(x^*, \varphi)$:

$$\bar{\theta} = \Phi^{-1} \theta^*.$$

Далее с использованием полученных значений $\bar{\theta}_n(x^*, \varphi)$ решается в пространстве изображений Лапласа задача (18) восстановления модальных составляющих $\tilde{q}_n(p)$ граничного управления. Непосредственное вычисление $\tilde{q}_n(p)$ на основе (18), содержащего оператор $H_n^{-1}(x^*, p)$, обратный непрерывному, привело бы к нарушению условия устойчивости решения, в связи с чем для реализации выражения (18) используется структура, представленная на рис. 1, где K — достаточно большое число. Для идентификации значений всех модальных составляющих $\tilde{q}_n(p)$, $n = \overline{0, N}$, реализуется совокупность $N + 1$ независимых контуров согласно структуре рис. 1. Числитель и знаменатель передаточной функции $H_n(x, p)$ (17), содержащие функции гиперболического синуса и косинуса, при моделировании могут быть приближенно выражены в виде разложения в усеченные ряды по степеням p :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(\sqrt{p + \pi^2 n^2} \cdot x) &= 1 + \frac{(p + \pi^2 n^2)x^2}{2!} + \frac{(p + \pi^2 n^2)^2 x^4}{4!} + \cdots, \\ \sqrt{p + \pi^2 n^2} \cdot \operatorname{sh} \sqrt{p + \pi^2 n^2} &= (p + \pi^2 n^2) + \frac{(p + \pi^2 n^2)^2}{3!} + \frac{(p + \pi^2 n^2)^3}{5!} + \cdots. \end{aligned}$$

После нахождения составляющих $\tilde{q}_n(p)$ граничное воздействие $\tilde{q}(y, p)$ восстанавливается в виде ряда (14) с конечным числом слагаемых, оригинал которого, полученный в результате обратного преобразования Лапласа, соответствует искомой функции $q(y, \varphi)$. При практической реализации структуры (рис. 1) в среде моделирования динамических систем Simulink MATLAB[®] операции прямого и обратного преобразований Лапласа производятся средствами Simulink[®] путем численного моделирования.

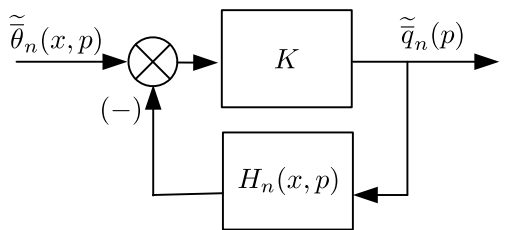


Рис. 1. Структурная схема восстановления модальных составляющих $\tilde{q}_n(p)$

[Figure 1. The structure diagram of calculation of modal components $\tilde{q}_n(p)$

Некоторые результаты решения ОЗТ методом модальной идентификации представлены на рис. 2, 3. В таблице приведены погрешность

$$\varepsilon_\theta = \max_y |\theta_{N+1}(x^*, y, \varphi^*) - \theta^*(x^*, y, \varphi^*)|$$

приближения температуры и ошибка

$$\varepsilon_u = \max_y |q(y, \varphi^*) - q^*(y, \varphi^*)|$$

аппроксимации граничного управления для различных N . Результаты, отраженные на рисунках и в таблице, соответствуют данным $\varphi^* = 2$, $x^* = 0.96$ и следующим оптимальным значениям y_i^0 вектора $y^0 = (y_i^0)$, $i = \overline{1, N+1}$, координат y_i точек контролируемых температур:

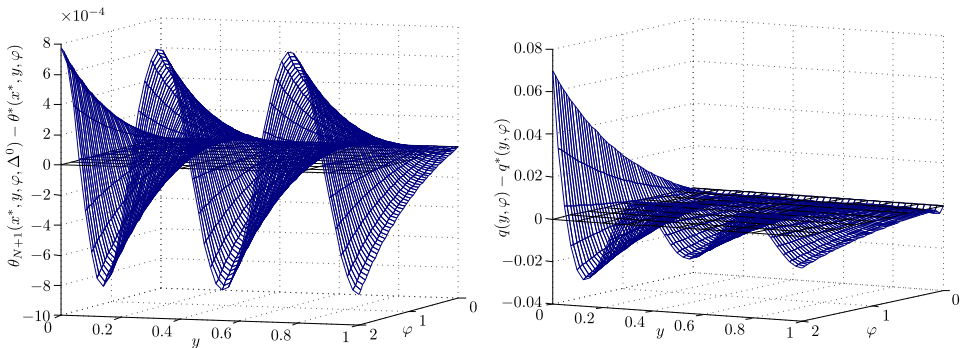


Рис. 2. Температурная невязка $\theta_{N+1}(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(x^*, y, \varphi)$, полученная в результате решения задачи планирования эксперимента (слева), и погрешность $q(y, \varphi) - q^*(y, \varphi)$ аппроксимации граничного управления (справа) при $N = 4$

[Figure 2. The temperature discrepancy $\theta_{N+1}(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(x^*, y, \varphi)$ obtained as a result of solving the problem of experimental design (left), and the error $q(y, \varphi) - q^*(y, \varphi)$ of approximation of the boundary control (right) for $N = 4$]

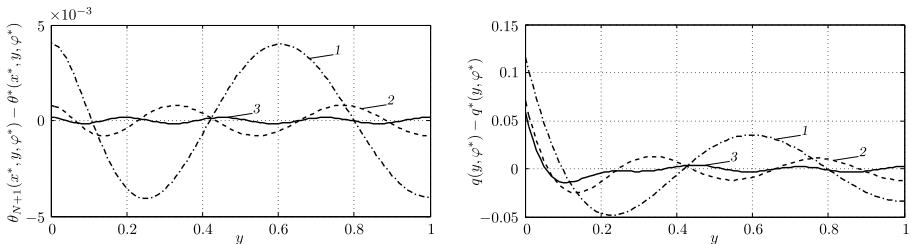


Рис. 3. Температурная невязка $\theta_{N+1}(x^*, y, \varphi^*) - \theta^*(x^*, y, \varphi^*)$, полученная в результате решения задачи планирования эксперимента (слева), и погрешность $q(y, \varphi^*) - q^*(y, \varphi^*)$ аппроксимации граничного управления (справа): 1 — при $N = 2$; 2 — при $N = 4$; 3 — при $N = 7$

[Figure 3. The temperature discrepancy $\theta_{N+1}(x^*, y, \varphi^*) - \theta^*(x^*, y, \varphi^*)$ obtained as a result of solving the problem of experimental design (left) and the error $q(y, \varphi^*) - q^*(y, \varphi^*)$ of approximation of the boundary control (right) (1—for $N = 2$; 2—for $N = 4$; 3—for $N = 7$)]

N	2	3	4	5	7	9
$\varepsilon_\theta, \%$	0.41	0.16	0.08	0.04	0.02	0.01
$\varepsilon_u, \%$	11.6	8.4	7.0	6.4	5.8	5.6

The error $\varepsilon_\theta = \max_y |\theta_{N+1}(x^*, y, \varphi^*) - \theta^*(x^*, y, \varphi^*)|$ of the temperature approximation and the error $\varepsilon_u = \max_y |q(y, \varphi^*) - q^*(y, \varphi^*)|$ of approximation of the boundary control for different N

$$y^0 = [0.11; 0.42; 0.80] \text{ при } N = 2;$$

$$y^0 = [0.08; 0.30; 0.57; 0.85] \text{ при } N = 3;$$

$$y^0 = [0.06; 0.23; 0.43; 0.66; 0.88] \text{ при } N = 4;$$

$$y^0 = [0.05; 0.19; 0.35; 0.53; 0.71; 0.91] \text{ при } N = 5;$$

$$y^0 = [0.04; 0.14; 0.26; 0.39; 0.52; 0.66; 0.80; 0.93] \text{ при } N = 7;$$

$$y^0 = [0.03; 0.11; 0.20; 0.30; 0.40; 0.51; 0.62; 0.73; 0.84; 0.95] \text{ при } N = 9.$$

Заключение. Предложенный в работе метод решения обратной задачи теплопроводности, обеспечивающий восстановление пространственно-временного граничного управляющего воздействия, позволяет найти искомую характеристику на основе аналитической идентификации его модальных составляющих. Погрешность решения задачи определяется числом учитываемых слагаемых усеченного ряда и уменьшается с его увеличением. Предварительное решение задачи оптимального планирования эксперимента позволяет определить координаты точек контроля температуры, обеспечивающие решение ОЗТ с удовлетворительной точностью.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 18-08-00048_a и 18-08-00565_a).

Библиографический список

1. Özisik M. N., Orlande H. R. B. *Inverse Heat Transfer: fundamentals and applications*. New York: Taylor and Francis, 2000. xviii+330 p. doi: [10.1201/9780203749784](https://doi.org/10.1201/9780203749784).
2. Мацевитый Ю. М., Гайшун И. В., Борухов В. Т., Костиков А. О. Параметрическая и функциональная идентификация тепловых процессов // *Пробл. машиностроения*, 2011. Т. 14, №3. С. 40–47.
3. Alifanov O. Inverse problems in identification and modeling of thermal processes: Theory and practice (Invited paper, Opening keynote lecture) / *Book of Abstracts: 8th International Conference on Inverse Problems in Engineering (ICIPE 2014)*. Gliwice–Krakow, Poland: Institute of Thermal Technology Silesian University of Technology, 2014. pp. 3–4.
4. Алифанов О. М. *Обратные задачи теплообмена*. М.: Машиностроение, 1988. 280 с.
5. Beck J. V., Blackwell B., St. Clair C. R., jr. *Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems*. New York: J. Wiley and Sons, 1985. xvii+308 pp.
6. Ватульян А. О. *Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела*. М.: Физматлит, 2007. 224 с.
7. Alifanov O. Inverse problems in identification and modeling of thermal processes: Russian contributions // *Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow*. vol. 27, no. 3. pp. 711–728. doi: [10.1108/HFF-03-2016-0099](https://doi.org/10.1108/HFF-03-2016-0099).

8. Мацевитый Ю. М., Костиков А. О., Сафонов Н. А., Ганчин В. В. К решению нестационарных нелинейных граничных обратных задач теплопроводности // *Пробл. машиностроения*, 2017. Т. 20, № 4. С. 15–23.
9. Zhi Qian, Xiaoli Feng Numerical solution of a 2D inverse heat conduction problem // *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2013. vol. 21, no. 3. pp. 467–484. doi: [10.1080/17415977.2012.712526](https://doi.org/10.1080/17415977.2012.712526).
10. Ching-yu Yang, Cha'o-Kuang Chen The boundary estimation in two-dimensional inverse heat conduction problems // *J. Phys. D. Appl. Phys.*, 1996. vol. 29, no. 2. pp. 333. doi: [10.1088/0022-3727/29/2/009](https://doi.org/10.1088/0022-3727/29/2/009).
11. Кузин А. Я. Регуляризованное численное решение нелинейной двумерной обратной задачи теплопроводности // *ПМТФ*, 1995. № 1. С. 106–112.
12. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. *Методы решения некорректных задач*. М.: Наука, 1979. 285 с.
13. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. *Теория линейных некорректных задач и ее приложения*. М.: Наука, 1978. 206 с.
14. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. *Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация*. М.: Наука, 1983. 200 с.
15. Бутковский А. Г. *Методы управления системами с распределенными параметрами*. М.: Наука, 1975. 568 с.
16. Reinhardt H.-J. A numerical method for the solution of two-dimensional inverse heat conduction problems // *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 1991. vol. 32, no. 2. pp. 363–383. doi: [10.1002/nme.1620320209](https://doi.org/10.1002/nme.1620320209).
17. Колесник С. А., Формалев В. Ф., Кузнецова Е. Л. О граничной обратной задаче теплопроводности по восстановлению тепловых потоков к границам анизотропных тел // *ТВТ*, 2015. Т. 53, № 1. С. 72–77. doi: [10.7868/S0040364415010111](https://doi.org/10.7868/S0040364415010111).
18. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. *Уравнения в частных производных математической физики*. М.: Высш. шк., 1970. 712 с.
19. Рапопорт Э. Я. Программная управляемость линейных многомерных систем с распределенными параметрами // *Изв. РАН. Теория и системы управления*, 2015. № 2. С. 22–39. doi: [10.7868/S0002338815020110](https://doi.org/10.7868/S0002338815020110).
20. Рапопорт Э. Я. *Альтернативный метод в прикладных задачах оптимизации*. М.: Наука, 2000. 336 с.

MSC: 80A23, 35K05, 93C20

Modal identification of a boundary input in the two-dimensional inverse heat conduction problem

E. Ya. Rapoport, A. N. Diligenskaya

Samara State Technical University,

244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract


A method for the approximate solution of a two-dimensional inverse boundary heat conduction problem on a compact set of continuous and continuously differentiable functions is proposed. The method allows us to reconstruct a boundary action that depends on time and a spatial coordinate.

A modal description of the object is used in the form of an infinite system of linear differential equations with respect to the coefficients of the expansion of the state function in a series in eigenfunctions of the initial-boundary value problem under study. This approach leads to the restoration of the sought value of the heat flux density in the form of a weighted sum of a finite number of its modal components. Their values are determined from the temporal modes of the temperature field, which are found from the experimental data on the basis of the modal representation of the field. To obtain a modal description of the identified input and the temperature field in the form of their expansions into series in eigenfunctions of the same spatial dimension, the mathematical model of the object in the Laplace transform domain and the method of finite integral transformations are used. On this basis, a closed system of equations with respect to the unknown quantities is formed.

The proposed approach allows us to construct a sequence of approximations that uniformly converge to the desired solution with increasing number of considered modal components.

The problem of the temperature experimental design is solved. This solution ensures the minimization of the approximation error of the experimental temperature field by its model representation in the uniform metric of estimating temperature discrepancies on the control line at the final moment of the identification interval.

Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Rapoport E. Ya., Diligenskaya A. N. Modal identification of a boundary input in the two-dimensional inverse heat conduction problem, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 2, pp. 380–394. doi: [10.14498/vsgtu1627](https://doi.org/10.14498/vsgtu1627) (In Russian).

Authors' Details:

Edgar Ya. Rapoport  <http://orcid.org/0000-0002-0604-8801>

Dr. Tech. Sci.; Professor; Dept. of Automatics and Control in Technical Systems;
e-mail: rapoport@samgtu.ru

Anna N. Diligenskaya  <http://orcid.org/0000-0002-9867-9781>

Cand. Tech. Sci.; Associate Professor; Dept. of Automatics and Control in Technical Systems;
e-mail: adiligenskaya@mail.ru

Keywords: two-dimensional inverse heat conduction problem, compact set, continuous and continuously differentiable functions, modal identification.

Received: 14th May, 2018 / Revised: 8th June, 2018 /

Accepted: 11th June, 2018 / First online: 27th June, 2018

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interests with the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects nos. 18-08-00048_a and 18-08-00565_a).

References

1. Özisik M. N., Orlande H. R. B. *Inverse Heat Transfer: fundamentals and applications*. New York, Taylor and Francis, 2000, xviii+330 p. doi: [10.1201/9780203749784](https://doi.org/10.1201/9780203749784).
2. Matsevityi Y. M., Gaishun I. V., Borukhov V. T., Kostikov A. O. Parametric and functional identification of thermal processes, *Journal of Mechanical Engineering*, 2011, vol. 14, no. 3, pp. 40–47 (In Russian).
3. Alifanov O. Inverse problems in identification and modeling of thermal processes: Theory and practice (Invited paper, Opening keynote lecture), In: *Book of Abstracts*, 8th International Conference on Inverse Problems in Engineering (ICIPE 2014). Gliwice–Krakow, Poland, Institute of Thermal Technology Silesian University of Technology, 2014, pp. 3–4.
4. Alifanov O. M. *Inverse Heat Transfer Problems*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1994, xii+348 p. doi: [10.1007/978-3-642-76436-3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-76436-3).
5. Beck J. V., Blackwell B., St. Clair C. R., jr. *Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems*. New York, J. Wiley and Sons, 1985, xvii+308 pp.
6. Vatul'yan A. O. *Obratnye zadachi v mekhanike deformiruemogo tverdogo tela* [Inverse Problems in Mechanics of Deformable Solids]. Moscow, Fizmatlit, 2007, 224 pp. (In Russian)
7. Alifanov O. Inverse problems in identification and modeling of thermal processes: Russian contributions, *Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow*, vol. 27, no. 3, pp. 711–728. doi: [10.1108/HFF-03-2016-0099](https://doi.org/10.1108/HFF-03-2016-0099).
8. Matsevityi Y. M., Kostikov A. O., Safonov N. A., Ganchin V. V. To the solution of non-stationary nonlinear reverse problems of thermal conductivity, *Journal of mechanical engineering*, 2017, vol. 20, no. 4, pp. 15–23 (In Russian).
9. Zhi Qian, Xiaoli Feng Numerical solution of a 2D inverse heat conduction problem, *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2013, vol. 21, no. 3, pp. 467–484. doi: [10.1080/17415977.2012.712526](https://doi.org/10.1080/17415977.2012.712526).
10. Ching-yu Yang, Cha'o-Kuang Chen The boundary estimation in two-dimensional inverse heat conduction problems, *J. Phys. D. Appl. Phys.*, 1996, vol. 29, no. 2, pp. 333. doi: [10.1088/0022-3727/29/2/009](https://doi.org/10.1088/0022-3727/29/2/009).
11. Kuzin A. Ya. Regularized numerical solution of the nonlinear, two-dimensional, inverse heat-conduction problem, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1995, vol. 36, no. 1, pp. 98–104. doi: [10.1007/BF02369679](https://doi.org/10.1007/BF02369679).
12. Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya. *Solutions of ill-posed problems*, Scripta Series in Mathematics. New York, John Wiley & Sons, 1977, xiii+258 pp.
13. Ivanov V. K., Vasin V. V., Tanana V. P. *Theory of linear ill-posed problems and its applications*, Inverse and Ill-Posed Problems Series, vol. 36. Utrecht, VSP, 2002, xiii+281 pp.

14. Tikhonov A. N., Goncharsky A. V., Stepanov V. V., Yagola A. G. *Regulariziruiushchie algoritmy i apriornaya informatsiia* [Regularizing algorithms and a priori information]. Moscow, Nauka, 1983, 200 pp. (In Russian)
15. Butkovskiy A. G. *Metody upravleniia sistemami s raspredelennymi parametrami* [Control methods for systems with distributed parameters]. Moscow, Nauka, 1975, 568 pp. (In Russian)
16. Reinhardt H.-J. A numerical method for the solution of two-dimensional inverse heat conduction problems, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 1991, vol. 32, no. 2, pp. 363–383. doi: [10.1002/nme.1620320209](https://doi.org/10.1002/nme.1620320209).
17. Kolesnik S. A., Formalev V. F., Kuznetsova E. L. On inverse boundary thermal conductivity problem of recovery of heat fluxes to the boundaries of anisotropic bodies, *High Temperature*, 2015, vol. 53, no. 1, pp. 68–72. doi: [10.1134/S0018151X15010113](https://doi.org/10.1134/S0018151X15010113).
18. Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M. *Differential Equations of Mathematical Physics*. Amsterdam, North-Holland Publ., 1964, xvi+701 pp.
19. Rapoport E. Ya. Open-loop controllability of multidimensional linear systems with distributed parameters, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2015, vol. 54, no. 2, pp. 184–201. doi: [10.1134/S1064230715020112](https://doi.org/10.1134/S1064230715020112).
20. Rapoport E. Ya. *Al'ternansnyy metod v prikladnykh zadachakh optimizatsii* [Alternance method in applied optimization problems]. Moscow, Nauka, 2000, 336 pp. (In Russian)