Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22, № 4. С. 702–713
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) http://doi.org/10.14498/vsgtu1607

УДК 519.872

Среднее время ожидания в системе массового обслуживания $H_2/H_2/1$ с запаздыванием

В. Н. Тарасов, Э. Г. Ахметшина

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Россия, 443010, Самара, ул. Л. Толстого, 23.

Аннотация

В теории массового обслуживания исследование систем $G/G/1$ актуально в связи с тем, что до сих пор не существует решения в конечном виде в общем случае. Здесь G по символике Кендалла означает произвольный закон распределения интервалов между требованиями входного потока и времени обслуживания.

В статье рассматривается задача определения характеристик системы массового обслуживания $H_2/H_2/1$ с запаздыванием типа $G/G/1$ с гиперэкспоненциальными распределениями второго порядка с использованием классического метода спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли.

В качестве входных распределений для рассматриваемой системы выбраны вероятностные смеси сдвинутых вправо от нулевой точки экспоненциальных распределений, т.е. гиперэкспоненциальные распределения H_2. Для таких законов распределений метод спектрального разложения позволяет получить решение в замкнутой форме. Показано, что в такой системе с запаздыванием среднее время ожидания требований в очереди меньше, чем в обычной системе. Это связано с тем, что операция сдвига во времени уменьшает величину коэффициентов вариаций интервалов между поступлениями и времени обслуживания, а, как известно из теории массового обслуживания, среднее время ожидания требований связано с этими коэффициентами вариаций квадратичной зависимостью. Система массового обслуживания $H_2/H_2/1$ с запаздыванием вполне может использоваться в качестве математической модели современного телетрафика.

Ключевые слова: система с запаздыванием, система массового обслуживания $H_2/H_2/1$, преобразование Лапласа, среднее время ожидания в очереди.

Получение: 15 февраля 2018 г. / Исправление: 7 октября 2018 г. / Принятие: 12 ноября 2018 г. / Публикация онлайн: 29 декабря 2018 г.

Научная статья

Образец для цитирования

Тарасов В. Н., Ахметшина Э. Г. Среднее время ожидания в системе массового обслуживания $H_2/H_2/1$ с запаздыванием // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 4. С. 702–713. doi: 10.14498/vsgtu1607.

Сведения об авторах

Вениамин Николаевич Тарасов http://orcid.org/0000-0002-9318-0797
доктор технических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. программного обеспечения и управления в технических системах; e-mail: veniamin_tarasov@mail.ru

Элеонора Газинуровна Ахметшина; ассистент; каф. программного обеспечения и управления в технических системах; e-mail: elyamalusha@mail.ru

Введение. В работе [1] впервые приведены результаты по исследованию для системы $M/M/1$ с запаздыванием во времени со смещенными экспоненциальными входными распределениями. Основной характеристикой систем массового обслуживания (СМО), как известно, является среднее время ожидания требования в очереди, а все остальные — производные от него. Среднее время ожидания требования в очереди в такой системе меньше, чем в классической системе $M/M/1$ при одинаковом коэффициенте загрузки за счет того, что коэффициенты вариации времен поступления c_λ и c_μ обслуживания меньше единицы при параметре запаздывания $t_0 > 0$. Таким образом, в данном случае мы имеем немарковскую модель массового обслуживания из класса $G/G/1$. В научной литературе, включая web-ресурсы, до опубликования работы [1] не изучались СМО с предложенным определением «запаздывания». Однако смещенное экспоненциальное распределение активно применяется в других областях, например, в теории надежности, в статистике и т. д. В работе [2] отмечено, что «в теории надежности смещенное экспоненциальное распределение интерпретируют как наличие «гарантийного» срока $t_0 > 0$, в течение которого отказ произойти не может». Также это распределение используется в универсальном пакете имитационного моделирования `GPSS World` [3]. Тем самым настоящая работа расширяет область применения смещенного экспоненциального распределения за счет систем массового обслуживания. В работе [4] приведен пример системы с запаздыванием, а также ее описание и математическая трактовка с несколькими типами запаздывания во времени. Такую систему вполне можно свести к СМО с запаздыванием.

В работе [1] впервые рассмотрена СМО, образованная двумя потоками, определяемыми функциями вида

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\gamma(t-t_0)}, & t \geqslant t_0,\ \gamma > 0; \\ 0, & 0 \leqslant t < t_0, \end{cases}$$

где потоки имеют одинаковое время запаздывания $t_0 > 0$. СМО с такими входными распределениями обозначим через $M^-/M^-/1$. Результаты работы [1] позволяют развить теорию метода спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли (ИУЛ) на смеси сдвинутых вправо от нулевой точки экспоненциальных распределений, т. е. на сдвинутое гиперэкспоненциальное распределение. Это возможно благодаря некоторым свойствам преобразования Лапласа плотности гиперэкспоненциального распределения. Напомним, что распределение с плотностью

$$f(t) = \sum_{i=1}^{R} \alpha_i \gamma_i e^{-\gamma_i t},$$

где $t > 0$, $\sum_{i=1}^{R} \alpha_i = 1$, называют гиперэкспоненциальным (гиперпоказательным) и обозначают H_R [5]. Использование этого распределения при $R > 2$ затруднительно из-за трудоемких вычислений. В этой же работе доказано, что коэффициент вариации c случайной величины, распределенной по такому закону, удовлетворяет неравенству $c \geqslant 1$.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача определения среднего времени ожидания для СМО, образованной двумя сдвинутыми гиперэкспоненциальными распределениями второго порядка H_2. С помощью использования классического метода спектрального разложения решения ИУЛ требуется оценить, как операция сдвига во времени скажется на характеристиках новой системы, и чем эта внешне схожая с СМО $H_2/H_2/1$ система будет от нее отличаться.

Метод спектрального разложения решения ИУЛ составляет важную часть теории систем $G/G/1$. Для записи ИУЛ введем следующие обозначения:

– $W(y)$ — функция распределения вероятностей (ФРВ) времени ожидания требования в очереди,
– $C(u) = P(\tilde{u} < u)$ — ФРВ случайной величины $\tilde{u} = \tilde{x} - \tilde{t}$, где $\tilde{x}$ — случайное время обслуживания требования, $\tilde{t}$ — случайная величина — интервал времени между поступлениями требований.

Тогда одна из форм уравнения Линдли выглядит так:

$$W(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{y} W(y-u)dC(u), & y \geqslant 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

При кратком изложении метода решения ИУЛ будем придерживаться подхода и символики автора [5]. Для этого через $A^*(s)$ и $B^*(s)$ обозначим преобразования Лапласа функций плотности распределения интервалов между поступлениями и времени обслуживания соответственно. Суть решения ИУЛ методом спектрального разложения состоит в нахождении для выражения $A^*(-s)B^*(s) - 1$ представления в виде произведения двух множителей, которое давало бы рациональную функцию от s. Следовательно, для нахождения закона распределения времени ожидания необходимо следующее спектральное разложение:

$$A^*(-s)B^*(s) - 1 = \psi_+(s)/\psi_-(s),$$

где $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ — некоторые рациональные функции от s. Функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$, согласно [5], должны удовлетворять следующим условиям:

1) для $\mathrm{Re}(s) > 0$ функция $\psi_+(s)$ является аналитической без нулей в этой полуплоскости;
2) для $\mathrm{Re}(s) < D$ функция $\psi_-(s)$ является аналитической без нулей в этой полуплоскости, где D — некоторая положительная константа, определяемая из условия (1)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{a(t)}{e^{-Dt}} < \infty.$$

Кроме того, функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ должны обладать следующими свойствами:

$$\lim_{\substack{|s|\to\infty \\ \mathrm{Re}(s)>0}} \frac{\psi_+(s)}{s} = 1, \qquad \lim_{\substack{|s|\to\infty \\ \mathrm{Re}(s)<D}} \frac{\psi_-(s)}{s} = -1. \tag{2}$$

Построение функций $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ с учетом условий (1) и (2) для обычной системы $H_2/H_2/1$ подробно продемонстрировано в работе [6]. Там же найдено полученное решение для среднего времени ожидания в очереди для указанной системы. Таким образом, в основу данной статьи положены две работы автора [1,6], а также классика теории массового обслуживания [5].

Примечание. Другой подход к решению уравнения Линдли использован в [7]. Здесь вместо термина «спектральное разложение» использована факторизация, а вместо функций $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ — компоненты факторизации $\omega_+(z,t)$ и $\omega_-(z,t)$ функции $1 - z\chi(t)$, где $\chi(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ с произвольной функцией распределения $C(t)$, а z — любое число из интервала $(-1,1)$. Такой подход для получения конечного результата для систем $H_2/H_2/1$ менее удобен, чем подход, описанный в [5] и проиллюстрированный многочисленными примерами.

Теперь перейдем к изложению результатов по системе с запаздыванием.

2. Система $H_2/H_2/1$ с запаздыванием. Рассмотрим СМО, на вход которой поступают требования, случайные интервалы между которыми распределены по закону

$$a(t) = \begin{cases} p\lambda_1 e^{-\lambda_1(t-t_0)} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2(t-t_0)}, & t \geqslant t_0, \\ 0, & 0 \leqslant t < t_0. \end{cases} \tag{3}$$

Аналогично распределено и время обслуживания:

$$b(t) = \begin{cases} q\mu_1 e^{-\mu_1(t-t_0)} + (1-q)\mu_2 e^{-\mu_2(t-t_0)}, & t \geqslant t_0, \\ 0, & 0 \leqslant t < t_0. \end{cases} \tag{4}$$

В выражениях (3) и (4) вероятности $p, q \in [0,1]$; λ_1, λ_2, μ_1, $\mu_2 > 0$. Систему $H_2/H_2/1$ с запаздыванием в отличие от обычной системы обозначим через $H_2^-/H_2^-/1$. Функции плотности (3) и (4) являются сдвинутыми вправо от нулевой точки на величину t_0 смесями экспоненциальных распределений с тремя параметрами $(p, \lambda_1, \lambda_2)$ и (q, μ_1, μ_2). Таким образом, имеем СМО с запаздыванием во времени на величину $t_0 > 0$.

Определим числовые характеристики интервала между соседними требованиями и времени обслуживания для этой системы. Для этого воспользуемся преобразованием Лапласа функций (3) и (4):

$$A^*(s) = \left[p\frac{\lambda_1}{s+\lambda_1} + (1-p)\frac{\lambda_2}{s+\lambda_2}\right]e^{-t_0 s}.$$

Выпишем значение первой производной функции $A^*(s)$ со знаком минус в точке $s = 0$:

$$-\frac{dA^*(s)}{ds}\bigg|_{s=0} = p\lambda_1^{-1} + (1-p)\lambda_2^{-1} + t_0.$$

Отсюда имеем среднее значение интервалов между соседними требованиями

$$\overline{\tau}_\lambda = p\lambda_1^{-1} + (1-p)\lambda_2^{-1} + t_0$$

и среднее время обслуживания

$$\overline{\tau}_\mu = q\mu_1^{-1} + (1-q)\mu_2^{-1} + t_0.$$

Значение второй производной функции $A^*(s)$ в точке $s = 0$ дает второй начальный момент интервала поступления

$$\overline{\tau_\lambda^2} = 2p\lambda_1^{-2} + 2(1-p)\lambda_2^{-2} + t_0^2 + 2t_0[p\lambda_1^{-1} + (1-p)\lambda_2^{-1}].$$

Аналогично

$$\overline{\tau_\mu^2} = 2q\mu_1^{-2} + 2(1-q)\mu_2^{-2} + t_0^2 + 2t_0[q\mu_1^{-1} + (1-q)\mu_2^{-1}].$$

Отсюда получаем значения квадратов коэффициентов вариации интервала между поступлениями требований c_λ и времени обслуживания c_μ:

$$c_\lambda^2 = \frac{[(1-p^2)\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 p(1-p) + p(2-p)\lambda_2^2]}{[t_0\lambda_1\lambda_2 + (1-p)\lambda_1 + p\lambda_2]^2},$$

$$c_\mu^2 = \frac{[(1-q^2)\mu_1^2 - 2\mu_1\mu_2 q(1-q) + q(2-q)\mu_2^2]}{[t_0\mu_1\mu_2 + (1-p)\mu_1 + p\mu_2]^2}.$$

Далее для определения неизвестных параметров распределений (3) и (4) по методу моментов запишем следующую систему уравнений:

$$p\lambda_1^{-1} + (1-p)\lambda_2^{-1} + t_0 = \overline{\tau}_\lambda, \tag{5}$$

$$\frac{[(1-p^2)\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 p(1-p) + p(2-p)\lambda_2^2]}{[t_0\lambda_1\lambda_2 + (1-p)\lambda_1 + p\lambda_2]^2} = c_\lambda^2, \tag{6}$$

$$q\mu_1^{-1} + (1-q)\mu_2^{-1} + t_0 = \overline{\tau}_\mu, \tag{7}$$

$$\frac{[(1-q^2)\mu_1^2 - 2\mu_1\mu_2 q(1-q) + q(2-q)\mu_2^2]}{[t_0\mu_1\mu_2 + (1-q)\mu_1 + q\mu_2]^2} = c_\mu^2. \tag{8}$$

Величины $\overline{\tau}_\lambda$, $\overline{\tau}_\mu$, c_λ, c_μ, t_0 будем считать входными параметрами для системы $H_2^-/H_2^-/1$. Заметим, что $c_\lambda, c_\mu > 0$. Исходя из вида уравнения (5) положим

$$\lambda_1 = \frac{2p}{\overline{\tau}_\lambda - t_0}, \quad \lambda_2 = \frac{2(1-p)}{\overline{\tau}_\lambda - t_0} \tag{9}$$

и потребуем выполнения условия (6). Подставив (9) в равенство (6), получим решение для вероятности p в виде функции параметра t_0: $p = \phi_1(t_0)$. Аналогично поступим с уравнениями (7) и (8), положив

$$\mu_1 = \frac{2q}{\overline{\tau}_\mu - t_0}, \quad \mu_2 = \frac{2(1-q)}{\overline{\tau}_\mu - t_0} \tag{10}$$

и подставив (10) в равенство (8), получим решение для вероятности q в виде функции параметра t_0: $q = \phi_2(t_0)$. Такой подход к описанию гиперэкспоненциального распределения с использованием первых двух начальных моментов применен в работах [6, 8–11].

Таким образом, неопределенная система 4-х уравнений с 6-ю неизвестными (5)–(8) может быть решена методом подбора, при этом параметр запаздывания t_0 должен удовлетворять условию $0 < t_0 < \overline{\tau}_\mu < \overline{\tau}_\lambda$, а коэффициент загрузки определится отношением средних интервалов обслуживания и поступления $\rho = \overline{\tau}_\mu/\overline{\tau}_\lambda$ в случае стабильной системы.

Выражения (6) и (8) позволяют сделать предположение о том, что среднее время ожидания для системы с запаздыванием будет меньше, чем для обычной системы, так как ввод параметра сдвига $t_0 > 0$ уменьшает коэффициенты вариаций c_λ и c_μ, а время ожидания, как известно из [5], связано квадратичной зависимостью от коэффициентов вариаций для системы $G/G/1$.

3. Определение времени ожидания в системе $H_2^-/H_2^-/1$. В работе [6, 10] представлено решение для обычной системы $H_2/H_2/1$, полученное на основе метода спектрального разложения.

Утверждение 1. *Спектральное разложение решения ИУЛ для системы $H_2^-/H_2^-/1$:*

$$A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s)/\psi_-(s),$$

где $A^*(s)$ и $B^*(s)$ — преобразования Лапласа функций плотности (3) и (4) при $t_0 = 0$, а $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ — рациональные функции от s, имеет точно такой же вид, как и для системы $H_2/H_2/1$ [6]:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{s(s^3 - c_2 s^2 - c_1 s - c_0)}{(s-\lambda_1)(\lambda_2 - s)(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)}.$$

Доказательство. Преобразования Лапласа функций (3) и (4):

$$A^*(s) = \left[p\frac{\lambda_1}{s+\lambda_1} + (1-p)\frac{\lambda_2}{s+\lambda_2}\right]e^{-t_0 \cdot s}, \quad B^*(s) = \left[q\frac{\mu_1}{s+\mu_1} + (1-q)\frac{\mu_2}{s+\mu_2}\right]e^{-t_0 \cdot s}.$$

Тогда выражение $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1$ примет вид

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \left[p\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s} + (1-p)\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s}\right] \cdot \left[q\frac{\mu_1}{s+\mu_1} + (1-q)\frac{\mu_2}{s+\mu_2}\right] - 1,$$

так как показатели степени у экспонент обнуляются и тем самым операция сдвига в спектральном разложении нивелируется.

Так как

$$\left[p\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s} + (1-p)\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s}\right] = \frac{\lambda_1\lambda_2 - [p\lambda_1 + (1-p)\lambda_2]s}{(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)} = \frac{a_0 - a_1 s}{(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)},$$

где $a_0 = \lambda_1\lambda_2$, $a_1 = p\lambda_1 + (1-p)\lambda_2$,

$$\left[q\frac{\mu_1}{\mu_1 + s} + (1-q)\frac{\mu_2}{\mu_2 + s}\right] = \frac{\mu_1\mu_2 - [q\mu_1 + (1-q)\mu_2]s}{(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)} = \frac{b_0 + b_1 s}{(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)},$$

где $b_0 = \mu_1\mu_2$, $b_1 = q\mu_1 + (1-q)\mu_2$, искомое выражение будет иметь вид:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{(a_0 - a_1 s)(b_0 - b_1 s) - (\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)}{(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)}.$$

В числителе получим многочлен 4-й степени $-s^4 + c_2 s^3 + c_1 s^2 + c_0 s$ с коэффициентами $c_0 = a_0 b_1 - a_1 b_0 - a_0(\mu_1 + \mu_2) + b_0(\lambda_1 + \lambda_2)$, $c_1 = -a_1 b_1 - a_0 - b_0 + (\lambda_1 + \lambda_2)(\mu_1 + \mu_2)$ и $c_2 = \lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 - \mu_2$.

Тогда

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{s(s^3 - c_2 s^2 - c_1 s - c_0)}{(s-\lambda_1)(\lambda_2 - s)(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)}. \tag{11}$$

Для окончательного разложения числителя на простые множители остается определить корни многочлена $s^3 - c_2 s^2 - c_1 s - c_0$. При этом для выполнения вышеприведенных условий (1) и (2) необходимо наличие двух действительных отрицательных корней $(-s_1)$ и $(-s_2)$ или же двух комплексно сопряженных с отрицательными вещественными частями и одного положительного корня s_3 у многочлена третьей степени. Наличие таких корней следует из существования и единственности такого разложения [5] или же факторизации [7].

Исследование знака коэффициента c_0 подтверждает данный факт. В стационарном режиме функционирования системы ее коэффициент загрузки

$$\rho = \frac{\bar{\tau}\mu}{\bar{\tau}_\lambda} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2}\frac{\left[\mu_1(1-q) + \mu_2 q\right]}{\left[\lambda_1(1-p) + \lambda_2 p\right]} < 1.$$

Запишем выражение для коэффициента c_0 в развернутом виде:

$$c_0 = -\lambda_1\lambda_2\left[\mu_1(1-q) + \mu_2 q\right] + \mu_1\mu_2\left[\lambda_1(1-p) + \lambda_2 p\right].$$

Путем сравнения выражений для величин c_0 и ρ убеждаемся, что коэффициент $c_0 > 0$. С учетом знака минус перед c_0 в многочлене, по теореме Виета, произведение трех корней $s_1 s_2 s_3 = -c_0 < 0$, что полностью согласуется с нашими допущениями о знаках корней.

Окончательно, спектральное разложение (11) запишется следующим образом:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{-s(s+s_1)(s+s_2)(s-s_3)}{(s-\lambda_1)(\lambda_2 - s)(s+\mu_1)(s+\mu_2)},$$

а ее компоненты имеют вид

$$\psi_+(s) = \frac{s(s+s_1)(s+s_2)}{(s+\mu_1)(s+\mu_2)}, \quad \psi_-(s) = \frac{-(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)}{s - s_3}.$$

Очевидно, что функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ удовлетворяют условиям (1) и (2). Утверждение 1 доказано. $\square$

Таким образом, результаты для обычной системы $H_2/H_2/1$ справедливы и для системы $H_2^-/H_2^-/1$, чем мы и воспользуемся при дальнейших расчетах. Среднее время ожидания в очереди для СМО $H_2/H_2/1$ выражается равенством [6, 10]

$$\overline{W} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}, \tag{12}$$

где s_1 и s_2 — абсолютные значения отрицательных вещественных частей корней $(-s_1)$ и $(-s_2)$ многочлена $s^3 - c_2 s^2 - c_1 s - c_0$ с определенными выше коэффициентами.

Тогда алгоритм определения времени ожидания сводится к решению системы уравнений (9), (6), (10) и (8) при заданных входных параметрах: $\bar{\tau}_\lambda$,

$\overline{\tau}_\mu$, c_λ, c_μ и t_0, причем $0 < t_0 < \overline{\tau}_\mu < \overline{\tau}_\lambda$, а затем к нахождению нужных корней многочлена и использованию выражения (12).

Ниже в таблице приведены результаты расчетов времени ожидания в пакете `Mathcad` при коэффициентах загрузки $\rho = 0.1$, 0.5 и 0.9 при нормированном времени обслуживания $\overline{\tau}_\mu = 1$ и коэффициентах вариаций c_λ, $c_\mu = 2, 4, 8$. В правой колонке для сравнения приведены результаты для обычной системы $H_2/H_2/1$. Результаты расчетов полностью подтверждают справедливость нашего предположения о времени ожидания, причем чем меньше значения параметра запаздывания t_0, тем время ожидания в системе с запаздыванием ближе к времени ожидания в обычной системе.

Результаты экспериментов для СМО $H_2^-/H_2^-/1$ и $H_2/H_2/1$
[Experimental results for $H_2^-/H_2^-/1$ and $H_2/H_2/1$ queueing systems]

Input parameters		Average waiting time (in time units)			
		for $H_2^-/H_2^-/1$ queueing system			for $H_2/H_2/1$ queueing system
ρ	(c_λ, c_μ)	$t_0 = 0.9$	$t_0 = 0.5$	$t_0 = 0.1$	
0.1	(2, 2)	0.28	0.36	0.42	0.45
	(4, 4)	1.19	1.54	1.73	1.78
	(8, 8)	4.81	6.31	6.97	7.11
0.5	(2, 2)	2.31	3.13	3.87	4.04
	(4, 4)	9.29	12.61	15.45	16.13
	(8, 8)	37.22	50.50	61.54	64.18
0.9	(2, 2)	24.14	33.22	35.84	36.20
	(4, 4)	96.51	132.30	143.27	144.83
	(8, 8)	386.03	527.68	571.47	577.86

Отметим, что СМО $H_2^-/H_2^-/1$ определена и для случая, когда коэффициенты вариаций меньше 1. Так для случая, когда $c_\lambda = 0.2$, $c_\mu = 0.2$, $\rho = 0.9$, $t_0 = 0.9$, среднее время ожидания составляет 0.23 единицы времени.

Результаты расчетов полностью подтверждают справедливость нашего предположения о времени ожидания в системе с запаздыванием. Расчеты для обычной системы $H_2/H_2/1$ выполнены с помощью программы, описанной в работе [12]. Вышеприведенные результаты расчетов для обеих систем хорошо согласуются с результатами работы [13] в той области определения параметров, в которой действительны рассматриваемые системы.

Заключение. Полученные результаты приводят к следующим выводам.

1. Операция сдвига во времени с одной стороны приводит к увеличению загрузки системы с запаздыванием. В этом можно убедиться, вычислив отношение $\rho = \overline{\tau}_\mu/\overline{\tau}_\lambda$ для систем $H_2^-/H_2^-/1$ и $H_2/H_2/1$ с использованием выражений для их компонент. Например, если взять загрузку системы с запаздыванием $\rho' = 0.1$ в случае $c_\lambda = c_\mu = 2$ и параметре сдвига $t_0 = 0,9$ (северо-западная клетка таблицы), то увеличение будет в 1.15 раз и загрузка ρ обычной системы $H_2/H_2/1$ составит $\rho = 0.087$ вместо 0.1.
2. Операция сдвига во времени с другой стороны уменьшает коэффициенты вариаций интервала между поступлениями и времени обслуживания требований. В связи с тем, что среднее время ожидания в системе $G/G/1$ связано с коэффициентами вариаций интервалов поступления

и обслуживания квадратичной зависимостью, среднее время ожидания в системе с запаздыванием будет меньше, чем в обычной системе, при одинаковом коэффициенте загрузки. Например, для системы $H_2^-/H_2^-/1$ при параметре сдвига $t_0 = 0.9$ (северо-западная клетка таблицы), коэффициент вариации интервалов поступлений c_λ уменьшается с 2 до 1.835, коэффициент вариации времени обслуживания c_μ уменьшается с 2 для обычной системы до 1.053, а время ожидания уменьшается с 0.45 до 0.28 единицы времени.

3. В системе с запаздыванием $H_2^-/H_2^-/1$ и в обычной системе $H_2/H_2/1$ значения коэффициентов вариаций интервала между поступлениями c_λ и времени обслуживания требований c_μ перекрывают интервал от 1 до ∞ и поэтому эти системы пригодны для описания и исследования современного телетрафика при широком диапазоне изменения его параметров.
4. Практическое применение полученных результатов при анализе современного телетрафика просматривается следующим образом: при коэффициентах вариации c, больших 1, закон распределения можно аппроксимировать гиперэкспоненциальным распределением 2-го порядка H_2 либо H_2^-. При этом необходимо учесть уникальное свойство гиперэкспоненциального распределения, состоящего в том, что оно может определяться как двумя первыми моментами, так и тремя моментами [6]. С точки зрения теории вероятностей, описание закона распределения на уровне трех моментов все же точнее, но в таком случае применение изложенных результатов потребует большего объема вычислений из-за необходимости решения систем 3-х уравнений с использованием известного метода моментов.
5. Изложенные результаты справедливы только для одинаковых параметров сдвига t_0 для распределения времени между поступлениями заявок и времени обслуживания.

Конкурирующие интересы. Мы заявляем, что у нас нет конфликта интересов в авторстве и публикации этой статьи.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Тарасов В. Н., Бахарева Н. Ф., Блатов И. А. Анализ и расчет системы массового обслуживания с запаздыванием // *Автомат. и телемех.*, 2015. № 11. С. 51–59.
2. Козлов М. В., Прохоров А. В. *Введение в математическую статистику.* М.: МГУ, 1987.
3. Боев В. Д. *Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World.* СПб.: БХВ-Петербург, 2004.
4. Meadows D. H. *Thinking in Systems: A Primer* / ed. D. Wright. London: Earthscan, 2008.
5. Kleinrock L. *Queueing systems.* vol. I: Theory. New York: John Wiley & Sons, 1975.
6. Тарасов В. Н. Исследование систем массового обслуживания с гиперэкспоненциальными входными распределениями // *Пробл. передачи информ.*, 2016. Т. 52, № 1. С. 16–26.

7. Bocharov P. P., D'Apice C., Pechinkin A. V., Salerno S. *Queueing theory* / Modern Probability and Statistics. Utrecht: VSP, 2004. doi: 10.1515/9783110936025.
8. Brännström N. *A Queueing Theory Analysis of Wireless Radio Systems*: Master's Thesis. Appllied to HS-DSCH. Luleå: Luleå Univ. of Technology, 2004, Available at http://www.diva-portal.se/smash/get/diva2:1016709/FULLTEXT01.pdf (October 07, 2018).
9. Алиев Т. И. Аппроксимация вероятностных распределений в моделях массового обслуживания // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*, 2013. № 2(84). С. 88–93.
10. Тарасов В. Н., Карташевский И. В. Определение среднего времени ожидания требований в управляемой системе массового обслуживания $H_2/H_2/1$ // *Системы управления и информационные технологии*, 2014. Т. 57, № 3. С. 92–96.
11. Тарасов В. Н., Бахарева Н. Ф., Горелов Г. А., Малахов С. В. Анализ входящего трафика на уровне трех моментов распределений временных интервалов // *Информационные технологии*, 2014. № 9. С. 54–59.
12. Тарасов В. Н., Бахарева Н. Ф., Липилина Л. В. Автоматизация расчета характеристик систем массового обслуживания для широкого диапазона изменения их параметров // *Информационные технологии*, 2016. № 12. С. 952–957.
13. Кругликов В. К., Тарасов В. Н. Анализ и расчет сетей массового обслуживания с использованием двумерной диффузионной аппроксимации // *Автомат. и телемех.*, 1983. № 8. С. 74–83.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 4, pp. 702–713
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) http://doi.org/10.14498/vsgtu1607

MSC: 90B22, 60K25

The average waiting time in a $H_2/H_2/1$ queueing system with delay

V. N. Tarasov, E. G. Akhmetshina

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics,
23, L. Tolstoy st., Samara, 443010, Russian Federation.

Abstract

In queueing theory, the study of $G/G/1$ systems is particularly relevant due to the fact that until now there is no solution in the final form in the general case. Here G on Kendall's symbolics means arbitrary distribution law of intervals between requirements of an input flow and service time.

In this article, the task of determination of characteristics of a $H_2/H_2/1$ queueing system with delay of the $G/G/1$ type is considered using the classical method of spectral decomposition of the solution of the Lindley integral equation.

As input distributions for the considered system, probabilistic mixtures of exponential distributions shifted to the right of the zero point are chosen, that is, hyperexponential distributions H_2. For such distribution laws, the method of spectral decomposition allows one to obtain a solution in closed form. It is shown that in such systems with a delay, the average waiting time for calls in the queue is less than in conventional systems. This is due to the fact that the operation of time shift reduces the coefficients of variation of the intervals between the receipts and the service time, and as is known from queueing theory, the average wait time of requirements is related to these coefficients of variation by a quadratic dependence. The $H_2/H_2/1$ queueing system with a delay can quite well be used as a mathematical model of modern teletraffic.

Keywords: system with delay, $H_2/H_2/1$ queueing system, Laplace transformation, average waiting time in the queue.

Received: 15th February, 2018 / Revised: 7th October, 2018 /
Accepted: 12th November, 2018 / First online: 29th December, 2018

Research Article

Please cite this article in press as:
Tarasov V. N., Akhmetshina E. G. The average waiting time in a $H_2/H_2/1$ queueing system with delay, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 4, pp. 702–713. doi: 10.14498/vsgtu1607 (In Russian).

Authors' Details:

Veniamin N. Tarasov http://orcid.org/0000-0002-9318-0797
Dr. Tech. Sci., Professor; Head of Department; Dept. of Software and Management in Technical Systems; e-mail: veniamin_tarasov@mail.ru

Eleonora G. Akhmetshina; Assistant; Dept. of Software and Management in Technical Systems; e-mail: elyamalusha@mail.ru

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. Tarasov V. N., Bakhareva N. F., Blatov I. A. Analysis and calculation of queuing system with delay, *Autom. Remote Control*, 2015, vol. 76, no. 11, pp. 1945–1951. doi: 10.1134/S0005117915110041.
2. Kozlov M. V., Prokhorov A. V. *Vvedenie v matematicheskuiu statistiku* [Introduction to Mathematical Statistics]. Moscow, Moscow State Univ., 1987 (In Russian).
3. Boev V. D. *Modelirovanie sistem. Instrumental'nye sredstva GPSS World* [Systems Simulation. GPSS World Tools]. St. Petersburg, BKhV-Peterburg, 2004 (In Russian).
4. Meadows D. H. *Thinking in Systems: A Primer*, ed. D. Wright. London, Earthscan, 2008.
5. Kleinrock L. *Queueing systems*, vol. I, Theory. New York, John Wiley & Sons, 1975.
6. Tarasov V. N. Analysis of queues with hyperexponential arrival distributions, *Problems Inform. Transmission*, 2016, vol. 52, no. 1, pp. 14–23. doi: 10.1134/S0032946016010038.
7. Bocharov P. P., D'Apice C., Pechinkin A. V., Salerno S. *Queueing theory*, Modern Probability and Statistics. Utrecht, VSP, 2004. doi: 10.1515/9783110936025.
8. Brännström N. *A Queueing Theory Analysis of Wireless Radio Systems*, Master's Thesis. Appllied to HS-DSCH. Luleå, Luleå Univ. of Technology, 2004, Available at http://www.diva-portal.se/smash/get/diva2:1016709/FULLTEXT01.pdf (October 07, 2018).
9. Aliev T. I. Approximation of probability distributions in queuing systems, *Sci. Tech. J. Inf. Technol. Mech. Opt.*, 2013, no. 2(84), pp. 88–93 (In Russian).
10. Tarasov V. N., Kartashevskiy I. V. Determination of the average waiting time in controllable $H_2/H_2/1$ queuing system, *Control Systems and Information Technology*, 2014, vol. 57, no. 3, pp. 92–96 (In Russian).
11. Tarasov V. N., Bahareva N. F., Gorelov G. A., Malakhov S. V. Analyzing the incoming traffic at the three moments distribution of time intervals, *Information Technologies*, 2014, no. 9, pp. 54–59 (In Russian).
12. Tarasov V. N., Bahareva N. F., Lipilina L. V. Automation for calculating characteristics queuing system for a wide range changing their parameters, *Information Technologies*, 2016, no. 12, pp. 952–957 (In Russian).
13. Kruglikov V. K., Tarasov V. N. Analysis and calculation of queueing networks using the two-dimensional diffusion approximation, *Autom. Remote Control*, 1983, vol. 44, no. 8, pp. 1026–1034.