



УДК 517.958:539.3(1)

Численное исследование влияния дефектов поверхности на устойчивость цилиндрической трубы с жидкостью

С. А. Бочкарев, С. В. Лекомцев, А. Н. Сенин

Институт механики сплошных сред УрО РАН,
Россия, 614013, Пермь, ул. Акад. Королёва, 1.

Аннотация

Работа посвящена исследованию динамического поведения упругих цилиндрических труб, имеющих поверхностный дефект и взаимодействующих с внутренним потоком сжимаемой жидкости. Дефект в виде кольца прямоугольного сечения располагается на внутренней или внешней поверхности упругого тела и характеризуется собственным набором физико-механических параметров. Поведение идеальной сжимаемой жидкости описывается согласно потенциальной теории, а труба рассматривается в рамках линейной теории упругости. Для определения гидродинамического давления, действующего со стороны жидкости на внутреннюю поверхность трубы (дефекта), используется уравнение Бернулли. Математическая постановка задачи динамики упругого тела выполнена с помощью вариационного принципа возможных перемещений, а система уравнений для жидкой среды формируется с использованием метода Бубнова—Галеркина. Численная реализация алгоритма осуществляется на основе полуаналитического варианта метода конечных элементов. Оценка устойчивости базируется на вычислении и анализе комплексных собственных значений связанной системы уравнений. Верификация модели произведена для случая идеальной трубы путем сопоставления результатов с известными экспериментальными и численными данными. Для цилиндрической трубы, жестко защемленной с обоих краев, изучено влияние геометрических и физико-механических параметров дефекта на критическую скорость потока жидкости, при которой система теряет устойчивость. Показано, что наличие дефекта снижает границу гидроупругой устойчивости. Установлено, что разме-

Научная статья

Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Бочкарев С. А., Лекомцев С. В., Сенин А. Н. Численное исследование влияния дефектов поверхности на устойчивость цилиндрической трубы с жидкостью // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 3. С. 557–573. doi: [10.14498/vsgtu1625](https://doi.org/10.14498/vsgtu1625).

Сведения об авторах

Сергей Аркадьевич Бочкарев <http://orcid.org/0000-0002-9722-1269>

кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; отдел комплексных проблем механики деформируемых твердых тел; e-mail: bochkarev@icmm.ru

Сергей Владимирович Лекомцев <http://orcid.org/0000-0002-8331-2979>

кандидат физико-математических наук; научный сотрудник; отдел комплексных проблем механики деформируемых твердых тел; e-mail: lekomtsev@icmm.ru

Александр Николаевич Сенин; аспирант; отдел комплексных проблем механики деформируемых твердых тел; e-mail: senin.a@icmm.ru

щение дефекта на внешней поверхности трубы оказывает большее влияние, чем его расположение на смоченной поверхности.

Ключевые слова: метод конечных элементов, теория упругости, поверхностный дефект, цилиндрическая труба, гидроупругая устойчивость, потенциальная сжимаемая жидкость.

Получение: 17 февраля 2018 г. / Исправление: 24 июля 2018 г. /

Принятие: 3 сентября 2018 г. / Публикация онлайн: 12 октября 2018 г.

Введение. В природе не существует идеальных объектов — реальные тела обладают несовершенствами, которые могут образовываться как в процессе их создания, так и под влиянием физических, физико-химических или электрохимических воздействий. Примерами таких несовершенств служат дефекты формы (углубления, выступы, неровности и т. п.), которые в том числе возникают в результате коррозии материала. Последние из них представляют больший интерес, потому что кроме геометрических размеров и формы обладают собственным набором физико-механических параметров [1–7].

Чаще всего попытки учета коррозионных дефектов сводятся к их моделированию в виде так называемых «коррозионных ям» [1–3]. Как и в случае с дефектом формы, здесь учитываются лишь геометрические характеристики, что выражается в исключении части упругого тела из расчета. Такой подход позволяет оценить максимальный эффект, оказываемый дефектом. В предельном случае этот метод сводится к анализу конструкций, содержащих вырезы различной формы, в том числе имеющих технологическое назначение [8–11]. Другой способ заключается в задании в области дефекта собственных физико-механических параметров (модуль упругости, коэффициент Пуассона, плотность). Поскольку в настоящее время явление коррозии остается малоизученным [4], выбор конкретной модели и параметров, описывающих ее поведение, как правило, определяется личными предпочтениями исследователя. Наиболее часто область с коррозией описывается в рамках теории упругости, а выбор параметров модели не имеет под собой строгого обоснования. В [4] приводятся результаты исследования оксидов железа, выращенных в лабораторных условиях, характеристики которых достаточно близки к используемым в теоретических расчетах. Однако эти данные нельзя считать в полной мере достоверными в силу того, что изучаемый материал представлял собой порошок, а корректность полученных результатов зависела от степени его прессовки. Таким образом, оба подхода обладают как сильными сторонами, так и недостатками. В частности, первый из них более экономичен в плане вычислительных ресурсов, но он не предоставляет возможности для анализа каких-либо свойств дефекта, кроме геометрических. Существует также подход, основанный на использовании обучаемых нейронных сетей [2–3], способных к выявлению сложных зависимостей между входными и выходными данными и их обобщению. Недостатком здесь является необходимость наличия базы данных, сформированной на основании результатов натурных или численных экспериментов. Последние по-прежнему требуют построения численной модели, описывающей дефект каким-либо образом.

Вопросам моделирования и предсказания роста коррозии с целью определения периода безопасной эксплуатации различных конструкций посвящены работы [5–6]. В некоторых исследованиях [1, 3, 7] поднимается вопрос о взаимодействии дефектов, поскольку их колонии оказывают большее влияние на эксплуатационные характеристики конструкций, в отличие от изолированных дефектов. Однако, как правило, в данных работах анализ осуществляется с точки зрения «коррозийных ям».

Очевидно, что изучение влияния дефектов различной природы на напряженно-деформированное состояние или устойчивость трубопроводов, предназначенных для транспортировки разнообразных жидкостей или газов, в свете их безопасной эксплуатации приобретает особый смысл. Исследования собственных колебаний или устойчивости труб, моделируемых в рамках различных теорий оболочек или в виде балки и взаимодействующих с неподвижной или текущей жидкостью, имеют достаточно длительную историю [12–14]. В контексте настоящей работы наибольший интерес представляют публикации, в которых деформируемое тело рассматривается с помощью линейной теории упругости [15–22]. Насколько известно авторам, воздействие на динамические характеристики конструкций оценивалось только для начальных неправильностей формы. Таким образом, целью настоящей работы является анализ влияния области с дефектом на границу гидроупругой устойчивости системы «упругое тело – жидкость» при граничных условиях в виде жесткой заделки.

1. Постановка задачи и основные соотношения. Рассматривается упругая цилиндрическая труба длиной $L^{(1)}$, средним радиусом $R^{(1)}$ и толщиной $h^{(1)}$, взаимодействующая с внутренним потоком сжимаемой жидкости, текущим со скоростью U (рис. 1). На внутренней или внешней поверхности трубы располагается один или несколько дефектов, обладающих собственными физико-механическими параметрами. Область дефекта представляет собой кольцо, в сечении которого лежит прямоугольник длиной $L^{(2)}$ в осевом направлении и глубиной $h^{(2)}$ — в радиальном. Здесь и далее верхние индексы (1) и (2) характеризуют упругое тело и дефект соответственно. Целью работы является исследование влияния расположения дефектов и их свойств на границы гидроупругой устойчивости.

Труба и дефект рассматриваются с точки зрения линейной теории упругости [23] исходя из предположения о малости деформаций, возникающих в результате гидродинамического воздействия. В цилиндрической системе ко-

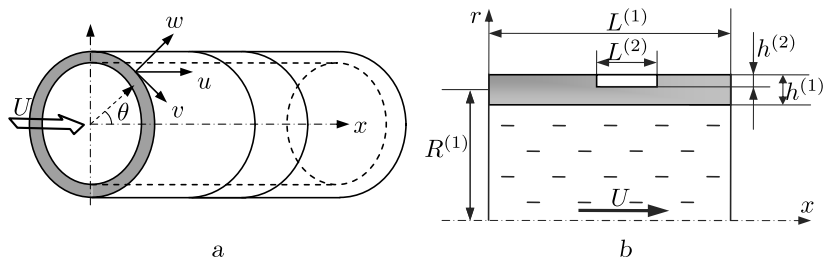


Рис. 1. Цилиндрическая труба с внутренним потоком жидкости и внешним кольцевым дефектом: а — общий вид; б — сечение по плоскости симметрии

[Figure 1. The cylindrical pipe with an internal fluid flow and an external annular defect; а — the general view; б — the cross-section along the plane of symmetry]

ординат (x, θ, r) вектор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ примет вид

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \{\varepsilon_x, \varepsilon_\theta, \varepsilon_r, 2\gamma_{x\theta}, 2\gamma_{\theta r}, 2\gamma_{rx}\}^T = \\ &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{\partial w}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right\}^T,\end{aligned}$$

где u, v, w — меридиональная, окружная и радиальная компоненты вектора перемещений трубы (дефекта).

Согласно обобщенному закону Гука, физические соотношения, устанавливающие связь между вектором напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и вектором деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$, в матричном виде записываются как

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \mathbf{D}(r, x) \boldsymbol{\varepsilon},$$

где $\mathbf{D}(r, x)$ — матрица жесткостей, компоненты которой для изотропного материала упругого тела и дефекта формируются известным образом.

Гидродинамическое давление p , оказываемое потоком жидкости на смоченную поверхность трубы (дефекта) $S_\sigma = S_s \cap S_f$, определяется из уравнения Бернулли [24]

$$p = -\rho_f \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + U \frac{\partial \phi}{\partial x} \right), \quad (1)$$

где ϕ и ρ_f — потенциал возмущения скорости и плотность жидкости соответственно; S_s и S_f — поверхности, ограничивающие области трубы V_s и жидкости V_f . Поток идеальной сжимаемой жидкости описывается в рамках потенциальной теории, волновое уравнение которой относительно потенциала возмущения скорости ϕ и соответствующие граничные условия формулируются как

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{2U}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} + \frac{U^2}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad (2)$$

$$\phi|_{x=0} = 0, \quad \partial \phi / \partial x|_{x=L} = 0, \quad (3)$$

где c — скорость звука в жидкости. Формирование системы алгебраических уравнений для жидкости осуществляется из соотношений (2), (3) с помощью метода Бубнова—Галеркина аналогично работе [25].

Математическая формулировка задачи динамики упругой трубы (дефекта) основана на вариационном принципе возможных перемещений. С учетом уравнения Бернулли (1) и работы силы инерции он может быть записан в матричной форме следующим образом:

$$\int_{V_s} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}(r, x) \boldsymbol{\varepsilon} dV + \int_{V_s} \rho_s(r, x) \delta \mathbf{d}^T \ddot{\mathbf{d}} dV - \int_{S_\sigma} \delta \mathbf{d}^T \mathbf{P} dS = 0, \quad \mathbf{P} = \{0, 0, p\}^T,$$

где $\rho_s(r, x)$ — плотность материала трубы (дефекта), $\mathbf{d}$ — вектор узловых перемещений трубы, $\mathbf{P}$ — вектор поверхностных нагрузок трубы.

Связанная система уравнений, описывающая совместное движение упругого тела и жидкости, может быть представлена в матричном виде

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{d}} \\ \ddot{\mathbf{f}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C}_{sf} \\ \mathbf{C}_{fs} & \mathbf{C}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ \dot{\mathbf{f}} \end{Bmatrix} + \\ & + \left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A}_{sf} \\ \mathbf{A}_{fs} & \mathbf{A}_f \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{f} \end{Bmatrix} = 0, \quad (4) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_s &= \sum_{m_s} \int_{V_s} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV, \quad \mathbf{M}_s = \sum_{m_s} \int_{V_s} \rho_s \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV, \\ \mathbf{K}_f &= \sum_{m_f} \int_{V_f} \left(\frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial \theta} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial r} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r} \right) dV, \quad \mathbf{M}_f = \sum_{m_f} \int_{V_f} \frac{\mathbf{F}^T \mathbf{F}}{c^2} dV, \\ \mathbf{C}_{sf} &= \rho_f \sum_{m_s} \int_{S_\sigma} \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{F} dS, \quad \mathbf{A}_{sf} = \rho_f \sum_{m_s} \int_{S_\sigma} U \bar{\mathbf{N}}^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} dS, \\ \mathbf{A}_f &= - \sum_{m_f} \int_{V_f} \frac{U^2}{c^2} \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} dV, \quad \mathbf{C}_f = \sum_{m_f} \int_{V_f} \frac{2U}{c^2} \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial x} \mathbf{F} dV, \\ \mathbf{A}_{fs} &= - \sum_{m_s} \int_{S_\sigma} U \mathbf{F}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{N}}}{\partial x} dS, \quad \mathbf{C}_{fs} = - \sum_{m_s} \int_{S_\sigma} \mathbf{F}^T \bar{\mathbf{N}} dS. \end{aligned}$$

Здесь m_s и m_f — количество конечных элементов, на которые разбиваются области трубы с дефектом V_s и жидкости V_f ; $\mathbf{B}$ — матрица связи вектора деформаций с вектором узловых перемещений конечного элемента трубы и дефекта; $\mathbf{f}$ — вектор узловых значений потенциала возмущения скорости; $\mathbf{F}$, $\mathbf{N}$, $\bar{\mathbf{N}}$ — функции формы для потенциала возмущения скорости жидкости, конечного элемента трубы (дефекта) и нормальной составляющей вектора перемещения трубы (дефекта); $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{A}$ — матрицы жесткости, масс, демпфирования и гидродинамической жесткости соответственно.

С учетом представления $(\mathbf{d}, \mathbf{f}) = (\bar{\mathbf{d}}, \bar{\mathbf{f}}) \exp(\lambda t)$ система (4) может быть переписана в виде

$$\lambda^2 \mathbf{M} \mathbf{x} + \lambda \mathbf{C} \mathbf{x} + (\mathbf{K} + \mathbf{A}) \mathbf{x} = 0. \quad (5)$$

Здесь $\bar{\mathbf{d}}, \bar{\mathbf{f}}$ — некоторые функции координат; $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ — характеристический показатель; $i = \sqrt{-1}$; $\mathbf{x} = \{\bar{\mathbf{d}}, \bar{\mathbf{f}}\}^T$.

Для нахождения λ система уравнений (5) преобразуется к обобщенной задаче на собственные значения для несимметричных матриц удвоенной размерности

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{K} + \mathbf{A} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \lambda \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{Bmatrix} = 0, \quad (6)$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица. Таким образом, решение задачи сводится к вычислению и анализу комплексных собственных значений λ системы (6).

Численная реализация осуществляется с использованием полуаналитического варианта метода конечных элементов [26] в осесимметричной постановке. В результате исходная трехмерная задача сводится к совокупности двумерных задач для каждой окружной гармоники j . При проведении расчетов как для трубы (дефекта), так и для жидкости был использован восьмиузловой лагранжев конечный элемент с квадратичной аппроксимацией [26].

2. Численные результаты. Достоверность численного решения подтверждена сравнением с результатами работы [17] и экспериментальными данными [27]. В данном примере рассматривается жестко защемленная с обоих торцов резиновая труба (модуль Юнга $E^{(1)} = 8.957 \cdot 10^5$ Па, коэффициент Пуассона $\nu^{(1)} = 0.5$, $\rho_s^{(1)} = 850$ кг/м³, $R^{(1)} = 7.85 \cdot 10^{-3}$ м, $h^{(1)} = 1.78 \cdot 10^{-4}$ м), содержащая внутренний поток газа ($\rho_f/\rho_s^{(1)} = 0.00136$, $c = 326$ м/с). Отметим, что в [17] моделирование трубы также осуществлялось в рамках линейной теории упругости, но для описания поведения газа были использованы линеаризованные уравнения Эйлера.

На рис. 2 показано изменение безразмерной критической скорости

$$\Lambda = U[\rho_s^{(1)}(1 - (\nu^{(1)})^2)/E^{(1)}]^{0.5}$$

в зависимости от отношения длины трубы к ее радиусу L/R . Из представленных данных следует, что полученные результаты хорошо согласуются с известными решениями, а незначительные отличия могут быть объяснены использованием разных подходов к описанию жидкости.

Рассматривается стальная жестко защемленная с обоих краев цилиндрическая труба с кольцевым дефектом ($E^{(1)} = 2.05 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu^{(1)} = 0.3$, $\rho_s^{(1)} = 7.8 \cdot 10^3$ кг/м³, $R^{(1)}/h^{(1)} = 77.25$), внутри которой содержится поток сжимаемой жидкости ($\rho_f = 10^3$ кг/м³, $c = 1.5 \cdot 10^3$ м/с). Анализируются два варианта положения дефекта в радиальном направлении: на внешней поверхности трубы и на внутренней.

Отображение результатов численного исследования осуществляется с использованием следующих безразмерных параметров области с дефектом: осевая координата ζ , длина ξ и глубина η :

$$\xi = \frac{L^{(2)}}{L^{(1)}}, \quad \eta = \frac{h^{(2)}}{h^{(1)}}, \quad \zeta = \frac{x}{L^{(1)}};$$

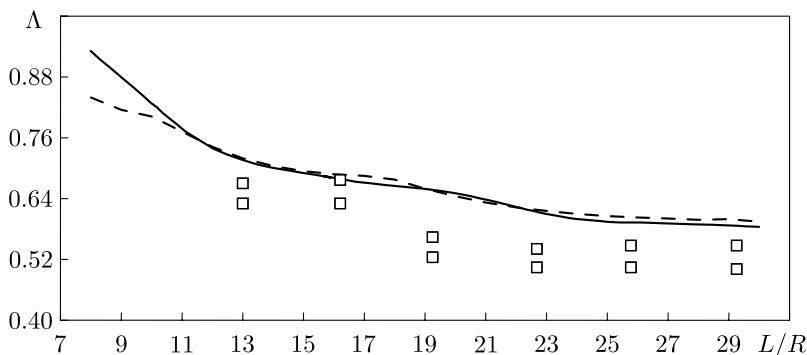


Рис. 2. Зависимость безразмерных критических скоростей Λ от отношения длины трубы к ее радиусу L/R : пунктирная линия — расчет, сплошная линия — результаты работы [17], символы — экспериментальные данные [27]

[Figure 2. Dependence of the dimensionless critical velocities Λ on the ratio of the pipe length to the pipe radius L/R ; dashed line—computation, solid line—results from [17], symbols—experimental data [27]]

$$k = \frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}, \quad \Psi = \frac{U_{(k<1)}}{U_{(k=1)}}, \quad l = \frac{L^{(1)}}{R^{(1)}}.$$

Расчеты проводились при различных значениях коэффициента k , представляющего собой отношение модуля Юнга дефекта $E^{(2)}$ к модулю Юнга материала трубы $E^{(1)}$. Величина Ψ обозначает отношение скоростей потери устойчивости системы с дефектом ($k < 1$) и без него ($k = 1$).

При исследовании влияния положения дефекта на границу гидроупругой устойчивости его размер оставался неизменным. На рис. 3 отображена зависимость безразмерной критической скорости Ψ от безразмерного положения дефекта ζ на внутренней или внешней поверхности. Приведенные результаты получены при различной жесткости в области дефекта k и глубине: $\eta = 0.1$ (рис. 3, а) и $\eta = 0.3$ (рис. 3, б). Из данных графиков можно заключить, что наличие дефекта на любой поверхности трубы приводит к снижению границ устойчивости. При этом скорости потери устойчивости более чувствительны к размещению дефекта на внешней поверхности трубы, т. к. в этом случае Ψ меняется в более широких пределах. Такое поведение можно объяснить тем, что на дефект с внутренней стороны оказывает влияние поток жидкости. В этом случае локальное уменьшение жесткости приводит к возрастанию присоединенной массы жидкости [13], выступая тем самым в виде причины, стабилизирующей последствия падения жесткости системы в целом. Отличие в конфигурациях при разных вариантах расположения дефекта возрастает с уменьшением его жесткости $E^{(2)}$.

Для жестко заземленной трубы можно выделить два варианта поведения. В первом случае минимальное значение критических скоростей достигается при расположении дефекта в центре при $\zeta = 0.5$ (вариант I), а во втором — имеют место два локальных минимума на одинаковых расстояниях от концов трубы при $\zeta = 1/3$ и $\zeta = 2/3$ (вариант II). В обоих случаях наибольшее падение скоростей достигается при размещении дефекта с внешней стороны. В чередовании этих вариантов можно выявить некоторую законо-

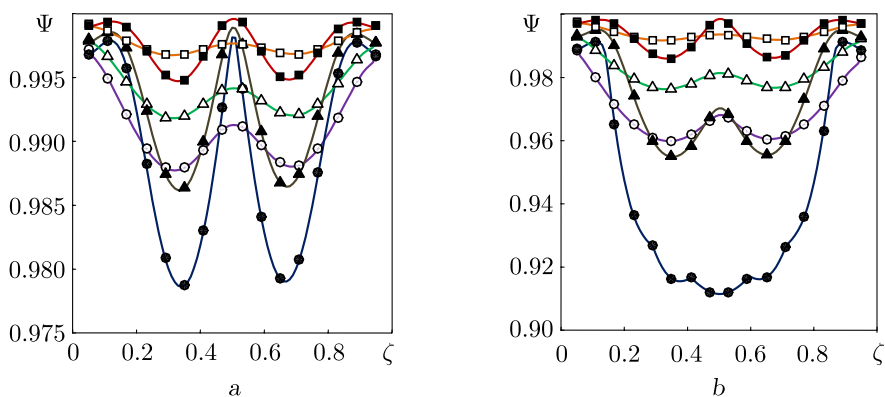


Рис. 3. Зависимости критической скорости Ψ от положения дефекта ζ при глубине $\eta = 0.1$ (а) и $\eta = 0.3$ (б): $l = 6$, $\xi = 0.1$; $\blacksquare, \square - k = 0.7$; $\blacktriangle, \triangle - k = 0.3$; $\bullet, \circ - k = 0.01$; сплошные символы — внешний дефект; открытые символы — внутренний дефект

[Figure 3. Dependence of the critical velocity Ψ on the defect location ζ at a depth $\eta = 0.1$ (a) and $\eta = 0.3$ (b): $l = 6$, $\xi = 0.1$; $\blacksquare, \square - k = 0.7$; $\blacktriangle, \triangle - k = 0.3$; $\bullet, \circ - k = 0.01$; filled markers stand for the external defect; open markers—for the internal defect]

мерность. Из анализа зависимостей критических скоростей от параметра l , представленных на рис. 4, можно заключить, что изменение формы потери устойчивости приводит к смене одного варианта другим. В частности видно, что для более короткой трубы ($l = 5$) вариант с минимумом скорости при центральном расположении дефекта вдоль трубы (рис. 4, а) имеет место, когда критическая окружная гармоника равна $j = 4$. По мере увеличения l наблюдаются два минимума (рис. 4, б). Данные на рис. 4, с отражают некоторое переходное состояние, где, с одной стороны, для большей части значений Ψ критической является четвертая гармоника и характер изменения критической скорости соответствует варианту II, а с другой стороны, в окрестности значения $\zeta = 0.5$ идет снижение скорости по третьей гармонике. Далее (рис. 4, d) полностью происходит изменение номера критической гармоники на $j = 3$, и в зависимости $\Psi(\zeta)$ присутствует один четко выраженный локальный минимум.

Более детально описанное поведение демонстрируется на рис. 5, где приведены зависимости Ψ от длины трубы при фиксированном радиусе для $k = 0.5$, $\xi = 0.1$, $\eta = 0.1$. Представленные данные наглядно демонстриру-

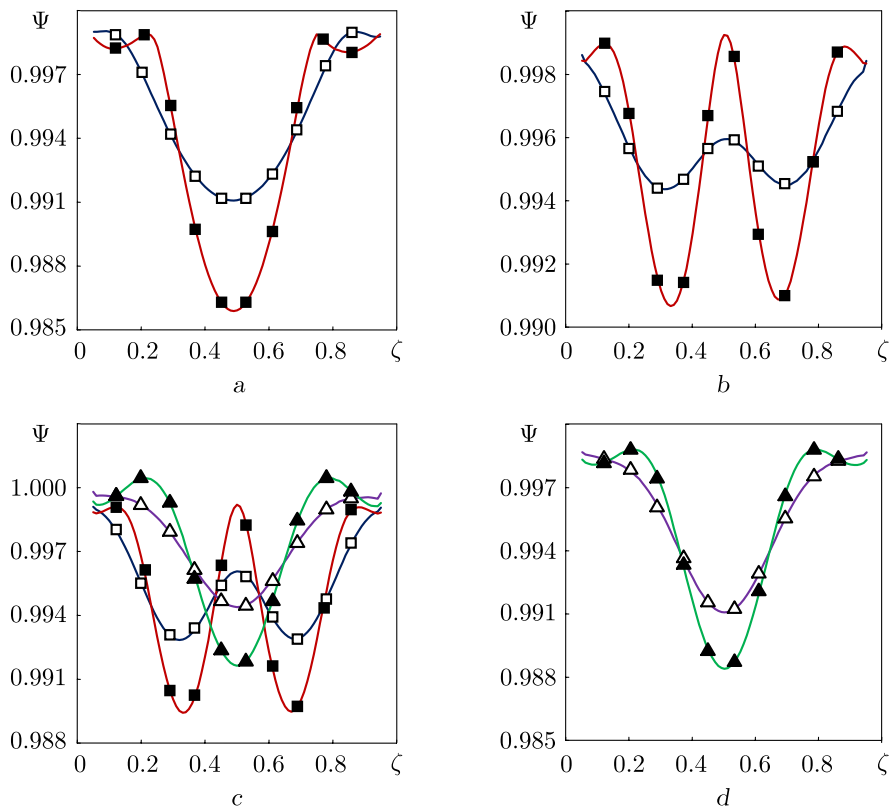


Рис. 4. Зависимости критической скорости Ψ от положения дефекта ζ при длине трубы $l = 5$ (а), $l = 6$ (б), $l = 7$ (с) и $l = 8$ (д): $k = 0.5$, $\xi = 0.1$, $\eta = 0.1$; $\blacksquare$, $\square$ — $j = 4$; $\blacktriangle$, $\triangle$ — $j = 3$; сплошные символы — внешний дефект; открытые символы — внутренний дефект

[Figure 4. Dependence of the critical velocity Ψ on the defect location ζ for a pipe length $l = 5$ (a), $l = 6$ (b), $l = 7$ (c) and $l = 8$ (d): $k = 0.5$, $\xi = 0.1$, $\eta = 0.1$; $\blacksquare$, $\square$ — $j = 4$; $\blacktriangle$, $\triangle$ — $j = 3$; filled markers stand for the external defect; open markers—for the internal defect]

ют, что минимальная скорость потери устойчивости Ψ при ζ , равном 0.5 или $1/3$, достигается на разных окружных гармониках. Отметим, что графики для различных вариантов расположения дефекта имеют качественно схожие зависимости с незначительными количественными отличиями.

Для трубы с двумя дефектами, располагающимися симметрично относительно центра конструкции, количество минимумов критических скоростей и значения координат ζ , при которых они достигаются, полностью соответствуют варианту с одним дефектом. Это демонстрируется на рис. 6, а, где показаны зависимости для дефектов, имеющих как одинаковый размер ($\xi = 0.05$, $\eta = 0.1$), так и одинаковый набор физико-механических свойств. Размеры дефектов были подобраны таким образом, чтобы их суммарная длина совпадала с вариантом, представленным на рис. 3, а. Наряду с качественным подобием зависимостей имеет место незначительное количественное отличие. Оно обусловлено тем, что для одного дефекта (рис. 3, а) критические скорости потери устойчивости различны в точках локальных минимумов при $\zeta = 1/3$ и $\zeta = 2/3$. В случае симметричного расположения дефектов такое различие отсутствует. Резкое увеличение значения Ψ в окрестности $\zeta = 0.5$ объясняется тем, что на интервале $\zeta \in (0.475, 0.5)$ дефекты сливаются в один, и его безразмерная длина ξ изменяется от 0.1 до 0.05 в точке $\zeta = 0.5$.

Характер динамического поведения конструкций с несколькими дефектами, которые сами по себе оказывают влияние на жесткость тела в целом, существенно усложняется под действием гидродинамической нагрузки. В ка-

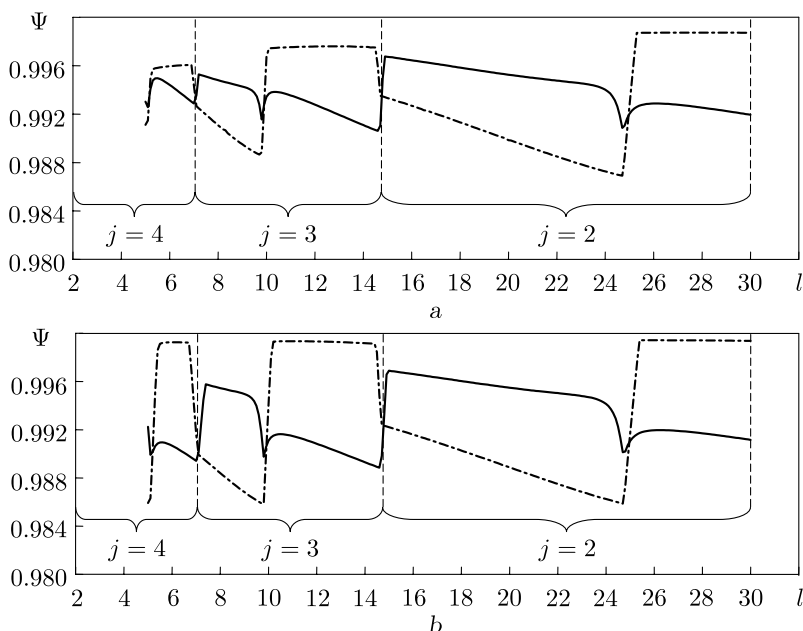


Рис. 5. Зависимости безразмерной критической скорости Ψ от отношения длины трубы к ее радиусу l при расположении дефекта на внутренней (а) или внешней (б) поверхностях: $k = 0.5$, $\xi = 0.1$, $\eta = 0.1$; сплошная линия — $\zeta = 1/3$; штрих-пунктирная линия — $\zeta = 0.5$

[Figure 5. Dependence of the dimensionless critical velocity Ψ on the ratio of the pipe length to its radius l when the defect is located on the inner (a) or outer (b) surfaces: $k = 0.5$, $\xi = 0.1$, $\eta = 0.1$; solid line is for $\zeta = 1/3$; dot-and-dash line is for $\zeta = 0.5$]

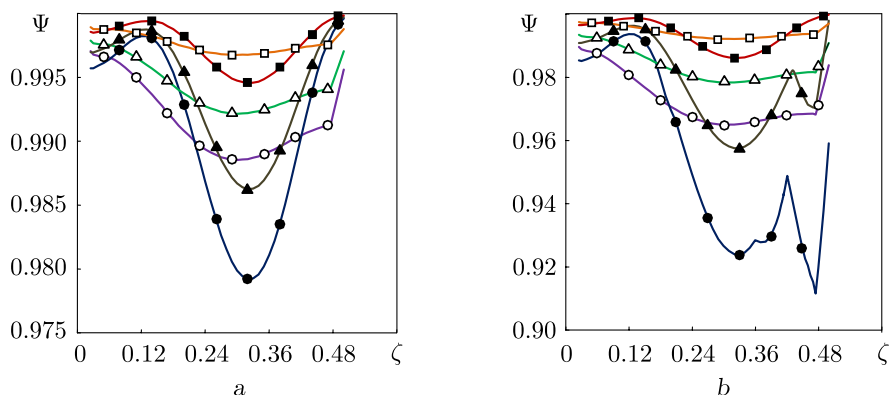


Рис. 6. Зависимости критической скорости Ψ от положения двух дефектов ζ при глубине $\eta = 0.1$ (a) и $\eta = 0.3$ (b): $l = 6$, $\xi = 0.05$; $\blacksquare, \square - k = 0.7$; $\blacktriangle, \triangle - k = 0.3$; $\bullet, \circ - k = 0.01$; сплошные символы — внешний дефект; открытые символы — внутренний дефект

[Figure 6. Dependence of the critical velocity Ψ on the location of two defects ζ at a depth $\eta = 0.1$ (a) and $\eta = 0.3$ (b); $l = 6$, $\xi = 0.05$; $\blacksquare, \square - k = 0.7$; $\blacktriangle, \triangle - k = 0.3$; $\bullet, \circ - k = 0.01$; filled markers stand for the external defect; open markers—for the internal defect]

честве демонстрации вышеизложенного могут быть приведены результаты, показанные на рис. 6, b. Здесь при сближении двух глубоких ($\eta = 0.3$) и менее жестких ($k = 0.3$ и $k = 0.01$) внешних дефектов наблюдается осцилляция критической скорости Ψ , которая, кроме того, для случая $k = 0.01$ сопровождается изменением формы потери устойчивости на $j = 5$ начиная с $\zeta = 0.36$. Отметим, что при взаимодействии дефектов важную роль играют их взаимное расположение и расстояние между ними, что подробно рассматривается в работах [1–3].

Из представленных результатов следует, что для жестко закрепленной трубы независимо от количества дефектов и выбора поверхности их расположения наибольшее падение критических скоростей наблюдается, как правило, при $\zeta = 1/3$, $\zeta = 2/3$ и $\zeta = 0.5$. Конкретное количество локальных минимумов безразмерной критической скорости Ψ и их расположение ζ зависят как от параметров дефекта, так и от характеристик самой трубы. Очевидно, что приведенные здесь и далее примеры численного моделирования, в которых параметры дефекта принимают значения, недопустимые в реальных конструкциях, следует рассматривать как модельные.

Исследование зависимости критических скоростей от геометрических размеров дефекта проводилось при его фиксированном положении с центром в точке $\zeta = 0.5$. Изменение длины осуществлялось вдоль трубы симметрично в обе стороны, а глубины — радиально в направлении от поверхности расположения.

Безразмерные критические скорости Ψ в зависимости от длины дефекта ξ при его фиксированной глубине η представлены на рис. 7. Здесь рассмотрены трубы разной длины l с целью воспроизведения поведения критических скоростей, соответствующих варианту II (рис. 7, a) и варианту I (рис. 7, b) при одинаковых безразмерных параметрах дефекта. Множественные пересечения кривых для дефектов на разных поверхностях вызваны чередованием минимальной критической скорости. В случае внешнего расположения несовершенства соответствующие графики выглядят менее монотонными. Когда

длина дефекта достигает некоторого порогового значения, влияние поверхности расположения на критические скорости потери устойчивости становится минимальным. Величина этой нейтральной области зависит не от жесткости дефекта, а от его геометрических размеров и размеров трубы.

При анализе зависимости критических скоростей жидкости Ψ от глубины дефекта η в случае его фиксированной длины ξ , как и ранее, рассматриваются трубы различных размеров, соответствующие варианту II (рис. 8, а) и варианту I (рис. 8, б) при одинаковых безразмерных параметрах. Данные, приведенные на рис. 8, демонстрируют существенное различие в поведении критических скоростей потери устойчивости, возникающее в результате выбора поверхности расположения дефекта. Причем с увеличением глубины η это различие увеличивается. Кроме этого, в случае дефекта на внешней

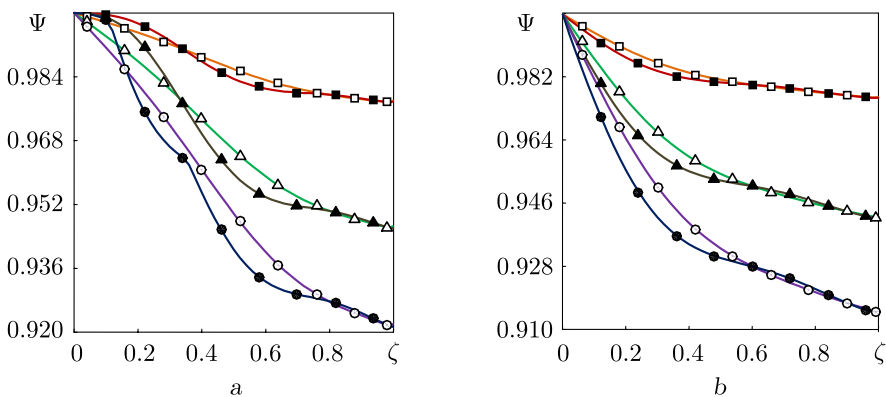


Рис. 7. Зависимости критической скорости Ψ от длины дефекта ξ при размере трубы $l = 6$ (а) и $l = 8$ (б): $\zeta = 0.5$, $\eta = 0.1$; $\blacksquare, \square - k = 0.7$; $\blacktriangle, \triangle - k = 0.3$; $\bullet, \circ - k = 0.01$; сплошные символы — внешний дефект; открытые символы — внутренний дефект

[Figure 7. Dependence of the critical velocity Ψ on the length of the defect ξ for a pipe size $l = 6$ (a) and $l = 8$ (b); $\zeta = 0.5$, $\eta = 0.1$; $\blacksquare, \square - k = 0.7$; $\blacktriangle, \triangle - k = 0.3$; $\bullet, \circ - k = 0.01$; filled markers stand for the external defect; open markers—for the internal defect]

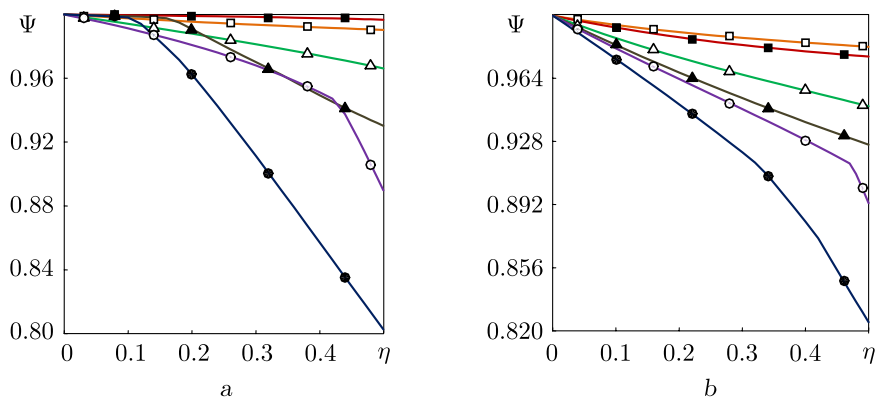


Рис. 8. Зависимости критической скорости Ψ от глубины дефекта η при длине трубы $l = 6$ (а) и $l = 8$ (б): $\zeta = 0.5$, $\xi = 0.1$; $\blacksquare, \square - k = 0.7$; $\blacktriangle, \triangle - k = 0.3$; $\bullet, \circ - k = 0.01$; сплошные символы — внешний дефект; открытые символы — внутренний дефект

[Figure 8. Dependence of the critical velocity Ψ on the depth of the defect η for a pipe length $l = 6$ (a) and $l = 8$ (b); $\zeta = 0.5$, $\xi = 0.1$; $\blacksquare, \square - k = 0.7$; $\blacktriangle, \triangle - k = 0.3$; $\bullet, \circ - k = 0.01$; filled markers stand for the external defect; open markers—for the internal defect]

поверхности имеет место такой диапазон его глубин, убывающий со снижением жесткости дефекта, при котором изменение критической скорости Ψ незначительно. Для более длинных оболочек (рис. 8, б) такая зависимость отсутствует.

Характер зависимостей, представленных на рис. 8, определяется только заданной комбинацией параметров дефекта. Различие в критических скоростях Ψ , полученных при различном расположении дефекта ζ , снижается с увеличением его длины ξ . Вышеизложенное демонстрируется результатами, приведенными на рис. 9, а, которые получены при длине дефекта, равной $\xi = 0.4$, в отличие от рис. 8, а, где $\xi = 0.1$. Для сравнения: зависимость $\Psi(\xi)$, полученная для более глубокого дефекта $\eta = 0.3$ и показанная на рис. 9, б, не имеет качественных отличий от результатов, представленных на рис. 7, а.

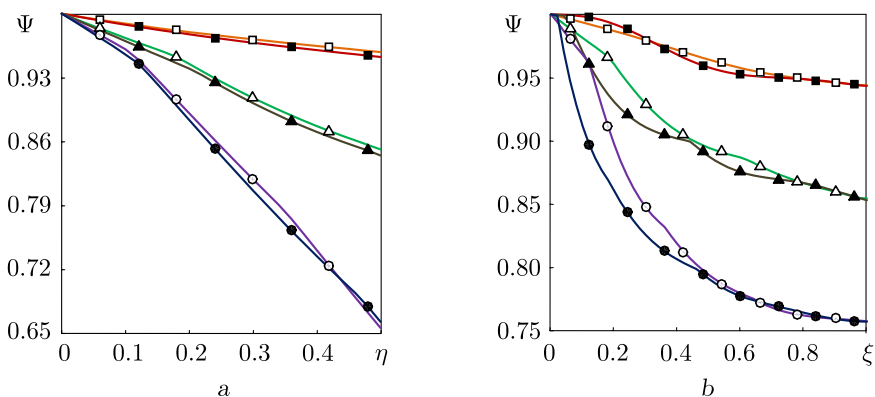


Рис. 9. Зависимости критической скорости Ψ от глубины η (а) и длины ξ (б) дефекта при $l = 6$ и $\zeta = 0.5$: а — $\xi = 0.4$; б — $\eta = 0.3$; ■, □ — $k = 0.7$; ▲, △ — $k = 0.3$; ●, ○ — $k = 0.01$; сплошные символы — внешний дефект; открытые символы — внутренний дефект

[Figure 9. Dependence of the critical velocity Ψ on the depth η (a) and the length ξ (b) of the defect for $l = 6$ and $\zeta = 0.5$: а — $\xi = 0.4$; б — $\eta = 0.3$; ■, □ — $k = 0.7$; ▲, △ — $k = 0.3$; ●, ○ — $k = 0.01$; filled markers stand for the external defect; open markers—for the internal defect]

Численным экспериментом было подтверждено, что по мере уменьшения жесткости дефекта, расположенного на внешней поверхности трубы, результаты стремятся к предельному варианту, при котором область дефекта целиком исключается из расчета («коррозийная яма»).

Заключение. В работе представлена математическая модель и алгоритм ее численной реализации, предназначенные для исследования гидроупругой устойчивости цилиндрических труб, имеющих поверхностный дефект и взаимодействующих с внутренним потоком потенциальной сжимаемой жидкости. Проведен ряд численных экспериментов с целью выявления степени влияния различных параметров дефекта на критические скорости потери устойчивости. Из полученных результатов следует, что наличие дефекта приводит к снижению границ гидроупругой устойчивости. Степень и характер влияния определяются геометрическими размерами области дефекта, принятыми для нее физико-механическими параметрами и поверхностью расположения. Установлено, что в зависимости от характеристик трубы и дефекта минимальные критические скорости имеют место при его расположении в центре или на расстоянии одной трети от торцов трубы. С прикладной точки зре-

ния эти критические точки требуют дополнительной защиты во избежание снижения границ гидроупругой устойчивости.

Конкурирующие интересы. Мы заявляем, что у нас нет конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи.

Авторский вклад и ответственность. Мы несем полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Каждый из нас одобрил окончательную версию рукописи.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-41-590646 p_a).

Библиографический список

1. Li X., Bai Y., Su C., Li M. Effect of interaction between corrosion defects on failure pressure of thin wall steel pipeline // *Int. J. Pres. Ves. Pip.*, 2016. vol. 138. pp. 8–18. doi: [10.1016/j.ijpvp.2016.01.002](https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2016.01.002).
2. Silva R. C. C., Guerreiro J. N. C., Loula A. F. D. A study of pipe interacting corrosion defects using the FEM and neural networks // *Adv. Eng. Softw.*, 2007. vol. 38, no. 11–12. pp. 868–875. doi: [10.1016/j.advengsoft.2006.08.047](https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2006.08.047).
3. Khalajestani M. K., Bahaari M. R. Investigation of pressurized elbows containing interacting corrosion defects // *Int. J. Pres. Ves. Pip.*, 2014. vol. 123. pp. 77–85. doi: [10.1016/j.ijpvp.2014.08.002](https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2014.08.002).
4. Ouglova A., Berthaud Y., François M., Foct F. Mechanical properties of an iron oxide formed by corrosion in reinforced concrete structures // *Corrosion Sci.*, 2006. vol. 48, no. 12. pp. 3988–4000. doi: [10.1016/j.corsci.2006.03.007](https://doi.org/10.1016/j.corsci.2006.03.007).
5. Vanaei H. R., Eslami A., Egbewande A. A review on pipeline corrosion, in-line inspection (ILI), and corrosion growth rate models // *Int. J. Pres. Ves. Pip.*, 2017. vol. 149. pp. 43–54. doi: [10.1016/j.ijpvp.2016.11.007](https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2016.11.007).
6. Xu L., Cheng Y. F. A finite element based model for prediction of corrosion defect growth on pipelines // *Int. J. Pres. Ves. Pip.*, 2017. vol. 153. pp. 70–79. doi: [10.1016/j.ijpvp.2017.05.002](https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2017.05.002).
7. Benjamin A. C., Freire J. L. F., Vieira R. D., Cunha D. J. S. Interaction of corrosion defects in pipelines – Part 1: Fundamentals // *Int. J. Pres. Ves. Pip.*, 2016. vol. 144. pp. 56–62. doi: [10.1016/j.ijpvp.2016.05.007](https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2016.05.007).
8. Shariati M., Rokhi M. M. Buckling of steel cylindrical shells with an elliptical cutout // *Int. J. Steel Struct.*, 2010. vol. 10, no. 2. pp. 193–205. doi: [10.1007/BF03215830](https://doi.org/10.1007/BF03215830).
9. Сухинин С. Н., Шиврин М. В. Исследование устойчивости при осевом сжатии многослойных композитных цилиндрических оболочек с локальными дефектами // *Конструкции из композиционных материалов*, 2014. № 1. С. 3–7.
10. Lykhachova O. Numerical simulation of axially compressed cylindrical shells with circular cutouts // *Mechanics Mechanical Eng.*, 2016. vol. 20, no. 3. pp. 309–321, Available at http://kdm.p.lodz.pl/articles/2016/20_3_9L.pdf (July 24, 2018).
11. Jiao P., Chen Z., Xu F., Tang X., Su W. Effects of ringed stiffener on the buckling behavior of cylindrical shells with cutout under axial compression: Experimental and numerical investigation // *Thin Wall. Struct.*, 2018. vol. 123. pp. 232–243. doi: [10.1016/j.tws.2017.11.013](https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.11.013).
12. Wang L., Ni Q. Vibration of slender structures subjected to axial flow or axially towed in quiescent fluid // *Adv. Acoust. Vib.*, 2009. vol. 2009, 432340. doi: [10.1155/2009/432340](https://doi.org/10.1155/2009/432340).
13. Païdoussis M. P. *Slender Structures and Axial Flow*. vol. 1 / Fluid-structure Interactions. London: Academic Press, 2014. 888 pp.; doi: [10.1016/s1874-5652\(98\)x8001-4](https://doi.org/10.1016/s1874-5652(98)x8001-4).
14. Païdoussis M. P. *Slender Structures and Axial Flow*. vol. 2 / Fluid-structure Interactions. London: Academic Press, 2016. 942 pp.; doi: [10.1016/s1874-5652\(04\)x8001-7](https://doi.org/10.1016/s1874-5652(04)x8001-7).
15. Zhang Y. L., Reese J. M., Gorman D. G. Finite element analysis of the vibratory characteristics of cylindrical shells conveying fluid // *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2002. vol. 191. pp. 5207–5231. doi: [10.1016/S0045-7825\(02\)00456-5](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(02)00456-5).

16. Zhang Y. L., Reese J. M., Gorman D. G. Initially-tensioned orthotropic cylindrical shells conveying fluid: a vibration analysis // *J. Fluid. Struct.*, 2002. vol. 16, no. 1. pp. 53–70. doi: [10.1006/jfls.2001.0409](https://doi.org/10.1006/jfls.2001.0409).
17. Zhang Y. L., Reese J. M., Gorman D. G. A comparative study of axisymmetric finite elements for the vibration of thin cylindrical shells conveying fluid // *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 2002. vol. 54, no. 1. pp. 89–110. doi: [10.1002/nme.418](https://doi.org/10.1002/nme.418).
18. Uğurlu B., Ergin A. A hydroelasticity method for vibrating structures containing and/or submerged in flowing fluid // *J. Sound Vib.*, 2006. vol. 290, no. 3–5. pp. 572–596. doi: [10.1016/j.jsv.2005.04.028](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.04.028).
19. Uğurlu B., Ergin A. A hydroelastic investigation of circular cylindrical shells-containing flowing fluid with different end conditions // *J. Sound Vib.*, 2008. vol. 318, no. 4–5. pp. 1291–1312. doi: [10.1016/j.jsv.2008.05.006](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.05.006).
20. Uğurlu B., Ergin A. The dynamics and stability of circular cylindrical shells containing and submerged in flowing fluid using a higher order boundary element method // *P. I. Mech. Eng. M.-J. Eng.*, 2009. vol. 223, no. 4. pp. 489–502. doi: [10.1243/14750902JEME168](https://doi.org/10.1243/14750902JEME168).
21. Firouz-Abadi R. D., Noorian M. A., Haddadpour H. A fluid–structure interaction model for stability analysis of shells conveying fluid // *J. Fluid. Struct.*, 2010. vol. 26, no. 5. pp. 747–763. doi: [10.1016/j.jfluidstructs.2010.04.003](https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2010.04.003).
22. Бочкарев С. А., Лекомцев С. В. Численное моделирование упругой трубы с текущей жидкостью // *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2011. № 3. С. 5–14.
23. Timoshenko S. P., Goodier J. N. *Theory of elasticity*. New York: McGraw-Hill, 1970. xxiv+567 pp.
24. Ильгамов М. А. *Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ*. М.: Наука, 1969. 182 с.
25. Бочкарев С. А., Матвеев В. П. Численное исследование влияния граничных условий на динамику поведения цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью // *Изв. РАН. МТТ*, 2008. Т. 43, № 3. С. 189–199.
26. Zienkiewicz O. C. *The finite element method in engineering science*. London: McGraw Hill, 1971. 521 pp.
27. Païdoussis M. P., Denise J.-P. Flutter of thin cylindrical shells conveying fluid // *J. Sound Vib.*, 1972. vol. 20. pp. 9–26. doi: [10.1016/0022-460X\(72\)90758-4](https://doi.org/10.1016/0022-460X(72)90758-4).

MSC: 74F10, 74H15

Numerical study of the influence of surface defects on the stability of a cylindrical pipe containing fluid

*S. A. Bochkarev, S. V. Lekomtsev, A. N. Senin*Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1, Academician Korolev Street, Perm, 614013, Russian Federation.

Abstract

This paper is concerned with the dynamic behavior of an elastic cylindrical pipe with surface defects interacting with the internal flow of a compressible fluid. A defect in the form of a ring of rectangular cross-section is located on the inner or outer surface of an elastic body and characterized by its own set of physico-mechanical parameters. The behavior of an ideal compressible fluid is described using the potential theory, and the behavior of the pipe is considered in the framework of the linear theory of elasticity. The hydrodynamic pressure exerted by the fluid on the inner surface of the pipe (defect) is determined with the use of the Bernoulli equation. A mathematical formulation of the problem of the elastic body dynamics is based on the variational principle of virtual displacements, and the system of equations for a liquid medium is developed using the Bubnov-Galerkin method. For the numerical implementation of the algorithm, a semi-analytic version of the finite element method is used. The stability of the system is estimated based on the results of computation and analysis of complex eigenvalues for a coupled system of equations. Verification of the model is carried out for the case of an ideal pipe by comparing the obtained results with the known experimental and numerical data. The effect of the geometric and physico-mechanical parameters of the defect on the critical fluid velocity responsible for the loss of stability is studied for a cylindrical pipe clamped at both ends. It is shown that defects reduce the boundary of hydroelastic stability. It has been found that the defect located on the outer surface of the pipe exerts a greater impact on the system stability than it does when located on the wetted surface of the pipe.

Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Senin A. N. Numerical study of the influence of surface defects on the stability of a cylindrical pipe containing fluid, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 3, pp. 557–573. doi: [10.14498/vsgtu1625](https://doi.org/10.14498/vsgtu1625) (In Russian).

Authors' Details:

Sergey A. Bochkarev  <http://orcid.org/0000-0002-9722-1269>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Senior Researcher; Dept. of Complex Problems of Mechanics of Deformable Bodies; e-mail: bochkarev@icmm.ru

Sergey V. Lekomtsev  <http://orcid.org/0000-0002-8331-2979>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Researcher; Dept. of Complex Problems of Mechanics of Deformable Bodies; e-mail: lekomtsev@icmm.ru

Aleksander N. Senin; Postgraduate Student; Dept. of Complex Problems of Mechanics of Deformable Bodies; e-mail: senin.a@icmm.ru

Keywords: finite element method, theory of elasticity, surface defect, cylindrical pipe, hydroelastic stability, potential compressible flow.

Received: 17th February, 2018 / Revised: 24th July, 2018 /

Accepted: 3rd September, 2018 / First online: 12th October, 2018

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interests with the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-41-590646 r_a).

References

1. Li X., Bai Y., Su C., Li M. Effect of interaction between corrosion defects on failure pressure of thin wall steel pipeline, *Int. J. Pres. Ves. Pip.*, 2016, vol. 138, pp. 8–18. doi: [10.1016/j.ijpvp.2016.01.002](https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2016.01.002).
2. Silva R. C. C., Guerreiro J. N. C., Loula A. F. D. A study of pipe interacting corrosion defects using the FEM and neural networks, *Adv. Eng. Softw.*, 2007, vol. 38, no. 11–12, pp. 868–875. doi: [10.1016/j.advengsoft.2006.08.047](https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2006.08.047).
3. Khalajestani M. K., Bahaari M. R. Investigation of pressurized elbows containing interacting corrosion defects, *Int. J. Pres. Ves. Pip.*, 2014, vol. 123, pp. 77–85. doi: [10.1016/j.ijpvp.2014.08.002](https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2014.08.002).
4. Ouglova A., Berthaud Y., François M., Foct F. Mechanical properties of an iron oxide formed by corrosion in reinforced concrete structures, *Corrosion Sci.*, 2006, vol. 48, no. 12, pp. 3988–4000. doi: [10.1016/j.corsci.2006.03.007](https://doi.org/10.1016/j.corsci.2006.03.007).
5. Vanaei H. R., Eslami A., Egbewande A. A review on pipeline corrosion, in-line inspection (ILI), and corrosion growth rate models, *Int. J. Pres. Ves. Pip.*, 2017, vol. 149, pp. 43–54. doi: [10.1016/j.ijpvp.2016.11.007](https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2016.11.007).
6. Xu L., Cheng Y. F. A finite element based model for prediction of corrosion defect growth on pipelines, *Int. J. Pres. Ves. Pip.*, 2017, vol. 153, pp. 70–79. doi: [10.1016/j.ijpvp.2017.05.002](https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2017.05.002).
7. Benjamin A. C., Freire J. L. F., Vieira R. D., Cunha D. J. S. Interaction of corrosion defects in pipelines – Part 1: Fundamentals, *Int. J. Pres. Ves. Pip.*, 2016, vol. 144, pp. 56–62. doi: [10.1016/j.ijpvp.2016.05.007](https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2016.05.007).
8. Shariati M., Rokhi M. M. Buckling of steel cylindrical shells with an elliptical cutout, *Int. J. Steel Struct.*, 2010, vol. 10, no. 2, pp. 193–205. doi: [10.1007/BF03215830](https://doi.org/10.1007/BF03215830).
9. Sukhinin S. N., Shivrini M. V. Axial rigidity study of multilayer composite cylindrical shells with local defects, *Compos. Mater. Construct.*, 2014, no. 1, pp. 3–7 (In Russian).
10. Lykhachova O. Numerical simulation of axially compressed cylindrical shells with circular cutouts, *Mechanics Mechanical Eng.*, 2016, vol. 20, no. 3, pp. 309–321, Available at http://kdm.p.lodz.pl/articles/2016/20_3_9L.pdf (July 24, 2018).
11. Jiao P., Chen Z., Xu F., Tang X., Su W. Effects of ringed stiffener on the buckling behavior of cylindrical shells with cutout under axial compression: Experimental and numerical investigation, *Thin Wall. Struct.*, 2018, vol. 123, pp. 232–243. doi: [10.1016/j.tws.2017.11.013](https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.11.013).
12. Wang L., Ni Q. Vibration of slender structures subjected to axial flow or axially towed in quiescent fluid, *Adv. Acoust. Vib.*, 2009, vol. 2009, 432340. doi: [10.1155/2009/432340](https://doi.org/10.1155/2009/432340).
13. Païdoussis M. P. *Slender Structures and Axial Flow*, vol. 1, Fluid-structure Interactions. London, Academic Press, 2014, 888 pp.; . doi: [10.1016/s1874-5652\(98\)x8001-4](https://doi.org/10.1016/s1874-5652(98)x8001-4).

14. Païdoussis M. P. *Slender Structures and Axial Flow*, vol. 2, Fluid-structure Interactions. London, Academic Press, 2016, 942 pp.; . doi: [10.1016/s1874-5652\(04\)x8001-7](https://doi.org/10.1016/s1874-5652(04)x8001-7).
15. Zhang Y. L., Reese J. M., Gorman D. G. Finite element analysis of the vibratory characteristics of cylindrical shells conveying fluid, *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2002, vol. 191, pp. 5207–5231. doi: [10.1016/S0045-7825\(02\)00456-5](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(02)00456-5).
16. Zhang Y. L., Reese J. M., Gorman D. G. Initially-tensioned orthotropic cylindrical shells conveying fluid: a vibration analysis, *J. Fluid. Struct.*, 2002, vol. 16, no. 1, pp. 53–70. doi: [10.1006/jfls.2001.0409](https://doi.org/10.1006/jfls.2001.0409).
17. Zhang Y. L., Reese J. M., Gorman D. G. A comparative study of axisymmetric finite elements for the vibration of thin cylindrical shells conveying fluid, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 2002, vol. 54, no. 1, pp. 89–110. doi: [10.1002/nme.418](https://doi.org/10.1002/nme.418).
18. Uğurlu B., Ergin A. A hydroelasticity method for vibrating structures containing and/or submerged in flowing fluid, *J. Sound Vib.*, 2006, vol. 290, no. 3–5, pp. 572–596. doi: [10.1016/j.jsv.2005.04.028](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.04.028).
19. Uğurlu B., Ergin A. A hydroelastic investigation of circular cylindrical shells-containing flowing fluid with different end conditions, *J. Sound Vib.*, 2008, vol. 318, no. 4–5, pp. 1291–1312. doi: [10.1016/j.jsv.2008.05.006](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.05.006).
20. Uğurlu B., Ergin A. The dynamics and stability of circular cylindrical shells containing and submerged in flowing fluid using a higher order boundary element method, *P. I. Mech. Eng. M.-J. Eng.*, 2009, vol. 223, no. 4, pp. 489–502. doi: [10.1243/14750902JEME168](https://doi.org/10.1243/14750902JEME168).
21. Firouz-Abadi R. D., Noorian M. A., Haddadpour H. A fluid–structure interaction model for stability analysis of shells conveying fluid, *J. Fluid. Struct.*, 2010, vol. 26, no. 5, pp. 747–763. doi: [10.1016/j.jfluidstructs.2010.04.003](https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2010.04.003).
22. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V Numerical simulation of an elastic tube containing a flowing fluid, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2011, no. 3, pp. 5–14 (In Russian).
23. Timoshenko S. P., Goodier J. N. *Theory of elasticity*. New York, McGraw-Hill, 1970, xxiv+567 pp.
24. Ilgamov M. A. *Kolebaniia uprugikh obolochek, soderzhashchikh zhidkost' i gaz* [Oscillations of elastic shells containing liquid and gas]. Moscow, Nauka, 1969, 182 pp. (In Russian)
25. Bochkarev S. A., Matveenko V. P. Numerical study of the influence of boundary conditions on the dynamic behavior of a cylindrical shell conveying a fluid, *Mech. Solids*, 2008, vol. 43, no. 3, pp. 477–486. doi: [10.3103/S0025654408030187](https://doi.org/10.3103/S0025654408030187).
26. Zienkiewicz O. C. *The finite element method in engineering science*. London, McGraw Hill, 1971, 521 pp.
27. Païdoussis M. P., Denise J.-P. Flutter of thin cylindrical shells conveying fluid, *J. Sound Vib.*, 1972, vol. 20, pp. 9–26. doi: [10.1016/0022-460X\(72\)90758-4](https://doi.org/10.1016/0022-460X(72)90758-4).