



# Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 539.376:539.4.014.13

## Моделирование ползучести и релаксации остаточных напряжений в поверхностно упрочненных элементах статически не определимых стержневых систем

*В. П. Радченко, Е. Е. Деревянка*

Самарский государственный технический университет,  
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

### Аннотация

Предложен метод моделирования напряженно-деформированного состояния в поверхностно упрочненных элементах статически не определимых стержневых систем в условиях ползучести на примере трехэлементной несимметричной стержневой системы. Решение задачи состоит из двух этапов: реконструкции напряженно-деформированного состояния после процедуры поверхностного пластического упрочнения цилиндрических элементов системы (пневмодробеструйная обработка микрочастицами) и методики расчета релаксации остаточных напряжений в упрочненных элементах на фоне ползучести всей стержневой конструкции как целого. В качестве определяющих реологических соотношений использовалась модель, описывающая первую и вторую стадии ползучести.

Результаты решений на обоих этапах проиллюстрированы на модельном примере ползучести систем с упрочненными элементами из сплава ЖС6У при температуре 650 °С. Для упрочнения стержней из этого сплава использовались реальные экспериментальные данные для осевых и окружных остаточных напряжений, детально проиллюстрирована методика реконструкции напряженно-деформированного состояния после пневмодробеструйной обработки. Для построения реологической модели использовались опытные данные для кривых одноосной ползучести

### Научная статья

Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International \(https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

### Образец для цитирования

Радченко В. П., Деревянка Е. Е. Моделирование ползучести и релаксации остаточных напряжений в поверхностно упрочненных элементах статически не определимых стержневых систем // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 4. С. 647–668. doi: [10.14498/vsgtu1631](https://doi.org/10.14498/vsgtu1631).

### Сведения об авторах

*Владимир Павлович Радченко* <http://orcid.org/0000-0003-4168-9660>

доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: [radchenko.vp@samgtu.ru](mailto:radchenko.vp@samgtu.ru)

*Екатерина Евгеньевна Деревянка* <http://orcid.org/0000-0001-9229-6766>

магистрант; каф. прикладной математики и информатики;  
e-mail: [derevyanka.ee@samgtu.ru](mailto:derevyanka.ee@samgtu.ru)

сплава ЖС6У при различных постоянных напряжениях при температуре 650 °С, приведены численные значения параметров модели. Выполнено обобщение одноосной модели на сложное напряженное состояние.

Решение основной задачи выполнено численно с использованием дискретизации по пространственной и временной координатам. Исследовано стационарное асимптотическое напряженно-деформированное состояние стержневой системы, соответствующее стадии установившейся ползучести, которое использовалось для оценки сходимости численного метода. Получены зависимости кинетики всех компонент тензора остаточных напряжений во всех трех упрочненных элементах системы вследствие ползучести при заданной внешней нагрузке. Выполнен сравнительный анализ скорости релаксации остаточных напряжений в различных стержнях. Разработано алгоритмическое и программное обеспечение для решения поставленной задачи. Основные результаты работы иллюстрируются эпюрами распределения остаточных напряжений по глубине упрочненного слоя. Обсуждаются вопросы применения полученных в работе результатов в прикладных задачах оценки надежности упрочненных стержневых систем.

**Ключевые слова:** трехэлементная статически не определяемая система, поверхностное упрочнение, остаточные напряжения, ползучесть, релаксация напряжений.

Получение: 9 июля 2018 г. / Исправление: 14 октября 2018 г. /

Принятие: 12 ноября 2018 г. / Публикация онлайн: 29 декабря 2018 г.

---

**Введение.** Технологические методы в процессе изготовления деталей и элементов конструкции являются одним из ведущих направлений в решении проблемы повышения их ресурса. Среди этих методов наиболее востребованы такие, которые не влияют на материалоемкость изделий и не изменяют заданные геометрические параметры (например, после механической подготовки). К таким технологиям относится и поверхностное пластическое деформирование (ППД), улучшающее эксплуатационные характеристики деталей (сопротивление усталости, микротвердость, трибологические характеристики, коррозионное растрескивание и т. д.) при нормальных и умеренных температурах вследствие наведения сжимающих остаточных напряжений в тонком поверхностном слое. Так, в работах [1–9] (и многих других) установлено непосредственное положительное влияние сжимающих остаточных напряжений на характеристики сопротивления усталости поверхностно упрочненных деталей.

Однако в энергетическом машиностроении, авиадвигателестроении возникает задача целесообразности использования методов ППД для улучшения характеристик усталостной прочности, длительной прочности и т. д. при высоких температурах, что связано в первую очередь с характером процесса релаксации наведенных остаточных напряжений как в условиях термоэкспозиции (температурной выдержки без нагрузки), так и при воздействии внешних нагрузок. Большое число работ, посвященных изучению релаксации остаточных напряжений при высокотемпературном нагружении, имеет экспериментальный характер. Обзор возникающих эффектов и результатов феноменологических исследований можно найти в [10, 11]. Одна из первых попыток связать процессы релаксации остаточных напряжений с ползучестью

материала предпринята в исследованиях [12, 13]. В публикациях [14–20] приведены результаты исследований релаксации остаточных напряжений в простейших деталях (цилиндрические полые и сплошные образцы, призматические детали и др.) в условиях термоэкспозиции либо одноосного нагружения при высоких температурах, а в работах [21–23] изучалось влияние циклических нагрузок на релаксацию остаточных напряжений.

Основы систематических теоретических исследований оценки кинетики остаточных напряжений в условиях температурно-силового нагружения, базирующиеся на концепции релаксации остаточных напряжений вследствие ползучести, заложены в работе [11]. Развитие этого метода позволило решить краевые задачи о релаксации остаточных напряжений для упрочненных цилиндрических [20, 24, 25] и плоских [26] образцов при термоэкспозиции и осевом растяжении в условиях ползучести.

Целью данной работы является распространение разработанного в [11, 20, 24–26] подхода на статически не определимые системы с поверхностно упрочненными элементами на примере модельной задачи для трехэлементной стержневой конструкции.

Статья состоит из следующих разделов:

- 1) математическая модель ползучести статически не определимой стержневой системы с неупрочненными элементами;
- 2) модель реконструкции напряженно-деформированного состояния в упрочненных элементах системы;
- 3) методика расчета релаксации остаточных напряжений в упрочненных элементах стержневой системы на фоне ее ползучести;
- 4) численная реализация, выполнение модельных расчетов и анализ результатов.

**1. Математическая модель ползучести статически не определимой системы с неупрочненными элементами.** В качестве модельной задачи рассматривается несимметричная трехэлементная статически не определимая стержневая конструкция (ферма), составляющие которой моделируются сплошными цилиндрическими образцами одинакового поперечного сечения  $F = \pi a^2$  ( $a$  — радиус цилиндра), выполненными из одного материала, под действием растягивающей нагрузки  $P$  (рис. 1). В силу шарнирного закрепления узлов в элементах системы реализуется одноосное напряженное состояние. Обозначим через  $N_s$ ,  $l_s$  и  $\Delta l_s$  ( $s = 1, 2, 3$ ) реакции, возникающие в стержнях, их длины и удлинения в процессе деформирования соответственно; через  $\Delta l$  — перемещение узла  $A$  системы,  $\varphi$  — угол, который составляет вектор перемещения с осью  $OY$ ;  $\alpha$  и  $\beta$  — углы, образованные стержнями I ( $s = 1$ ) и II ( $s = 2$ ) с осью  $OY$  (стержнем III,  $s = 3$ ) (см. рис. 1). В дальнейшем задача рассматривается в рамках теории малых деформаций.

С учетом принятых обозначений уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{cases} -N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \beta = 0, \\ N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \beta + N_3 = P, \end{cases} \quad (1)$$

а уравнения совместности деформаций —

$$\Delta l = \frac{\Delta l_1}{\cos(\alpha + \varphi)} = \frac{\Delta l_2}{\cos(\beta - \varphi)} = \frac{\Delta l_3}{\cos \varphi}. \quad (2)$$

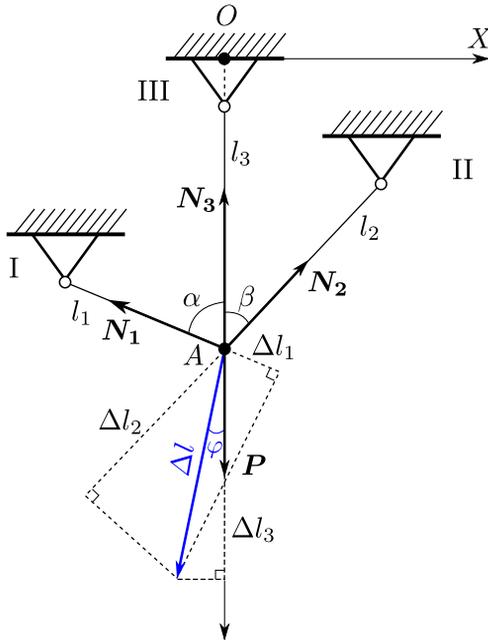


Рис. 1. Схема статически неопределимой стержневой системы  
 [Figure 1. Scheme of statically indefinable rod system]

Вводя обозначение  $P_* = P/F$ , соотношениям (1) можно придать вид

$$\begin{cases} -\sigma_1 \sin \alpha + \sigma_2 \sin \beta = 0, \\ \sigma_1 \cos \alpha + \sigma_2 \cos \beta + \sigma_3 = P_*, \end{cases}$$

где  $\sigma_s$  ( $s = 1, 2, 3$ ) — напряжения в стержнях.

Объединяя (2) и (3), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -\sigma_1 \sin \alpha + \sigma_2 \sin \beta = 0, \\ \sigma_1 \cos \alpha + \sigma_2 \cos \beta + \sigma_3 = P_*, \\ \Delta l_1 \cos(\beta - \varphi) = \Delta l_2 \cos(\alpha + \varphi), \\ \Delta l_2 \cos \varphi = \Delta l_3 \cos(\beta - \varphi) \end{cases} \quad (3)$$

относительно неизвестных  $\sigma_s$ ,  $s = 1, 2, 3$ , и  $\varphi$ .

Рассмотрим сначала решение системы (3) в упругой области относительно неизвестных  $\sigma_s^0$  ( $s = 1, 2, 3$ ) и величины  $\varphi^0$ . Принимая во внимание, что

$$\Delta l_s = \frac{\sigma_s l_s}{E}, \quad s = 1, 2, 3$$

( $E$  — модуль упругости материала), из (3) получим

$$\sigma_1^0 = \sigma_2^0 \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}, \quad (4)$$

$$\sigma_2^0 = \frac{P_* - \sigma_3^0}{\sin(\alpha + \beta)} \sin \alpha, \quad (5)$$

$$\sigma_3^0 = P_* \left( 1 + \frac{l_3 \cos(\beta - \varphi^0)}{l_2 \sin(\alpha + \beta)} \cos \varphi^0 \sin \alpha \right)^{-1}, \quad (6)$$

$$l_1 \left[ z \cos \beta + \sqrt{1 - z^2} \sin \beta \right] \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = l_2 \left[ z \cos \alpha - \sqrt{1 - z^2} \sin \alpha \right], \quad (7)$$

где введены обозначения  $z = \cos \varphi^0$ ,  $\sqrt{1 - z^2} = \sin \varphi^0$ , при этом уравнение (7) относительно  $z$  решается численно.

Таким образом, решение в упругой области находится по следующей схеме:

$$l_1, l_2, \alpha, \beta \xrightarrow{(7)} z, \cos \varphi^0 \xrightarrow{(6)} \sigma_3^0 \xrightarrow{(5)} \sigma_2^0 \xrightarrow{(4)} \sigma_1^0 \quad (8)$$

(здесь и далее стрелки означают формулы, по которым вычисляются последующие величины).

Рассмотрим теперь ползучесть стержневой системы. Представляя полную деформацию каждого из стержней в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_s(t) &= e_s(t) + p_s(t), \quad e_s(t) = \sigma_s(t)/E, \\ p_s(t) &: \sigma_s \xrightarrow{B} p_s, \quad s = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $e_s$  — упругая деформация,  $p_s$  — деформация ползучести,  $B$  — временной дифференциальный или интегральный оператор, связывающий напряжения и деформации стержня, основную систему (3) можно записать таким образом:

$$\begin{cases} -\sigma_1(t) \sin \alpha + \sigma_2(t) \sin \beta = 0, \\ \sigma_1(t) \cos \alpha + \sigma_2(t) \cos \beta + \sigma_3(t) = P_*, \\ l_1 \left[ \frac{\sigma_1(t)}{E} + p_1(t) \right] \cos(\beta - \varphi) = l_2 \left[ \frac{\sigma_2(t)}{E} + p_2(t) \right] \cos(\alpha + \varphi), \\ l_2 \left[ \frac{\sigma_2(t)}{E} + p_2(t) \right] \cos \varphi = l_3 \left[ \frac{\sigma_3(t)}{E} + p_3(t) \right] \cos(\beta - \varphi). \end{cases} \quad (10)$$

После несложных преобразований с учетом обозначений  $\cos \varphi(t) = z$ ,  $\sin \varphi(t) = \sqrt{1 - z^2}$  получим расчетные формулы для величин  $\sigma_s(t)$  и  $\varphi(t)$  в каждый момент времени:

$$\sigma_1(t) = \sigma_2(t) \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}, \quad (11)$$

$$\sigma_3(t) = P_* - \sigma_2(t) \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}, \quad (12)$$

$$\sigma_2(t) = \frac{\cos(\beta - \varphi) \left[ \frac{l_3}{E} P_* + l_3 p_3(t) \right] - l_2 p_2(t) \cos \varphi}{\frac{l_2}{E} \cos \varphi + \frac{l_3}{E} \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} \cos(\beta - \varphi)}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \left[ (z \cos \beta + \sqrt{1 - z^2} \sin \beta) \left( \frac{l_3}{E} P_* + l_3 p_3(t) \right) - l_2 p_2(t) z \right] \times \\ & \times \left[ l_1 \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} (z \cos \beta + \sqrt{1 - z^2} \sin \beta) - l_2 (z \cos \alpha - \sqrt{1 - z^2} \sin \alpha) \right] = \\ & = \left[ l_2 p_2(t) (z \cos \alpha - \sqrt{1 - z^2} \sin \alpha) - l_1 p_1(t) (z \cos \beta + \sqrt{1 - z^2} \sin \beta) \right] \times \end{aligned} \quad (14)$$

$$\times \left[ l_2 z + l_3 \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} (z \cos \beta + \sqrt{1 - z^2} \sin \beta) \right],$$

при этом сначала численно решается относительно величины  $z$  уравнение (14), а затем определяются напряжения  $\sigma_s(t)$ ,  $s = 1, 2, 3$ . Из формул (11)–(14) следует, что для их реализации необходимо знать деформации ползучести  $p_s(t)$ ,  $s = 1, 2, 3$ , которые можно определить, если известна теория ползучести для рассматриваемого материала. В дальнейшем будем рассматривать материалы, для которых характерна только первая и вторая стадия ползучести и отсутствует обратимая компонента после полной разгрузки. Конкретизацию оператора  $B$  в (9) выполним, используя вариант одноосной реологической модели Ю. П. Самарина [27], который для описания первых двух стадий имеет вид

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t) + w(t); \\ \dot{v}(t) &= \begin{cases} \lambda \left[ b_k \left( \frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right)^n - v(t) \right], & b_k \left( \frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right)^n > v(t), \\ 0, & b_k \left( \frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right)^n \leq v(t); \end{cases} \\ \dot{w}(t) &= c \left( \frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right)^m. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь  $p$  — деформация ползучести;  $v$ ,  $w$  — вязкопластическая и вязкая составляющие деформации  $p$  соответственно; точка означает дифференцирование по времени  $t$ ;  $\lambda$ ,  $b_k$ ,  $c$ ,  $n$ ,  $m$ ,  $\sigma_*$  — константы модели;  $v(0) = 0$ ,  $w(0) = 0$ .

Для численной реализации ползучести стержневой системы используется известный метод шагов по времени. Для этого производится дискретизация времени  $t$ :  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{j-1} < t_j = T$  ( $T$  — конечное время расчета). Применяя метод Эйлера к системе (15), для стержневой системы для момента времени  $t = t_{j+1}$  будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta v_s(t_j) &= \begin{cases} \lambda \left[ b_k \left( \frac{\sigma_s(t_j)}{\sigma_*} \right)^n - v_s(t_j) \right] \Delta t_j, & b_k \left( \frac{\sigma_s(t_j)}{\sigma_*} \right)^n > v_s(t_j), \\ 0, & b_k \left( \frac{\sigma_s(t_j)}{\sigma_*} \right)^n \leq v_s(t_j); \end{cases} \\ \Delta w_s(t_j) &= c \left( \frac{\sigma_s(t_j)}{\sigma_*} \right)^m \Delta t_j; \\ v_s(t_{j+1}) &= v_s(t_j) + \Delta v_s(t_j); \\ w_s(t_{j+1}) &= w_s(t_j) + \Delta w_s(t_j); \\ p_s(t_{j+1}) &= v_s(t_{j+1}) + w_s(t_{j+1}), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ ,  $s = 1, 2, 3$ .

Для реализации (16) в качестве начальных данных при  $t = 0$  ( $j = 0$ ) используется упругое решение  $\sigma_s^0$ ,  $s = 1, 2, 3$ ,  $\varphi^0$ , которое определяется по схеме (8).

Таким образом, схема расчета ползучести стержневой системы носит «циклический» характер, и ее (для фиксированного момента времени  $t$ ) можно

представить в виде

$$t \xrightarrow{(16)} p_1(t), p_2(t), p_3(t) \xrightarrow{(14)} z \longrightarrow \cos \varphi, \varphi \xrightarrow{(13)} \sigma_2(t) \xrightarrow{(12)} \sigma_3(t) \xrightarrow{(11)} \sigma_1(t).$$

Рассмотрим теперь стационарное (асимптотическое) состояние стержневой системы, соответствующее предельному при  $t \rightarrow +\infty$ . Здесь напряжения принимают фиксированные значения, соответствующие стадии установившейся ползучести, а упругими деформациями в (9) можно пренебречь. Вводя обозначения предельных (асимптотических) напряжений  $\sigma_s^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_s(t)$ ,  $s = 1, 2, 3$ , и угла  $\varphi^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t)$  и переходя в третьем и четвертом соотношениях (3) к скоростям, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -\sigma_1^* \sin \alpha + \sigma_2^* \sin \beta = 0, \\ \sigma_1^* \cos \alpha + \sigma_2^* \cos \beta + \sigma_3^* = P_*, \\ l_2 \left( \frac{\sigma_2^*}{\sigma^*} \right)^m \cos \varphi^* = l_3 \left( \frac{\sigma_3^*}{\sigma^*} \right)^m \cos (\beta - \varphi^*), \\ l_1 \left( \frac{\sigma_1^*}{\sigma^*} \right)^m \cos (\beta - \varphi^*) = l_2 \left( \frac{\sigma_2^*}{\sigma^*} \right)^m \cos (\alpha + \varphi^*). \end{cases} \quad (17)$$

Решение системы алгебраических уравнений (17) с учетом обозначений  $\cos \varphi^* = z$ ,  $\sin \varphi^* = \sqrt{1 - z^2}$  дает

$$\sigma_1^* = \sigma_2^* \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}, \quad (18)$$

$$\sigma_3^* = P_* - \sigma_2^* \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha}, \quad (19)$$

$$l_2 z \left( \frac{\sigma_2^*}{\sigma^*} \right)^m - l_3 \left( \frac{1}{\sigma^*} \left( P_* - \sigma_2^* \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha} \right) \right)^m [z \cos \beta + \sqrt{1 - z^2} \sin \beta] = 0, \quad (20)$$

$$l_1 [z \cos \beta + \sqrt{1 - z^2} \sin \beta] \left( \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \right)^m - l_2 [z \cos \alpha - \sqrt{1 - z^2} \sin \alpha] = 0, \quad (21)$$

при этом уравнение (21) относительно  $z$  и затем (20) относительно  $\sigma_2^*$  решаются численно. В соответствии с (18)–(21) схема расчета асимптотических значений  $\sigma_s^*$ ,  $s = 1, 2, 3$ , и  $\varphi^*$  имеет вид

$$l_1, l_2, l_3, \alpha, \beta \xrightarrow{(21)} z \longrightarrow \varphi^*, \cos \varphi^* \xrightarrow{(20)} \sigma_2^* \xrightarrow{(19)} \sigma_3^* \xrightarrow{(18)} \sigma_1^*.$$

Асимптотическое напряженное состояние (18)–(21), соответствующее выходу стержневой системы на стадию установившейся ползучести, использовалось в дальнейшем для проверки численного метода «шагами по времени» в предельном случае при больших значениях времени расчета.

**2. Реконструкция напряженно-деформированного состояния в поверхностно упрочненном сплошном стержне.** Как отмечено выше, метод расчета релаксации остаточных напряжений в статически неопределимой стержневой системе включает в себя этап реконструкции напряженно-

деформированного состояния (НДС) в стержнях после процедуры упрочнения. Будем предполагать, что все три стержня системы (рис. 1) упрочнены одной и той же технологией. Поэтому начальное напряженно-деформированное состояние в них будет идентичным и достаточно описать методику для одного стержня. Эта методика хорошо известна [11, 24, 25], поэтому приведем лишь окончательную расчетную схему. Согласно указанным работам, задача рассматривается в цилиндрической системе координат, через  $\sigma_\theta^{\text{res}}$ ,  $\sigma_z^{\text{res}}$  и  $\sigma_r^{\text{res}}$  обозначим окружное, осевое и радиальное остаточные напряжения, а через  $q_\theta$ ,  $q_z$  и  $q_r$  — соответственно пластические деформации после процедуры упрочнения. Тогда расчетная схема имеет следующий вид:

$$\sigma_r^{\text{res}}(r) = \frac{1}{r} \int_0^r \sigma_\theta^{\text{res}}(\xi) d\xi, \quad (22)$$

$$q_\theta(r) = \frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{E(1 + \alpha\mu)^2} r^{-\frac{2+\alpha}{1+\alpha\mu}} \int_0^r \xi^{\frac{1+\alpha-\alpha\mu}{1+\alpha\mu}} \left[ \sigma_r^{\text{res}}(\xi) + (1 + \alpha)\sigma_\theta^{\text{res}}(\xi) \right] d\xi - \frac{1 + \mu}{E(1 + \alpha\mu)} \left[ (1 - \mu)\sigma_\theta^{\text{res}}(r) - \mu\sigma_r^{\text{res}}(r) \right], \quad (23)$$

$$q_z(r) = \alpha q_\theta(r), \quad q_r = -q_\theta(1 + \alpha), \quad (24)$$

$$\varepsilon_z^0 = \frac{2}{a^2} \int_0^a \xi \left\{ q_z(\xi) - \frac{\mu}{E} \left[ \sigma_r^{\text{res}}(\xi) + \sigma_\theta^{\text{res}}(\xi) \right] \right\} d\xi, \quad (25)$$

$$\sigma_z^{\text{res}}(r) = E(\varepsilon_z^0 - q(r)) + \mu(\sigma_r^{\text{res}}(r) + \sigma_\theta^{\text{res}}(r)), \quad (26)$$

где  $\mu$  и  $E$  — упругие константы материала,  $a$  — радиус цилиндра,  $\alpha$  — параметр анизотропии упрочнения (в направлениях осей  $z$  и  $\theta$ ). Отметим, что для процедур изотропного упрочнения поверхности (гидро- и пневмодробеструйная обработка микрошариками, термопластическое упрочнение, азотирование и др.) величина  $\alpha = 1$ , а при обкатке роликом и алмазном выглаживании  $\alpha \neq 1$ . Как следует из (22)–(26), все характеристики напряженно-деформированного состояния выражаются через компоненту  $\sigma_\theta^{\text{res}} = \sigma_\theta^{\text{res}}(r)$ , поэтому для реализации расчетной методики необходимо иметь экспериментальную эпюру для окружной компоненты. Однако экспериментально распределение  $\sigma_\theta^{\text{res}} = \sigma_\theta^{\text{res}}(r)$  можно определить лишь в тонком приповерхностном слое глубиной 100–400 мкм. Для решения последующих задач ползучести необходимо иметь непрерывные поля начальных напряжений и деформаций по всей области интегрирования ( $0 \leq r \leq a$ ). Поэтому целесообразно опытные данные для  $\sigma_\theta^{\text{res}} = \sigma_\theta^{\text{res}}(r)$  аппроксимировать аналитической функцией с учетом дальнейшей ее экстраполяции на всю область изменения радиуса при соблюдении условия самоуравновешенности

$$\int_0^a \sigma_\theta^{\text{res}}(\xi) d\xi = 0.$$

Выполненный анализ экспериментальных данных [11, 24, 25] показывает, что для аппроксимации зависимости  $\sigma_\theta^{\text{res}}(r)$  можно использовать соотношение

$$\sigma_\theta^{\text{res}}(r) = \sigma_0 - \sigma_1 \exp\left(-\frac{(a - r^* - r)^2}{b^2}\right), \quad (27)$$

где  $r^*$  — значение радиуса, при котором экспериментальный график функции  $\sigma_\theta^{\text{res}}(r)$  достигает локального минимума (при  $r^* = 0$  локальный минимум достигается на поверхности при  $r = a$ );  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$  и  $b$  — параметры, методика идентификации которых подробно изложена в [11, 24, 25].

**3. Метод расчета релаксации остаточных напряжений в поверхностно упрочненных элементах статически не определимой системы.** Для решения задачи ползучести статически не определимой стержневой системы с поверхностно упрочненными элементами необходимо иметь реологическую модель при сложном напряженном состоянии, в качестве которой далее используем вариант обобщения одноосной модели (15) на случай сложного напряженного состояния, имеющего вид [27]:

$$\begin{aligned} p_{ij} &= v_{ij} + w_{ij}, \\ \dot{w}_{ij} &= \frac{3c}{2} \left( \frac{S}{\sigma^*} \right)^{m-1} \left( \frac{\sigma_{ij} - \sigma^0 \delta_{ij}/3}{\sigma^*} \right), \\ \sigma^0 &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}, \\ \dot{v}_{\nu\nu}(t) &= (1 + \mu) \beta_{\nu\nu}(t) - \mu_k (\beta_{11}(t) + \beta_{22}(t) + \beta_{33}(t)), \\ \dot{\beta}_{\nu\nu}(t) &= \begin{cases} \lambda \left[ b_k \left( \frac{S}{\sigma^*} \right)^{n-1} \frac{\sigma_{\nu\nu}}{\sigma^*} - \beta_{\nu\nu}(t) \right], & b_k \left( \frac{S}{\sigma^*} \right)^{n-1} \frac{\sigma_{\nu\nu}}{\sigma^*} > \beta_{\nu\nu}(t), \\ 0, & b_k \left( \frac{S}{\sigma^*} \right)^{n-1} \frac{\sigma_{\nu\nu}}{\sigma^*} \leq \beta_{\nu\nu}(t), \end{cases} \end{aligned} \quad (28)$$

где  $p_{ij}$  — тензор деформаций ползучести;  $w_{ij}$ ,  $v_{ij}$  — тензоры деформаций вязкого течения и вязкопластической (необратимой) компоненты  $p_{ij}$ ;  $S$  — интенсивность напряжений;  $\mu_k$  — коэффициенты Пуассона для компоненты  $v_{\nu\nu}$  (согласно [27]  $\mu_k = 0.42$ );  $c$ ,  $n$ ,  $\lambda$ ,  $b_k$ ,  $m$ ,  $\sigma^*$  — параметры, имеющие тот же смысл, что и в аппроксимации (15); компоненты  $v_{ij}$  вычисляются в главных осях, поэтому суммирование по индексу  $\nu$  в (28) не производится.

В рассматриваемом случае оси  $z$ ,  $a$ ,  $r$  являются главными, поэтому в дальнейшем в (28) для всех величин с двойными индексами  $\nu\nu$  использовались следующие обозначения:  $\nu = 1$  соответствует индексу  $z$ ,  $\nu = 2$  — индексу  $\theta$ ,  $\nu = 3$  — индексу  $r$ . Все недиагональные компоненты для тензоров  $p_{ij}$ ,  $v_{ij}$ ,  $w_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$  полагались равными нулю.

Рассмотрим теперь метод расчета ползучести стержневой системы с поверхностно упрочненными элементами. Сначала в момент времени  $t = 0 + 0$ , когда приложена нагрузка  $P$ , решается упругая задача по схеме (8) и определяются напряжения  $\sigma_s(0 + 0) = \sigma_s^0$ ,  $s = 1, 2, 3$ , в каждом стержне, которые накладываются на напряженное состояние в стержнях, сформированное после процедуры упрочнения. Тогда в упрочненных элементах системы происходит «упругий» скачок осевых напряжений:

$$\sigma_{zs}(r, 0 + 0) = \sigma_z^{\text{res}}(r) + \sigma_s^0, \quad s = 1, 2, 3, \quad (29)$$

где  $\sigma_z^{\text{res}}(r)$  — осевая компонента тензора остаточных напряжений, полученная в результате реконструкции напряженно-деформированного состояния после поверхностного упрочнения. Предполагается, что все три стержня упрочнены в идентичных условиях, поэтому зависимость  $\sigma_z^{\text{res}}(r)$  будет одинаковой во всех стержнях (так же как и  $\sigma_\theta^{\text{res}}(r)$ ,  $\sigma_r^{\text{res}}(r)$ ,  $q_\theta(r)$ ,  $q_z(r)$ ,  $q_r(r)$ ).

Вследствие изменения осевых напряжений при приложении нагрузки так же происходит «скачок» упругих деформаций:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rs}(r, 0+0) &= [\sigma_r^{\text{res}}(r) - \mu(\sigma_\theta^{\text{res}}(r) + \sigma_{zs}(r, 0+0))]/E + q_r(r), \\ \varepsilon_{\theta s}(r, 0+0) &= [\sigma_\theta^{\text{res}}(r) - \mu(\sigma_r^{\text{res}}(r) + \sigma_{zs}(r, 0+0))]/E + q_\theta(r), \\ \varepsilon_{zs}(r, 0+0) &= [\sigma_{zs}(r, 0+0) - \mu(\sigma_\theta^{\text{res}}(r) + \sigma_r^{\text{res}}(r))]/E + q_z(r),\end{aligned}\quad (30)$$

где  $s = 1, 2, 3$ . Соотношения (29) и (30) задают исходное НДС каждого из цилиндрических элементов, составляющих стержневую систему, в момент времени  $t = 0 + 0$  после ППД и нагружения цилиндров продольными растягивающими нагрузками  $\sigma_1^0, \sigma_2^0, \sigma_3^0$ , полученными согласно (8).

Методика расчета ползучести стержневой системы опирается на результаты работы [24], в которой разработан прямой метод решения задачи о релаксации остаточных напряжений в поверхностно упрочненном цилиндре, получивший дальнейшее развитие в публикациях [20, 28] на случай одноосного растяжения и комбинации растяжения с кручением. В отличие от указанных исследований в настоящей работе необходимо учитывать перераспределение напряжений  $\sigma_s(t)$ ,  $s = 1, 2, 3$ , между тремя стержнями системы. Поэтому методика работ [20, 24, 28] модифицируется с учетом отмеченного фактора. Тогда, так же как в [20, 28], задача сводится к решению дифференциального уравнения второго порядка относительно компоненты  $\sigma_{rs}(r, t)$ :

$$r^2 \frac{d^2 \sigma_{rs}(r, t)}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_{rs}(r, t)}{dr} = g_s(r, t), \quad s = 1, 2, 3,$$

где

$$\begin{aligned}g_s(r, t) &= \frac{E}{1 - \mu^2} \left[ \frac{2 + \alpha}{1 + \alpha} q_r(r) + p_{rs}(r, t) - p_{\theta s}(r, t) - \right. \\ &\quad \left. - r \left( \frac{dp_{\theta s}(r, t)}{dr} + \mu \frac{dp_{zs}(r, t)}{dr} \right) + \frac{r}{1 + \alpha} (1 + \alpha\mu) \frac{dq_r(r)}{dr} \right],\end{aligned}\quad (31)$$

решение которого имеет вид

$$\sigma_{rs}(r, t) = - \int_r^a \frac{1}{\xi^3} \left( \int_0^\xi g_s(\eta, t) \eta d\eta \right) d\xi.\quad (32)$$

Далее для каждого из  $s$  стержней ( $s = 1, 2, 3$ ) статически не определенной системы можно получить соотношения для остальных компонент тензоров напряжений и деформаций:

$$\sigma_{\theta s}(r, t) = \sigma_{rs}(r, t) + r \frac{d\sigma_{rs}(r, t)}{dr},\quad (33)$$

$$\varepsilon_{zs}^0(t) = \frac{\sigma_s(t)}{E} + p_s(t),\quad (34)$$

$$\sigma_{zs}(r, t) = [\varepsilon_{zs}^0 - q_z(r) - p_{zs}(r, t)]E + \mu[\sigma_{rs}(r, t) + \sigma_{\theta s}(r, t)],\quad (35)$$

где

$$p_s(t) = \frac{2}{a^2} \int_0^a \left[ q_z(r) + p_{zs}(r, t) - \frac{\mu}{E} (\sigma_{rs}(r, t) + \sigma_{\theta s}(r, t)) \right] r dr\quad (36)$$

— интегральная величина осевой деформации в каждом из трех стержней в момент времени  $t$ , которая используется при расчете кинетики напряжений  $\sigma_s = \sigma_s(t)$  на основании формул (10)–(14). Соотношения (31)–(35) позволяют определить кинетику остаточных напряжений в каждом упрочненном цилиндрическом элементе стержневой системы в процессе ползучести.

Таким образом, схема определения остаточных напряжений в элементах статически неопределимой системы при ползучести имеет вид

$$g_s(r, t) \xrightarrow{(32)} \sigma_{rs}(r, t) \xrightarrow{(33)} \sigma_{\theta s}(r, t) \xrightarrow{(36)} p_s(t) \xrightarrow{(10)-(14)} \sigma_s(t) \xrightarrow{(34)} \varepsilon_{zs}^0(t) \xrightarrow{(35)} \sigma_{zs}(r, t). \quad (37)$$

Отметим, что в момент времени  $t > 0$  деформации ползучести  $p_{ls}(r, t)$  рассчитываются по напряжениям  $\sigma_{ls}(r, t)$ ,  $l = r, \theta, z$ ,  $s = 1, 2, 3$ , согласно схеме сложного напряженного состояния в соответствии с выбранной теорией ползучести (28).

**4. Реализация метода и анализ результатов расчета.** Реализация схемы (37) возможна только численным методом. Для этой цели производится дискретизация по переменным  $r$  и  $t$ :  $0 = r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_{i-1} < r_i = a$ ,  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{j-1} < t_j = T$  ( $T$  — конечное время расчета) с шагами  $\Delta r_i = r_{i+1} - r_i$ ,  $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$  соответственно. Интегралы, входящие в расчетные формулы, вычисляются по квадратурным формулам; все компоненты тензоров деформаций рассчитываются либо по (16) для одноосной модели, либо для сложного напряженного состояния по соотношениям (28), которые записываются в приращениях (аналогично (16)); производные компонент тензора деформаций в (31) аппроксимируются через конечные разности.

Поскольку решение описанных задач требует большого объема вычислений, естественным образом возникает необходимость в программном обеспечении, автоматизирующем расчеты.

В настоящей работе разработан алгоритм численного расчета поставленной краевой задачи, а также создан программный комплекс, автоматизирующий следующие задачи:

- 1) определение параметров аппроксимации окружной компоненты тензора остаточных напряжений в соответствии с известными экспериментальными данными;
- 2) восстановление полной картины напряженно-деформированного состояния сплошных цилиндрических образцов после анизотропного поверхностного упрочнения по частично известной экспериментальной информации для окружной компоненты остаточных напряжений;
- 3) решение задачи ползучести статически неопределимой стержневой системы без учета НДС после упрочнения и определения кинетики напряжений во времени во всех элементах системы;
- 4) расчет релаксации остаточных напряжений в упрочненных стержнях системы при заданных значениях растягивающих напряжений  $\sigma_s = \sigma_s(t)$ ,  $s = 1, 2, 3$ .

Отметим, что решение задачи ползучести осуществляется численно известным методом «шагами по времени».

Для реализации программного комплекса использовались язык программирования Python 3.6, библиотеки научных вычислений Numpy, Scipy, Math, Pandas, Matplotlib, а также ряд численных методов.

Для модельной задачи использовалась система, длины стержней у которой  $l_1 = 500$  мм,  $l_2 = 4l_1$ ,  $l_3 = 2l_1$ , углы между стержнями  $\alpha = 60^\circ$  и  $\beta = 45^\circ$ , радиус стержней  $a = 3.76$  мм. В дальнейшем в модельных расчетах использовались экспериментальные данные для осевой компоненты  $\sigma_z^{\text{res}} = \sigma_z^{\text{res}}(r)$  для цилиндрического образца такого же радиуса  $a = 3.76$  мм из сплава марки ЖС6У<sup>1</sup> после процедуры пневмодробеструйной обработки микрошариками ( $E = 2.3 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu = 0.3$ , при температуре  $20^\circ\text{C}$ ), приведенные в работе [25] и представленные на рис. 2 (маркеры). Как уже отмечалось выше, пневмодробеструйная обработка относится к изотропным (в направлениях  $\theta$  и  $z$ ) технологиям упрочнения. Поэтому в соотношениях (24)  $\alpha = 1$  и эпюры остаточных напряжений  $\sigma_\theta^{\text{res}}$  и  $\sigma_z^{\text{res}}$  отличаются незначительно. Методика реконструкции остаточных напряжений (22)–(26) базируется на экспериментально известной зависимости для  $\sigma_\theta^{\text{res}} = \sigma_\theta^{\text{res}}(r)$  и ее аппроксимации (27), при этом анализ графика на рис. 2 свидетельствует, что в (27) величина  $r^* = 0$ .

Однако, поскольку в [25] экспериментальная кривая приведена не для компоненты  $\sigma_\theta^{\text{res}}$ , а для  $\sigma_z^{\text{res}}$ , методика идентификации параметров аппроксимации (27) несколько усложняется. С учетом близости зависимостей  $\sigma_\theta^{\text{res}} = \sigma_\theta^{\text{res}}(r)$  и  $\sigma_z^{\text{res}} = \sigma_z^{\text{res}}(r)$  начальное приближение параметров  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$ ,  $b$  в (27) определяется из экспериментальной зависимости  $\sigma_z^{\text{res}} = \sigma_z^{\text{res}}(r)$ . Далее осуществляется вариация параметров  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$  и  $b$  аппроксимации (27), для каждого набора параметров численно реализуется схема (22)–(26), определяется зависимость  $\sigma_z^{\text{res}} = \sigma_z^{\text{res}}(r)$  и вычисляется функционал среднеквадратического отклонения расчетных значений  $\sigma_z^{\text{res}}(r_k)$  от соответствующих экспериментальных значений  $\sigma_z^{\text{res}*}(r_k)$ :

$$\Delta_z(\sigma_0, \sigma_1, b) = \left( \frac{\sum_{k=1}^N [\sigma_z^{\text{res}}(r_k) - \sigma_z^{\text{res}*}(r_k)]^2}{\sum_{k=1}^N [\sigma_z^{\text{res}*}(r_k)]^2} \right)^{1/2} \quad (38)$$

( $N$  — число точек дискретизации радиуса  $r_k$  в упрочненном слое).

Расчеты осуществляются до достижения минимума функционала (38). В результате реализации схемы получены следующие значения параметров аппроксимации (27):  $\sigma_0 = 22.491$  МПа;  $\sigma_1 = -1071.865$  МПа;  $b = 0.089$  мм. Расчетные значения осевой компоненты остаточных напряжений приведены на рис. 2 сплошной линией. Отклонение расчетных значений от экспериментальных в норме (38) равно  $\Delta = 3.32\%$ . Полученные эпюры распределений остаточных напряжений  $\sigma_\theta^{\text{res}}$  и  $\sigma_z^{\text{res}}$  в совокупности с  $\sigma_r^{\text{res}}$ ,  $q_\theta(r)$ ,  $q_z(r)$  и  $q_r(r)$  являлись начальным напряженно-деформированным состоянием в задаче ползучести для всех трех стержней системы.

В задаче ползучести приведем результаты расчетов при величине растягивающей нагрузки  $P = 41\,000$  Н. В работе [25] приведены параметры реологической модели (15) для рассматриваемого сплава при температуре  $675^\circ\text{C}$ , значения которых следующие:  $\lambda = -0.21$ ;  $n = 2.564$ ;  $m = 4.509$ ;  $\sigma_* = 1$ ;  $b_k = 4.221 \cdot 10^{-11}$  МПа;  $c = 4.237 \cdot 10^{-18}$  МПа.

Приведем некоторые результаты расчетов для стержневой системы при заданной нагрузке и заданной температуре  $675^\circ\text{C}$ . На рис. 3 представлены графики изменения растягивающих напряжений  $\sigma_s = \sigma_s(t)$ ,  $s = 1, 2, 3$ , в процессе ползучести при отсутствии упрочнения, а на рис. 4 — кинетика угла

<sup>1</sup> другое обозначение — ЖС6У-ВИ; см., например, «Марочник стали и сплавов» ([http://www.splav-kharkov.com/mat\\_start.php?name\\_id=3269](http://www.splav-kharkov.com/mat_start.php?name_id=3269)).

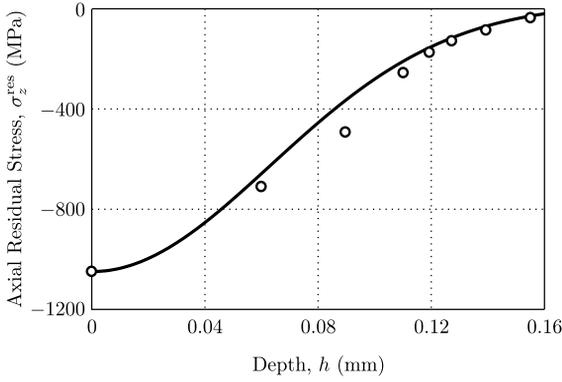


Рис. 2. Распределение осевой компоненты остаточных напряжений  $\sigma_z^{\text{res}}$  по глубине упрочненного слоя  $h = a - r$  цилиндрического образца из сплава марки ЖС6У после его упрочнения: линия — расчет, маркеры — эксперимент

[Figure 2. The distribution of the axial residual stress ( $\sigma_z^{\text{res}}$ ) over the hardened layer depth ( $h = a - r$ ) for a cylindrical specimen made of ZhS6U alloy after its hardening: line—calculated values, markers—experimental values]

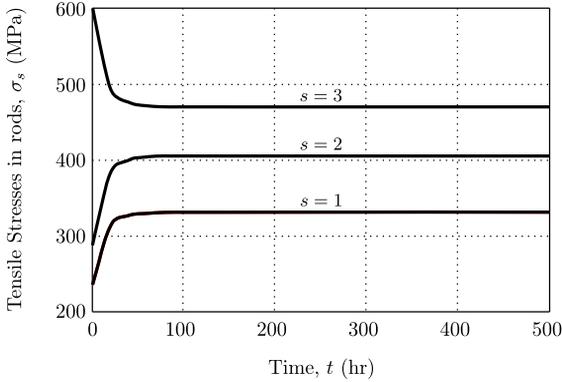


Рис. 3. Изменение растягивающих напряжений  $\sigma_s$  в боковых ( $s = 1, 2$ ) и центральном ( $s = 3$ ) стержнях из сплава ЖС6У в условиях ползучести при температуре  $675^\circ\text{C}$  и нагрузке  $P = 41\,000\text{ Н}$

[Figure 3. The tensile stresses ( $\sigma_s$ ) as a function of time in lateral ( $s = 1, 2$ ) and central ( $s = 3$ ) rods made of ZhS6U alloy under creep conditions at  $675^\circ\text{C}$  under a load of  $P = 41\,000\text{ Н}$ ]

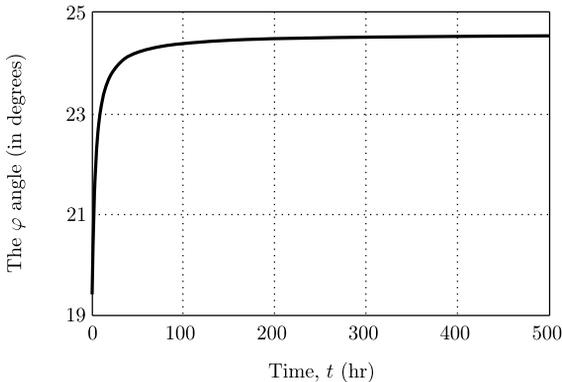


Рис. 4. Изменение угла  $\varphi$  для стержневой системы при нагрузке  $P = 41\,000\text{ Н}$

[Figure 4. The  $\varphi$  angle as a function of time for a rod system under a load of  $P = 41\,000\text{ Н}$ ]

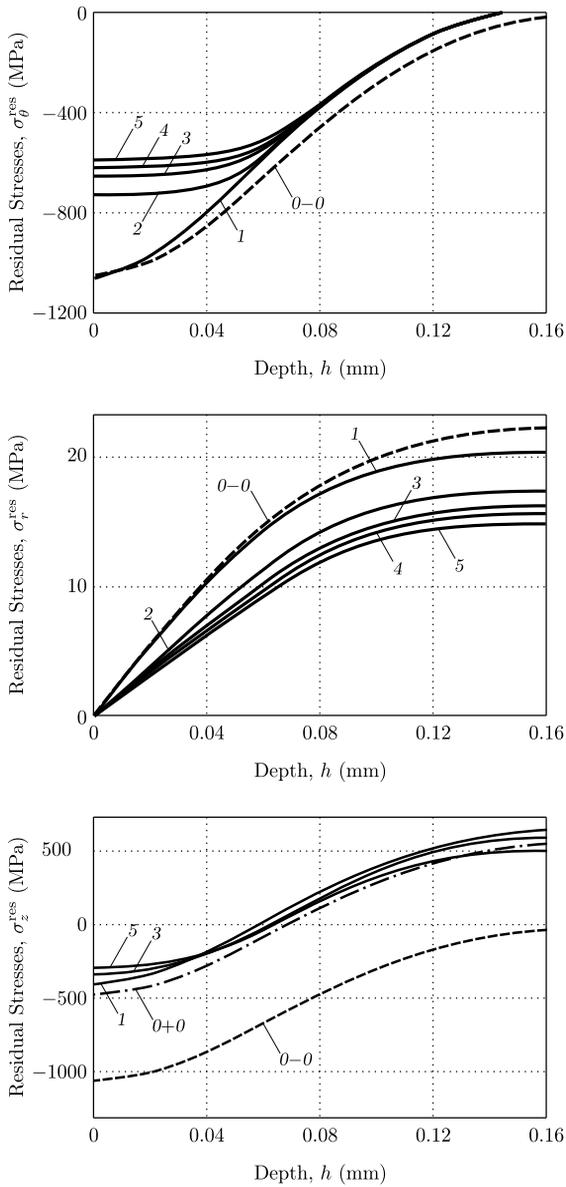


Рис. 5. Расчетные эпюры остаточных напряжений в поверхностно упрочненном слое центрального стержня ( $s = 3$ ) системы из сплава ЖС6У в условиях ползучести при температуре  $675^{\circ}\text{C}$  и нагрузке  $P = 41\,000$  Н; обозначения:  $0-0-t = 0-0$ ,  $0+0-t = 0+0$ ,  $1-t = 100$  ч,  $2-t = 200$  ч,  $3-t = 300$  ч,  $4-t = 400$  ч,  $5-t = 500$  ч

[Figure 5. Calculated residual stress-depth profiles in the surface-hardened layer of a central rod ( $s = 3$ ) of the rod system made of ZhS6U alloy under creep conditions at  $675^{\circ}\text{C}$  under a load of  $P = 41\,000$  N; labels:  $0-0-t = 0-0$ ,  $0+0-t = 0+0$ ,  $1-t = 100$  hr,  $2-t = 200$  hr,  $3-t = 300$  hr,  $4-t = 400$  hr,  $5-t = 500$  hr]

$\varphi = \varphi(t)$ . В рассматриваемом случае в момент времени  $t = 0 + 0$  (упругая область) имеем  $\sigma_1^0 = 234.99$  МПа;  $\sigma_2^0 = 287.81$  МПа;  $\sigma_3^0 = 602.11$  МПа;  $\varphi^0 = 19.39^\circ$ , в то время как асимптотические значения следующие:  $\sigma_1^* = 331.51$  МПа;  $\sigma_2^* = 406.01$  МПа;  $\sigma_3^* = 470.28$  МПа;  $\varphi^* = 24.60^\circ$ . Происходит существенное перераспределение напряжений между стержнями системы. Обратим внимание также на факт изменения не только величины вектора перемещений  $\Delta l$  узла  $A$  (см. рис. 1), но и дрейфа направления этого вектора (угла  $\varphi = \varphi(t)$ ).

Отметим, что в этой части расчетов выполнены исследования сходимости численного метода на основе «шагов по времени» с получением асимптотических значений величин  $\sigma_s^*$ ,  $s = 1, 2, 3$ ,  $\varphi^*$  на большом временном интервале и сравнением их с аналогичными значениями на основе решения (22)–(26) системы (17). Результаты практически идентичны по обоим методам.

На рис. 5 приведены результаты расчета кинетики остаточных напряжений  $\sigma_{z3}$ ,  $\sigma_{\theta 3}$  и  $\sigma_{r3}$  в процессе ползучести для наиболее нагруженного третьего стержня при такой же нагрузке  $P = 41\,000$  Н. Время  $t = 0 - 0$  соответствует ненагруженной системе ( $P = 0$ ). При времени  $t = 0 + 0$  прикладывается на-

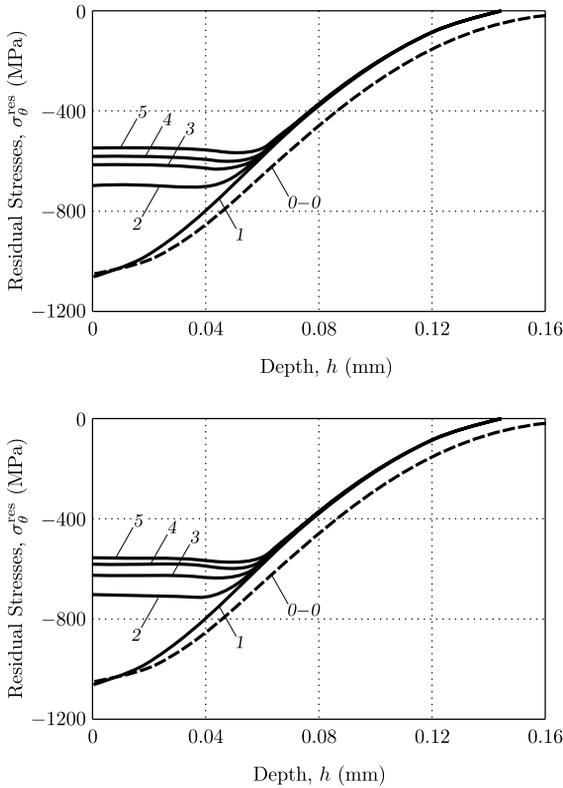


Рис. 6. Расчетные эпюры остаточных напряжений в поверхностно упрочненном слое боковых стержней ( $s = 1, 2$ ) системы из сплава ЖС6У в условиях ползучести при температуре  $675^\circ\text{C}$  и нагрузке  $P = 41\,000$  Н; обозначения:  $0-0-t = 0 - 0$ ,  $1-t = 100$  ч,  $2-t = 200$  ч,  $3-t = 300$  ч,  $4-t = 400$  ч,  $5-t = 500$  ч

[Figure 6. Calculated residual stress-depth profiles in the surface-hardened layer of lateral rods ( $s = 1, 2$ ) of the rod system made of ZhS6U alloy under creep conditions at  $675^\circ\text{C}$  under a load of  $P = 41\,000$  N; labels:  $0-0-t = 0 - 0$ ,  $1-t = 100$  hr,  $2-t = 200$  hr,  $3-t = 300$  hr,  $4-t = 400$  hr,  $5-t = 500$  hr]

грузка к системе, при этом осевая компонента испытывает «упругий скачок» на величину  $\sigma_3^0$ . На рис. 6 приведены эпюры напряжений  $\sigma_\theta = \sigma_\theta(r, t)$  для первого и второго стержня. Несмотря на одинаковое начальное напряженное состояние поверхностно упрочненных стержней, последующая релаксация окружного напряжения идет в стержнях с разной интенсивностью (см. рис. 5 (сверху) и рис. 6).

**Заключение.** В теоретическом плане в настоящей работе разработаны математическая модель и алгоритм численного расчета ползучести и релаксации остаточных напряжений в поверхностно упрочненных стержневых элементах статически не определимой системы частного вида. С точки зрения авторов статьи, принципиальных трудностей обобщения разработанного метода на более сложные стержневые системы не имеется. Рассмотрены и проанализированы основные особенности кинетики остаточных напряжений в элементах системы.

Практическая значимость настоящей работы состоит в разработке метода решения краевых задач механики упрочненных статически не определимых стержневых систем с начальным НДС в условиях ползучести. Разработанная методика, реализованная в виде программного комплекса, позволяет решить задачу оценки надежности и прочности упрочненных стержневых конструкций, которая может быть использована в прикладных задачах во многих промышленных комплексах: машиностроительном, нефтехимическом, энергетическом, аэрокосмическом и др. Полученные результаты работы позволяют обосновывать с научной точки зрения прогноз времени службы (ресурс) упрочненных элементов стержневых систем при ползучести по параметрическим критериям «отказа» (величине остаточных напряжений и времени достижения этой величины).

Отметим, что стержневые конструкции являются распространенным элементом конструкции многих технических объектов (различного рода кронштейны, стойки шасси самолетов и т. д.), при этом в качестве металла для их изготовления часто используются легкие алюминиевые, титановые (и др.) сплавы, которые обладают ползучестью даже при нормальной («комнатной») температуре. И если изготовление такого рода деталей сопровождается финишной операцией поверхностного упрочнения, то проблема оценки устойчивости наведенных остаточных напряжений к рабочим нагрузкам занимает одно из ключевых мест в оценке надежности изделий.

**Конкурирующие интересы.** Мы заявляем, что у нас нет конфликта интересов в авторстве и публикации этой статьи.

**Авторский вклад и ответственность.** Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

**Финансирование.** Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00249\_a).

## Библиографический список

1. Altenberger I., Nalla R. K., Sano Y., et. al. On the effect of deep-rolling and laser-peening on the stress-controlled low- and high-cycle fatigue behavior of Ti-6Al-4V at elevated temperatures up to 550 °C // *Intern. J. Fatigue*, 2012. vol.44. pp. 292–302.

- doi: [10.1016/j.ijfatigue.2012.03.008](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2012.03.008).
2. Dai K., Shaw L. Analysis of fatigue resistance improvements via surface severe plastic deformation // *Intern. J. Fatigue*, 2008. vol. 30, no. 8. pp. 1398–1408. doi: [10.1016/j.ijfatigue.2007.10.010](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2007.10.010).
  3. James M. N., Hughes D. J., Chen Z., et al. Residual stresses and fatigue performance // *Engng. Failure Anal.*, 2007. vol. 14, no. 2. pp. 384–395. doi: [10.1016/j.engfailanal.2006.02.011](https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2006.02.011).
  4. Majzoobi G. H., Azadikhah K., Nemati J. The effects of deep rolling and shot peening on fretting fatigue resistance of Aluminum-7075-T6 // *Mater. Sci. Engng: A*, 2009. vol. 516, no. 1/2. pp. 235–247. doi: [10.1016/j.msea.2009.03.020](https://doi.org/10.1016/j.msea.2009.03.020).
  5. McClung R. C. A literature survey on the stability and significance of residual stresses during fatigue // *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.*, 2007. vol. 30, no. 3. pp. 173–205. doi: [10.1111/j.1460-2695.2007.01102.x](https://doi.org/10.1111/j.1460-2695.2007.01102.x).
  6. Soady K. A. Life assessment methodologies incorporating shot peening process effects: mechanistic consideration of residual stresses and strain hardening. 1. Effect of shot peening on fatigue resistance // *Mater. Sci. Technol.*, 2013. vol. 29, no. 6. pp. 637–651. doi: [10.1179/1743284713Y.0000000222](https://doi.org/10.1179/1743284713Y.0000000222).
  7. Terres M., Laalai N., Sidhom H. Effect of nitriding and shot-peening on the fatigue behavior of 42CrMo4 steel: Experimental analysis and predictive approach // *Mater. Design.*, 2013. vol. 35, no. 6. pp. 741–748. doi: [10.1016/j.matdes.2011.09.055](https://doi.org/10.1016/j.matdes.2011.09.055).
  8. Павлов В. Ф., Кирпичев В. А., Вакулюк В. С. *Прогнозирование сопротивления усталости поверхностно упрочненных деталей по остаточным напряжениям*. Самара: Сам. научн. центр РАН, 2012. 125 с.
  9. Ножницкий Ю. А., Фишгойт А. В., Ткаченко Р. И., Теплова С. В. Разработка и применение новых методов упрочнения деталей ГТД, основанных на пластическом деформировании поверхностных слоев (обзор) // *Вестн. двигателестроения*, 2006. № 2. С. 8–16.
  10. Кравченко Б. А., Круцило В. Г., Гутман Г. Н. *Термопластическое упрочнение — резерв повышения прочности и надежности деталей машин*. Самара: СамГТУ, 2000. 216 с.
  11. Радченко В. П., Саушкин М. Н. *Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях*. М.: Машиностроение-1, 2005. 226 с.
  12. Цейтлин В. И., Колотникова О. В. Релаксация остаточных напряжений в деталях турбины ГТД в процессе эксплуатации // *Пробл. прочности*, 1980. Т. 12, № 8. С. 46–48.
  13. Колотникова О. В. Эффективность упрочнения методами поверхностного пластического деформирования деталей, работающих при повышенных температурах // *Пробл. прочности*, 1983. Т. 15, № 2. С. 112–114.
  14. Buchanan D. J., John R. Relaxation of shot-peened residual stresses under creep loading // *Scripta Materialia*, 2008. vol. 59, no. 3. pp. 286–289. doi: [10.1016/j.scriptamat.2008.03.021](https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2008.03.021).
  15. Xie L., Jiang C., Ji V. Thermal relaxation of residual stresses in shot peened surface layer of (TiB + TiC)/Ti-6Al-4V composite at elevated temperatures // *Mater. Sci. Engng: A*, 2011. vol. 528, no. 21. pp. 6478–6489. doi: [10.1016/j.msea.2011.04.075](https://doi.org/10.1016/j.msea.2011.04.075).
  16. Foss B. J., Gray S., Hardy M. C., et al. Analysis of shot-peening and residual stress relaxation in the nickel-based superalloy RR1000 // *Acta Materialia*, 2013. vol. 61, no. 7. pp. 2548–2559. doi: [10.1016/j.actamat.2013.01.031](https://doi.org/10.1016/j.actamat.2013.01.031).
  17. Захарова Т. П., Розанов М. А., Теплова С. В. Влияние условий эксплуатации на релаксацию остаточных напряжений сжатия в наклепанных пазах хвостовиков лопаток ТВД из жаропрочных монокристаллических никелевых сплавов // *Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета*, 2015. Т. 19, № 3 (69). С. 21–27.
  18. Hoffmann J., Scholtes B., Vöhringer O., Macherauch E. Thermal relaxation of shot peening residual stresses in the differently heat treated plain carbon steel Ck 45 / *Proc. of the 3rd International Conference on Shot Peening (ICSP3)*. Oberursel: DGM Informationsgesellschaft Verlag, 1987. pp. 239–246.

19. Khadraoui M., Cao W., Castex L., Guédou J. Y. Experimental investigations and modelling of relaxation behaviour of shot peening residual stresses at high temperature for nickel base superalloys // *Materials Science and Technology*, 1997. vol. 13, no. 4. pp. 360–367. doi: [10.1179/026708397790302359](https://doi.org/10.1179/026708397790302359).
20. Радченко В. П., Кочеров Е. П., Саушкин М. Н., Смыслов В. А. Экспериментальное и теоретическое исследование влияния растягивающей нагрузки на релаксацию остаточных напряжений в упрочненном цилиндрическом образце в условиях ползучести // *ПМТФ*, 2015. Т. 56, № 2. С. 169–177. doi: [10.15372/PMTF20150217](https://doi.org/10.15372/PMTF20150217).
21. Evans A., Kim S-B., Shackleton J. et al. Relaxation of residual stress in shot peened Udimet 720Li under high temperature isothermal fatigue // *Int. J. Fatigue*, 2005. vol. 27, no. 10-12. pp. 1530–1534. doi: [10.1016/j.ijfatigue.2005.07.027](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2005.07.027).
22. Benedetti M., Fontanari V., Scardi P. et al. Reverse bending fatigue of shot peened 7075-T651 aluminium alloy: The role of residual stress relaxation // *Int. J. Fatigue*, 2009. vol. 31, no. 8. pp. 1225–1236. doi: [10.1016/j.ijfatigue.2008.11.017](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2008.11.017).
23. Kim J.-C., Cheong S.-K., Noguchi H. Residual stress relaxation and low- and high-cycle fatigue behavior of shot-peened medium-carbon steel // *Int. J. Fatigue*, 2013. vol. 56. pp. 114–122. doi: [10.1016/j.ijfatigue.2013.07.001](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2013.07.001).
24. Радченко В. П., Саушкин М. Н. Прямой метод решения краевой задачи релаксации остаточных напряжений в упрочненном изделии цилиндрической формы при ползучести // *ПМТФ*, 2009. Т. 50, № 6. С. 90–99.
25. Радченко В. П., Саушкин М. Н., Цветков В. В. Влияние термоэкспозиции на релаксацию остаточных напряжений в упрочненном цилиндрическом образце в условиях ползучести // *ПМТФ*, 2016. Т. 57, № 3. С. 196–207. doi: [10.15372/PMTF20160320](https://doi.org/10.15372/PMTF20160320).
26. Радченко В. П., Саушкин М. Н., Бочкова Т. И. Математическое моделирование формирования и релаксации остаточных напряжений в плоских образцах из сплава ЭП742 после ультразвукового упрочнения в условиях высокотемпературной ползучести // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2016. № 1. С. 93–112. doi: [10.15593/perm.mech/2016.1.07](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.1.07).
27. Самарин Ю. П. *Уравнения состояния материалов со сложными реологическими свойствами*. Куйбышев: Куйб. гос. ун-т, 1979. 84 с.
28. Радченко В. П., Цветков В. В. Напряженно-деформированное состояние цилиндрического образца из сплава Д16Т в условиях осевого растяжения и кручения при ползучести // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. № 3(32). С. 77–86. doi: [10.14498/vsgtu1277](https://doi.org/10.14498/vsgtu1277).

MSC: 74A10, 74D10, 74K10

## Mathematical modeling of creep and residual stresses relaxation in surface hardened elements of statically indefinable rod systems

*V. P. Radchenko, E. E. Derevyanka*

Samara State Technical University,

244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

### Abstract

We propose a method for modeling stress-strain state in surface-hardened elements of statically indefinable rod systems under creep. A method we propose is considered for a three-element asymmetric rod system. The solution consists of two steps: reconstruction of the stress-strain state after the procedure of surface plastic hardening of the cylindrical elements of the system (pneumatic blasting with micro balls) and the method for calculating the relaxation of residual stresses in the hardened elements amidst the creep state of rod system (as a whole structure). Rheological relations are determined on the basis of a model describing the first and second phases of creep.

The solution of both stages and special aspects of the problem is illustrated on a model example of creep of systems with hardened elements made of ZhS6U alloy at the temperature of 650 °C. For hardening the rods of this alloy, real experimental data were used for axial and circumferential residual stresses. The technique of reconstruction of the stress-strain state after pneumatic blasting treatment is illustrated in detail. To build a rheological model, experimental data were used for the uniaxial creep curves of the ZhS6U alloy under various constant stresses at the temperature of 650 °C. The numerical values of the model parameters are given in the article. The uniaxial model is generalized to a complex stress state.

The main problem is solved numerically using discretization by spatial and temporal coordinates. The stationary asymptotic stress-strain state of the rod system is investigated, which corresponds to the steady-state creep stage, which was used to estimate the convergence of the numerical method. The dependencies of the kinetics of all components of the residual stress tensor in all three strengthened elements of the system due to creep

### Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

#### Please cite this article in press as:

Radchenko V. P., Derevyanka E. E. Mathematical modeling of creep and residual stresses relaxation in surface hardened elements of statically indefinable rod systems, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 4, pp. 647–668. doi: [10.14498/vsgtu1631](https://doi.org/10.14498/vsgtu1631) (In Russian).

#### Authors' Details:

*Vladimir P. Radchenko*  <http://orcid.org/0000-0003-4168-9660>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Department; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: [radchenko.vp@samgtu.ru](mailto:radchenko.vp@samgtu.ru)

*Ekaterina E. Derevyanka*  <http://orcid.org/0000-0001-9229-6766>

Master Student; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: [derevyanka.ee@samgtu.ru](mailto:derevyanka.ee@samgtu.ru)

under a given external load are obtained. A comparative analysis of the residual stress relaxation rate in different rods is performed. The algorithm and software for solving the problem is developed. The main results of the work are illustrated by the residual stresses graphs over the depth of the hardened layer. Issues of applying the results obtained in the work to practical problems of assessing the reliability of hardened rod systems are discussed.

**Keywords:** three-element statically indefinable system, surface-hardening, residual stresses, creep, stress relaxation.

Received: 9<sup>th</sup> July, 2018 / Revised: 14<sup>th</sup> October, 2018 /

Accepted: 12<sup>th</sup> November, 2018 / First online: 29<sup>th</sup> December, 2018

**Competing interests.** We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

**Authors' contributions and responsibilities.** Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

**Funding.** This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00249\_a).

## References

1. Altenberger I., Nalla R. K., Sano Y., et. al. On the effect of deep-rolling and laser-peening on the stress-controlled low- and high-cycle fatigue behavior of Ti-6Al-4V at elevated temperatures up to 550 °C, *Intern. J. Fatigue*, 2012, vol. 44, pp. 292-302. doi: [10.1016/j.ijfatigue.2012.03.008](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2012.03.008).
2. Dai K., Shaw L. Analysis of fatigue resistance improvements via surface severe plastic deformation, *Intern. J. Fatigue*, 2008, vol. 30, no. 8, pp. 1398-1408. doi: [10.1016/j.ijfatigue.2007.10.010](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2007.10.010).
3. James M. N., Hughes D. J., Chen Z., et al. Residual stresses and fatigue performance, *Engng. Failure Anal.*, 2007, vol. 14, no. 2, pp. 384-395. doi: [10.1016/j.engfailanal.2006.02.011](https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2006.02.011).
4. Majzooobi G. H., Azadikhah K., Nemati J. The effects of deep rolling and shot peening on fretting fatigue resistance of Aluminum-7075-T6, *Mater. Sci. Engng: A*, 2009, vol. 516, no. 1/2, pp. 235-247. doi: [10.1016/j.msea.2009.03.020](https://doi.org/10.1016/j.msea.2009.03.020).
5. McClung R. C. A literature survey on the stability and significance of residual stresses during fatigue, *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.*, 2007, vol. 30, no. 3, pp. 173-205. doi: [10.1111/j.1460-2695.2007.01102.x](https://doi.org/10.1111/j.1460-2695.2007.01102.x).
6. Soady K. A. Life assessment methodologies incorporating shot peening process effects: mechanistic consideration of residual stresses and strain hardening. 1. Effect of shot peening on fatigue resistance, *Mater. Sci. Technol.*, 2013, vol. 29, no. 6, pp. 637-651. doi: [10.1179/1743284713Y.0000000222](https://doi.org/10.1179/1743284713Y.0000000222).
7. Terres M., Laalai N., Sidhom H. Effect of nitriding and shot-peening on the fatigue behavior of 42CrMo4 steel: Experimental analysis and predictive approach, *Mater. Design.*, 2013, vol. 35, no. 6, pp. 741-748. doi: [10.1016/j.matdes.2011.09.055](https://doi.org/10.1016/j.matdes.2011.09.055).
8. Pavlov V. F., Kirpichev V. A., Vakuliuk V. S. *Prognozirovanie soprotivleniia ustalosti poverkhnostno uprochnennykh detalei po ostatochnym napriazheniim* [Prediction of fatigue resistance of surfacehardened parts by residual stresses]. Samara, Samara Scientific Center of RAS, 2012, 125 pp. (In Russian)
9. Nozhnitskii Yu. A., Fishgoit A. V., Tkachenko R. I., Teplova S. V. Development and application of new methods for hardening GTE parts based on plastic deformation of surface layers (Review), *Vestnik dvigatelestroeniia*, 2006, no. 2, pp. 8-16 (In Russian).

10. Kravchenko B. A., Krucilo V. G., Gutman G. N. *Termoplasticheskoe uprochnenie – rezerv povysheniya prochnosti i nadezhnosti detalei mashin* [Thermoplastic Hardening as a Reserve Increase of Strength and Reliability of Machine Parts]. Samara, Samara State Technical Univ., 2000, 216 pp. (In Russian)
11. Radchenko V. P., Saushkin M. N. *Polzuchest' i relaksatsiia ostatochnykh napriazhenii v uprochnennykh konstruktssiakh* [Creep and Relaxation of Residual Stresses in Hardened Structures]. Moscow, Mashinostroenie-1, 2005, 226 pp. (In Russian)
12. Tseitlin V. I., Kolotnikova O. V. Relaxation of residual stresses in gas-turbine engine parts, *Strength of Materials*, 1980, vol. 12, no. 8, pp. 982–984. doi: [10.1007/BF00770521](https://doi.org/10.1007/BF00770521).
13. Kolotnikova O. V. Effectiveness of hardening by methods of plastic surface deformation of components operating at high temperatures, *Strength of Materials*, 1983, vol. 15, no. 2, pp. 292–295. doi: [10.1007/BF01523487](https://doi.org/10.1007/BF01523487).
14. Buchanan D. J., John R. Relaxation of shot-peened residual stresses under creep loading, *Scripta Materialia*, 2008, vol. 59, no. 3, pp. 286–289. doi: [10.1016/j.scriptamat.2008.03.021](https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2008.03.021).
15. Xie L., Jiang C., Ji V. Thermal relaxation of residual stresses in shot peened surface layer of (TiB + TiC)/Ti-6Al-4V composite at elevated temperatures, *Mater. Sci. Engng: A*, 2011, vol. 528, no. 21, pp. 6478–6489. doi: [10.1016/j.msea.2011.04.075](https://doi.org/10.1016/j.msea.2011.04.075).
16. Foss B. J., Gray S., Hardy M. C., et al. Analysis of shot-peening and residual stress relaxation in the nickel-based superalloy RR1000, *Acta Materialia*, 2013, vol. 61, no. 7, pp. 2548–2559. doi: [10.1016/j.actamat.2013.01.031](https://doi.org/10.1016/j.actamat.2013.01.031).
17. Zaharova T. P., Rozanov M. A., Teplova S. V. Influence of operation conditions at the residual stress relaxation in turbine root slots of HPT, made of monocrystal nickel super alloys, *Vestnik UGATU*, 2015, vol. 19, no. 3 (69), pp. 21–27 (In Russian).
18. Hoffmann J., Scholtes B., Vöhringer O., Macherauch E. Thermal relaxation of shot peening residual stresses in the differently heat treated plain carbon steel Ck 45, In: *Proc. of the 3rd International Conference on Shot Peening (ICSP3)*. Oberursel, DGM Informationsgesellschaft Verlag, 1987, pp. 239–246.
19. Khadraoui M., Cao W., Castex L., Guédou J. Y. Experimental investigations and modelling of relaxation behaviour of shot peening residual stresses at high temperature for nickel base superalloys, *Materials Science and Technology*, 1997, vol. 13, no. 4, pp. 360–367. doi: [10.1179/026708397790302359](https://doi.org/10.1179/026708397790302359).
20. Radchenko V. P., Kocherov E. P., Saushkin M. N., Smyslov V. A. Experimental and theoretical studies of the influence of a tensile load on the relaxation of residual stresses in a hardened cylindrical specimen under creep conditions, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2015, vol. 56, no. 2, pp. 169–177. doi: [10.1134/S0021894415020170](https://doi.org/10.1134/S0021894415020170).
21. Evans A., Kim S-B., Shackleton J. et al. Relaxation of residual stress in shot peened Udimet 720Li under high temperature isothermal fatigue, *Int. J. Fatigue*, 2005, vol. 27, no. 10-12, pp. 1530–1534. doi: [10.1016/j.ijfatigue.2005.07.027](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2005.07.027).
22. Benedetti M., Fontanari V., Scardi P. et al. Reverse bending fatigue of shot peened 7075-T651 aluminium alloy: The role of residual stress relaxation, *Int. J. Fatigue*, 2009, vol. 31, no. 8, pp. 1225–1236. doi: [10.1016/j.ijfatigue.2008.11.017](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2008.11.017).
23. Kim J.-C., Cheong S.-K., Noguchi H. Residual stress relaxation and low- and high-cycle fatigue behavior of shot-peened medium-carbon steel, *Int. J. Fatigue*, 2013, vol. 56, pp. 114–122. doi: [10.1016/j.ijfatigue.2013.07.001](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2013.07.001).
24. Radchenko V. P., Saushkin M. N. Direct method of solving the boundary-value problem of relaxation of residual stresses in a hardened cylindrical specimen under creep conditions, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2009, vol. 50, no. 6, pp. 989–997. doi: [10.1007/s10808-009-0133-8](https://doi.org/10.1007/s10808-009-0133-8).
25. Radchenko V. P., Saushkin M. N., Tsvetkov V. V. Effect of thermal exposure on the residual stress relaxation in a hardened cylindrical sample under creep conditions, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2016, vol. 57, no. 3, pp. 559–568. doi: [10.1134/S0021894416030202](https://doi.org/10.1134/S0021894416030202).

26. Radchenko V. P., Saushkin M. N., Bochkova T. I. A mathematical modeling and experimental study of forming and relaxation of the residual stresses in plane samples made of EP742 alloy after the ultrasonic hardening under the high-temperature creep conditions, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2016, no. 1, pp. 93–112 (In Russian). doi: [10.15593/perm.mech/2016.1.07](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.1.07).
27. Samarin Yu. P. *Uravneniia sostoyaniia materialov so slozhnymi reologicheskimi svoistvami* [Equations of State of Materials with Complex Rheological Properties]. Kuibyshev, Kuibyshev State Univ., 1979, 84 pp. (In Russian)
28. Radchenko V. P., Tsvetkov V. V. The stress-strain state of cylindrical sample from alloy D16T under axial tension and torsion creep, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2013, no. 3(32), pp. 77–86 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu1277](https://doi.org/10.14498/vsgtu1277).