



УДК 539.3

Построение полнопараметрических аналитических решений в основной смешанной задаче эластостатики односвязного тела

В. Б. Пеньков, О. С. Новикова, Л. В. Левина

Липецкий государственный технический университет,
Россия, 398055, Липецк, ул. Московская, 30.

Аннотация

Использование аналитических решений для анализа состояния тел при исследовательских и инженерных расчетах обеспечивает вычислительное ресурсосбережение. Цель работы — обеспечение методологии построения полнопараметрических решений задач математической физики, в том числе основной смешанной задачи эластостатики. Средством является относительно новый энергетический метод граничных состояний, опирающийся на компьютерные алгебры, который исходит из понятия состояния среды, изоморфизма гильбертовых пространств внутренних и граничных состояний тела и является самодостаточным в том смысле, что принципиально не требует сопоставления решения тестовых задач с таковыми, построенными иными методами. Для включения в решение в явном виде констант среды в работе рекомендуется экономичнейший вычислительные ресурсы метод граничных состояний с возмущениями, в котором прямой метод «обвязывается» подходом А. Пуанкаре. Для явного включения в решение параметров граничных условий предложена технология эталонных решений. Ее эффективность продемонстрирована на конкретном примере основной смешанной задачи эластостатики. В качестве объекта исследования назначено односвязное ограниченное тело, граница которого разбита на три участка. На каждом участке удерживается индивидуальный способ параметризации точек границы: полярная, цилиндрическая, сферическая системы координат. Расчеты выполняются с применением компьютерной алгебры вычислительной системы Mathematica. Продемонстрирована эффективность разработанной методологии для достижения поставленной цели. Описана последовательность шагов метода, ведущая к гарантированному достижению

Краткое сообщение

Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Пеньков В. Б., Новикова О. С., Левина Л. В. Построение полнопараметрических аналитических решений в основной смешанной задаче эластостатики односвязного тела // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 3. С. 586–598. doi: [10.14498/vsgtu1603](https://doi.org/10.14498/vsgtu1603).

Сведения об авторах

Виктор Борисович Пеньков <http://orcid.org/0000-0002-6059-1856>

доктор физико-математических наук; профессор; каф. общей механики;
e-mail: vbpenkov@mail.ru

Ольга Сергеевна Новикова <http://orcid.org/0000-0003-2577-4515>

аспирант; каф. общей механики; e-mail: _o_l_g_a_@bk.ru

Любовь Владимировна Левина <http://orcid.org/0000-0002-7441-835X>

кандидат физико-математических наук; доцент; каф. прикладной математики;
e-mail: satalkina_lyubov@mail.ru

цели. Выполнено решение конкретной задачи. Результаты представлены в явной аналитической форме, содержащей все параметры краевой задачи теории упругости, и проиллюстрированы графически после расчета по аналитическому решению при конкретном наборе значений параметров.

Ключевые слова: метод граничных состояний, метод граничных состояний с возмущениями, полнопараметрическое аналитическое решение, основная смешанная задача, эластостатика, компьютерная алгебра.

Получение: 25 января 2018 г. / Исправление: 25 июля 2018 г. /

Принятие: 3 сентября 2018 г. / Публикация онлайн: 13 октября 2018 г.

Введение. Факт наличия аналитического решения краевых задач уравнений математической физики переоценить трудно. Простой расчет по готовым формулам позволяет проводить любой анализ решения и отвечать даже на самые замысловатые вопросы вплоть до решения задач параметрической оптимизации объекта с вполне конкретными целевыми назначениями при соблюдении любых ограничений на характеристики объекта. Конечно, широкое применение современных вычислительных технологий, основанных на «числе», позволяет во многих случаях справиться и с такой проблемой, но при этом приходится вести глобальный пересчет практически на всех этапах построения численного решения, а не просто расчет по формулам единожды построенного аналитического решения. Эта альтернатива делает актуальной тему работы — построение полнопараметрического решения (ППР).

К настоящему моменту времени этапы в построении ППР (обезразмеривание, учет варьировемости физических параметров среды с последующим интерполированием [1], построение ППР первой и второй основных задач теории упругости (ТУ) при учете множественных символьных параметров в граничных условиях (ГУ) и в выражениях для объемных сил) уже пройдены. На очереди стоят задачи со смешанными ГУ опять же при наличии множественности варьируемых параметров в выражениях как для поверхностных усилий, так и для перемещений. Кроме этого, представляется более эффективной методология использования метода возмущений, «обязывающего» метод граничных состояний (МГСВ), для вычислительного ресурсосбережения.

Цель работы состоит в построении ППР основной смешанной задачи ТУ при конечном наборе варьируемых параметров ГУ и учет в аналитическом по форме решении физических параметров среды средствами МГСВ.

Задачи, соответствующие поставленной цели:

- 1) формулировка и построение эталонных решений основной смешанной задачи ТУ по классификации Н. И. Мухелишвили [2]. В эталонном решении участвует лишь состояние среды, соответствующее ровно одному варьируемому параметру ГУ. Линейная комбинация эталонных решений с коэффициентами — символами включает таковые в ППР;
- 2) каждое эталонное решение должно в явном виде содержать символ ν — коэффициент Пуассона линейно-упругой среды;
- 3) выполнение решения конкретной задачи, подтверждающее достижение поставленной цели.

1. Метод граничных состояний с возмущениями как средство учета параметров среды в полнопараметрическом решении

1.1. Основные положения метода граничных состояний. В основу построения ППР положен метод граничных состояний (МГС), сравнительно новый «прямой» метод, исходящий из изоморфизма гильбертовых пространств внутренних $\xi = \{u_i, e_{ij}, \sigma_{ij}\} \in \Xi$ и граничных $\gamma = \{u_i, p_i\} \in \Gamma$ состояний упругого тела, занимающего область $V \subset \mathbb{R}^3$ с границей ∂V , где u_i — компонента вектора перемещений; e_{ij}, σ_{ij} — компоненты тензоров деформации и напряжений; $p_i = \sigma_{ij}n_j$, n_j символизирует единичный вектор внешней нормали к границе. Изоморфизм $\Xi \leftrightarrow \Gamma$ обусловлен, с одной стороны, возможностью продолжения решения ξ на границу ($\xi \rightarrow \gamma$), а с другой — теоремой Соммильяна [3], гарантирующей обратное соответствие $\gamma \rightarrow \xi$. Свойства аддитивности и однородности выполняются:

$$\alpha\xi^{(1)} + \beta\xi^{(2)} \leftrightarrow \alpha\gamma^{(1)} + \beta\gamma^{(2)};$$

равенство скалярных произведений заведомо выполняется в силу принципа возможных перемещений:

$$(\xi^{(1)}, \xi^{(2)})_{\Xi} = \int_V \sigma_{ij}^{(1)} e_{ij}^{(2)} dv = \int_{\partial V} p_i^{(1)} u_i^{(2)} ds = (\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)})_{\Gamma}. \quad (1)$$

Определяющие эластостатическое состояние уравнения суть (тензорно-индексная форма записи, безразмерная форма) [4]:

1) соотношения Коши

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2)$$

2) обобщенный закон Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad \theta = e_{ii}, \quad (3)$$

3) уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} + X_i^0 = 0, \quad (4)$$

где $\lambda = \frac{2\nu\mu}{1-2\nu}$ — параметр Ламе, ν — коэффициент Пуассона, μ — модуль сдвига, θ — объемная деформация, δ_{ij} — символ Кронекера, X_i^0 отвечает за вектор объемных сил.

Соотношения (1)–(4) ниже будем понимать записанными в безразмерной форме в соответствии с П-теоремой [5]. В качестве геометрического масштабирующего коэффициента выберем некоторое значение R , совпадающее с каким-либо характерным параметром конкретной задачи. В качестве жесткостного параметра удобно принимать значение модуля сдвига.

Соотношения (2)–(4) приводятся к системе трех дифференциальных уравнения Ламе относительно перемещений, общее решение которой построено Папковичем и Нейбером [6]. Однако для формирования базиса гильбертовых пространств Ξ для односвязного тела удобно использовать общее решение Аржаных–Слободянского [3]:

$$u_i = 4(1 - \nu)B_i + x_j B_{i,j} - x_i B_{j,j} + \chi_{,i},$$

где B_i — компонента произвольного гармонического вектора (полагаем базис гармонических многочленов известным); χ в случае потенциальных объемных сил (Π — их потенциал) является решением уравнения Пуассона

$$\chi_{,ii} = \frac{1 - 2\nu}{2\mu(1 - \nu)} \Pi. \quad (5)$$

В случае неограниченного односвязного тела Аржаных и Слободянским также построено общее решение. Комбинирование обеих форм решений позволяет организовать базис пространств состояний для произвольного полостного тела [7].

После ортогонализации базиса в соответствии со скалярным произведением (1) любое состояние ξ можно разыскивать в виде ряда Фурье

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi^{(k)}$$

с коэффициентами c_k по элементам $\xi^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$ ортонормированного базиса.

В общем случае линейная однородная задача приводится к разрешающей бесконечной системе уравнений (БСУ)

$$Q\mathbf{c} = \mathbf{q}$$

относительно коэффициентов Фурье $\mathbf{c} = \{c_k\}$ (в случае неоднородной задачи выполняется традиционная декомпозиция). Коэффициенты матрицы $Q = [Q_{nk}]$ («скелет» задачи) зависят от базиса пространства Γ и типа ГУ; правые части определяются базисом пространства Γ и конкретизацией ГУ.

В случае первой и второй основных задач матрица Q является единичной, следовательно, коэффициенты Фурье вычисляются рутинно в соответствии с определением скалярного произведения (1), примененного к ортонормированному базису. Для основной смешанной задачи «скелет» есть

$$Q_{nk} = \int_{S_p} u_i^{(n)} p_i^{(k)} ds + \int_{S_u} p_i^{(n)} u_i^{(k)} ds,$$

где $S_p \cup S_u = \partial V$, $S_p \cap S_u = \emptyset$, т.е. граница тела разбита на два класса в соответствии с удерживаемыми на них условиями.

В основных задачах теории упругости коэффициенты Фурье определяются либо квадратурами

$$c_n = \int_{\partial V} p_i u_i^{(n)} ds, \quad (6)$$

либо формулой

$$c_n = \int_{\partial V} u_i p_i^{(n)} ds, \quad (7)$$

где p_i , u_i конкретизируют ГУ в соответствующих задачах.

Основная смешанная задача имеет следующее представление правых частей БСУ:

$$q_n = \int_{S_p} p_i u_i^{(n)} ds + \int_{S_u} u_i p_i^{(n)} ds. \quad (8)$$

Приближенное решение БСУ можно получать методом усечения, добиваясь необходимой точности.

1.2. Использование метода возмущений в контексте МГС. При коэффициенте $\nu_0 = 1/4$ имеем $\lambda = \lambda_0 = \mu_0$. При этом, если масштабирующий напряжения параметр принять равным реальному модулю сдвига μ , то $\lambda_0 = \mu_0 = 1$. При применении метода возмущений для прочностных оценок упругих тел (нерыхлых, сжимаемых) представляется наиболее удобным для введения малого параметра β использовать коэффициент Пуассона $\nu \in (0; 0.5)$, принимая за $\nu_0 = 1/4$. Тогда $\nu = \nu_0(1 + \beta)$, $\beta \in (-0.25; 0.25)$. Решение любой задачи средствами МГС, т. е. внутреннее состояние и граничное состояние, будем искать в форме асимптотического разложения по малому параметру β , порожденному представлением объемного параметра Ламе

$$\lambda = \frac{2\nu\mu}{1-2\nu} = \frac{2\nu_0(1+\beta)\mu_0}{1-2\nu_0(1+\beta)} = \frac{\frac{2\nu_0\mu_0}{1-2\nu_0}(1+\beta)}{1-\frac{2\nu_0}{1-2\nu_0}\beta}.$$

Последнее представление для λ выполнено для того, чтобы его знаменатель отвечал за сумму известной бесконечной геометрической прогрессии.

Из соображений удобства введем обозначения

$$\lambda_0 = \frac{2\nu_0\mu_0}{1-2\nu_0}, \quad \alpha = \frac{2\nu_0}{1-2\nu_0}\beta.$$

Убеждаемся, что α — также малый параметр, например, при $\nu_0 = 1/4$ имеем $\alpha = \beta$. Тогда для параметра Ламе получаем следующее представление:

$$\lambda = \frac{\lambda_0 + \mu_0\alpha}{1 - \alpha} = (\lambda_0 + \mu_0\alpha) \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t.$$

Здесь использована сумма бесконечной геометрической прогрессии с показателем $|\alpha| < 1$. Окончательно можно записать

$$\lambda = \sum_{t=0}^{\infty} \lambda_*^{(t)} \alpha^t, \quad \lambda_*^{(t)} = \begin{cases} \lambda_0, & t = 0 \\ \lambda_0 + \mu_0, & t > 0. \end{cases}$$

Будем разыскивать решение любой краевой задачи для (2)–(4) в форме асимптотических рядов по α (разложение для X_i^0 считаем известным):

$$\{u_i, e_{ij}, \sigma_{ij}, X_i^0\} = \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t \{u_i^{(t)}, e_{ij}^{(t)}, \sigma_{ij}^{(t)}, X_i^{0(t)}\}. \quad (9)$$

Подстановка (9) в формулу Коши (2) дает аналогичное соотношение для итераций метода малого параметра:

$$2e_{ij}^{(t)} = u_{i,j}^{(t)} + u_{j,i}^{(t)}.$$

Аналогичная операция с (3) приводит к соотношению

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sigma_{ij}^{(t)} \alpha^t = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_*^{(m)} \alpha^m \sum_{l=0}^{\infty} \theta^{(l)} \alpha^l \delta_{ij} + 2\mu_0 \sum_{t=0}^{\infty} e_{ij}^{(t)} \alpha^t,$$

в котором первое слагаемое правой части преобразуем, изменив порядок суммирования. А именно, положим $t = 0, 1, \dots, q = 0, 1, \dots, t - 1$ и обозначим

$$\vartheta^{(t)} = -\frac{1}{\lambda_*^{(t)}} \Pi^{(t)} + \theta^{(t)}, \quad \Pi^{(t)} = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ -\lambda_*^{(t)} \sum_{q=0}^{t-1} \theta^{(q)}, & t > 0. \end{cases}$$

Введение дополнительного обозначения

$$s_{ij}^{(t)} = \sigma_{ij}^{(t)} + \frac{1}{\lambda_*^{(t)}} \Pi^{(t)} \quad (10)$$

приводит соотношение (3) к форме обобщенного закона Гука для каждой итерации t метода возмущений А. Пуанкаре, фундаментально описанного в [8] и эффективно приспособленного к механике деформируемого твердого тела [9]:

$$s_{ij}^{(t)} = \lambda_*^{(t)} \vartheta^{(t)} \delta_{ij} + 2\mu_0 e_{ij}^{(t)},$$

которые для альтернирующих случаев принимают вид

$$\begin{aligned} t = 0: \quad s_{ij}^{(0)} &= \lambda_0 \vartheta^{(0)} \delta_{ij} + 2\mu_0 e_{ij}^{(0)}, \\ t > 0: \quad s_{ij}^{(t)} &= (\lambda_0 + \mu_0) \vartheta^{(t)} \delta_{ij} + 2\mu_0 e_{ij}^{(t)}. \end{aligned}$$

Анализ выражения коэффициента Пуассона $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$ применительно к двум последним формулам показывает, что для случая $t = 0$ удачным вариантом является коэффициент Пуассона $\nu_0 = 1/4$, поскольку коэффициент Пуассона представляется простейшим допустимым рациональным числом. Тогда итерациям $t > 0$ соответствует $\nu_0 = 1/3$.

Разложение уравнений равновесия (4) в ряд по малому параметру приводит к форме классического соотношения равновесия, но относительно $s_{ij}^{(t)}$:

$$s_{ij,j}^{(t)} + X_i^{(t)} = 0,$$

где $X_i^{(t)} = X_i^{0(t)} + \Pi_{,i}^{(t)}$. Отсюда становится понятен смысл принятого обозначения в (10), в котором позиция $\Pi^{(t)}$ оказывается потенциалом фиктивно добавленных объемных сил. Если при $t > 0$ величина $X_i^{0(t)}$ отсутствует, что всегда можно обеспечить, заложив в качестве $X_i^{0(0)}$ изначально заданную силу, то далее становятся пригодными для проведения анализа решения Папковича—Нейбера или Аржаных—Слободянского.

2. Алгоритм решения задачи. На каждой итерации МГСВ используется метод граничных состояний. Обозначим нулевую итерацию номером $t = 0$; последующим итерациям соответствует $t > 0$.

1. Проводим декомпозицию искомого решения:

$$\xi^{(t)} = \xi^{\circ(t)} + \xi^{\bullet(t)},$$

$\xi^{\circ(t)}$ — состояние, обусловленное ГУ, учитывающими их изменение от действия объемных сил на границе; $\xi^{\bullet(t)}$ — состояние, обусловленное объемными силами.

2. Строим состояние $\xi^{\bullet(t)}$ от объемных сил. Эти силы, фиктивно возникающие в задаче, всегда будут потенциальными. Способ их нахождения связан с решением уравнения (5) и не составляет труда.
3. Вносим поправку в ГУ для $\xi^{\circ(t)}$.
4. Методом граничных состояний решаем задачу для $\xi^{\circ(t)}$:

- а) набираем исходный базис внутренних и граничных состояний на основе формул Аржаных—Слободянского, соотношения Коши и обобщенного закона Гука. Требуется два разных базиса для нулевой и последующих итераций;
- б) проводим ортогонализацию каждого базиса [7] в соответствии со скалярным произведением (1);
- в) строим матрицу БСУ и вектор правых частей БСУ. Для первой и второй основных задач «скелетом» является единичная матрица. В случае основной смешанной задачи

$$Q_{tm} = \int_{S_p} (u_x^{(t)} p_x^{(m)} + u_y^{(t)} p_y^{(m)} + u_z^{(t)} p_z^{(m)}) ds + \\ + \int_{S_u} (p_x^{(t)} u_x^{(m)} + p_y^{(t)} u_y^{(m)} + p_z^{(t)} u_z^{(m)}) ds.$$

В первой и второй основных задачах правые части в соответствии с определениями (6), (7) таковы:

$$q_t = \int_{\partial V} (p_x u_x^{(t)} + p_y u_y^{(t)} + p_z u_z^{(t)}) ds, \\ q_t = \int_{\partial V} (u_x p_x^{(t)} + u_y p_y^{(t)} + u_z p_z^{(t)}) ds.$$

В основной смешанной задаче в соответствии с (8) правые части уравнения имеют развернутый вид:

$$q_t = \int_{S_p} (p_x u_x^{(t)} + p_y u_y^{(t)} + p_z u_z^{(t)}) ds + \int_{S_u} (u_x p_x^{(t)} + u_y p_y^{(t)} + u_z p_z^{(t)}) ds;$$

- г) рассчитываем коэффициенты Фурье: $\mathbf{c} = Q^{-1} \mathbf{q}$;
- д) о сходимости решения на каждой итерации косвенно свидетельствует насыщение суммы Бесселя (левая часть неравенства Бесселя), характеризуемая величиной $b = \sqrt{\sum_n \mathbf{c}_n^2}$ разложения решения в ряд Фурье, и среднеквадратическая интегральная невязка построенного решения на границе с заданными ГУ.

5. Строим результирующее решение задачи

$$\xi = \sum_k \omega^k \xi^{(k)}$$

и изоморфное ему граничное состояние

$$\gamma = \sum_k \omega^k \gamma^{(k)}.$$

Последнее позволяет непосредственно оценить погрешность построенного решения сравнением граничного состояния с заданными ГУ и при необходимости повторить процедуру за счёт увеличения мощности удерживаемого отрезка базиса.

3. Метод эталонных решений для включения параметров граничных условий основной смешанной задачи. В качестве примера эффективного применения разработанного аппарата рассмотрим осесимметричную задачу для тела (рис. 1), допускающую различные сочетания параметров нагружения трех типов постановок (см. таблицу, наборы параметров, участвующих в граничных условиях, определены параметризацией: на S_1, S_2, S_3 применены соответственно полярная, цилиндрическая, сферическая системы координат). Ниже понимаем: $S_u = S_1, S_p = S_2 \cup S_3$.

Будем предполагать, что геометрические пропорции зафиксированы (R — параметр геометрического подобия), материал тела, как и его упругие модули, варьируется произвольным образом. Требуется выписать ППР, учитывающее произвольное сочетание параметров нагружения.

Для построения решения можно использовать известный процесс Шварца [10], итерационно и поочередно учитывая ГУ лишь на одном из трех участков границы (он и сейчас эффективно используется [11]). Однако более эффективным является прямой МГС, который и был реально применен.

Эталонные состояния ξ^I, ξ^{II} и ξ^{III} строились независимо друг от друга при ГУ, приведенных в таблице.

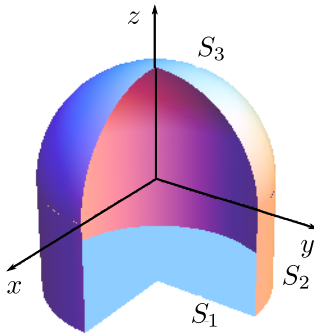


Рис. 1. Деформируемое тело
[Figure 1. Deformable body]

Граничные условия в эталонных задачах
[Border conditions in the reference problems]

	$\mathbf{u} _{S_1}$	$\mathbf{p} _{S_2}$	$\mathbf{p} _{S_3}$
Problem 1	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \sin 2\theta \\ \cos \theta \sin \varphi \sin 2\theta \\ 0 \end{pmatrix}$
Problem 2	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} z \cos \varphi \\ z \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Problem 3	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (-1 + r^2)^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

На рис. 2 представлены линии уровня напряжений в сечении $y = 0$ при линейной комбинации состояний $\xi^I, \xi^{II}, \xi^{III}$ соответственно в задачах 1, 2, 3:

$$\xi = m_1 \xi^I + m_2 \xi^{II} + m_3 \xi^{III}$$

при значениях параметров $m_1 = -0.01, m_2 = -0.005, m_3 = 0.002$ (безразмерная постановка).

Значения m_1, m_2, m_3 определяются постановкой конкретных ГУ.

Представленные на осевых купюрах линии уровня механических характеристик комментариев не требуют. Внешней области по отношению к телу соответствует нулевой уровень характеристики. Более светлым слоям по отношению друг другу соответствуют более высокие по уровню значения.

После перехода к размерным величинам получаем ППР, учитывающее произвольное сочетание параметров нагружения:

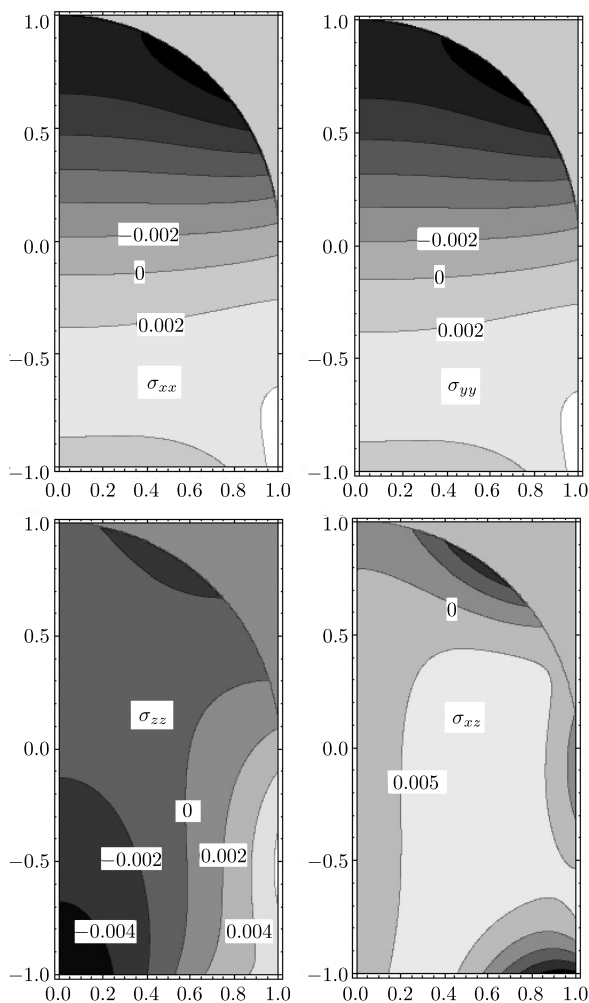


Рис. 2. Линии уровня безразмерных напряжений
 [Figure 2. The level lines of dimensionless stresses]

$$\begin{aligned}
 u_x = & k[0.245xz/R + 0.218xz^2/R^2 - 0.229xz^4/R^4 + \\
 & + 4(-0.115x^5z^3/R^5 + 0.117x^3z^3/R^5 + 0.116xy^2z^3/R^5 - \\
 & - 0.225x^3y^2z^3/R^7 - 0.117xz^4/R^4 - 0.134xz^5/R^5)(\nu - 0.25) + \\
 & + 16(-0.167x^3y^2z^3/R^7 - 0.125xz^4/R^4 - 0.124xz^5/R^5)(\nu - 0.25)^2] + \\
 & + m[-0.214x^3z^2/R^4 - 0.210xy^2z^2/R^4 + 0.322x^3y^2z^3/R^7 + 0.271xz^4/R^4 + \\
 & + 4(-0.177xz^2/R^2 + 0.172x^3y^2z^3/R^7 + 0.211xz^4/R^4)(\nu - 0.25) + \\
 & + 16(-0.201xz^2/R^2 + 0.217xz^4/R^4)(\nu - 0.25)^2] + \\
 & + n[-0.309xz/R + 0.248x^3z^3/R^5 - 0.243xy^2z^5/R^7 + \\
 & + 4(-0.234xz/R - 0.273x^3z^5/R^7 - 0.274xy^2z^5/R^7)(\nu - 0.25) + \\
 & + 16(-0.191xz/R - 0.196x^3y^2z/R^5 - 0.283x^3z^5/R^7 - 0.285xy^2z^5/R^7)(\nu - 0.25)^2];
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_y = & k[0.245yz/R + 0.218yz^2/R^2 - 0.228yz^4/R^4 + \\
 & + 4(0.115x^2yz^3/R^5 + 0.116y^3z^3/R^5 - 0.229x^2y^3z^3/R^7 - \\
 & - 0.115yz^4/R^4 - 0.134yz^5/R^5)(\nu - 0.25) + \\
 & + 16(-0.171x^2y^3z^3/R^7 - 0.123yz^4/R^4 - 0.124yz^5/R^5)(\nu - 0.25)^2] + \\
 & + m[0.315x^2y^3z^3/R^7 + 0.270yz^4/R^4 + \\
 & + 4(-0.177yz^2/R^2 + 0.173x^2y^3z^3/R^7 + 0.210yz^4/R^4)(\nu - 0.25) + \\
 & + 16(-0.201yz^2/R^2 + 0.216yz^4/R^4)(\nu - 0.25)^2] + \\
 & + n[-0.309yz/R + 0.246y^3z^3/R^5 - 0.243x^2yz^5/R^7 - 0.241y^3z^5/R^7 + \\
 & + 4(-0.234yz/R - 0.274x^2yz^5/R^7 - 0.272y^3z^5/R^7)(\nu - 0.25) + \\
 & + 16(-0.286x^2yz^5/R^7 - 0.283y^3z^5/R^7)(\nu - 0.25)^2];
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_z = & k[-0.238x^4y^2z^2/R^7 + 0.183x^2y^2z^3/R^6 + 0.182x^2y^2z^4/R^7 + \\
 & + 4(-0.234x^2y^2z^2/R^5 - 0.239x^4y^2z^2/R^7 - \\
 & - 0.234x^2y^4z^2/R^7 + 0.317x^2y^2z^4/R^7)(\nu - 0.25) + \\
 & + 16(0.212x^2z^2/R^3 + 0.213y^2z^2/R^3 + 0.249x^2y^2z^4/R^7)(\nu - 0.25)^2] + \\
 & + m[0.672x^4y^2z^2/R^7 + 0.633x^2y^4z^2/R^7 - 0.754x^2y^2z^4/R^7 + \\
 & + (0.403x^4y^2z^2/R^7 + 0.401x^2y^4z^2/R^7 - 0.298x^2y^2z^3/R^6 - \\
 & - 0.257x^2y^2z^4/R^7)(4(\nu - 0.25) + 16(\nu - 0.25)^2] + \\
 & + n[0.836x^2y^2z^2/R^5 - 0.801x^4y^2z^2/R^7 - 0.746x^2y^4z^2/R^7 + \\
 & + 4(0.331x^2z/R^2 + 0.332y^2z/R^2 - 0.322x^2y^2z/R^4 + \\
 & + 0.577x^2y^2z^2/R^5)(\nu - 0.25) + \\
 & + 16(0.608x^2y^2z^2/R^5 - 0.337x^2y^2z/R^4 - 0.331x^2z^2/R^3 - \\
 & - 0.331y^2z^2/R^3)(\nu - 0.25)^2].
 \end{aligned}$$

Выводы

1. МГС является эффективным средством организации ресурсосберегающих ППР.
2. МГСВ рациональным образом обеспечивает присутствие констант среды в ППР.
3. Использование «эталонных» решений позволяет включать параметры ГУ основной смешанной задачи эластостатики в аналитическое представление решения.

Описанная методология позволяет получать ППР не только в задачах теории упругости (для односвязных, многосвязных тел, ограниченных и неограниченных, содержащих поверхностные особенности, однородных и неоднородных, с консервативными и непотенциальными объемными силами, изотропных и анизотропных, с основными и смешанными граничными условиями), но и в любых задачах математической физики, пространства решений которых являются гильбертовыми.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-41-480729 p_a).

Библиографический список

1. Новикова О. С. Методология построения полнопараметрических аналитических решений основных смешанных задач эластостатики для обеспечения этапов технологических процессов обработки давлением / *Проблемы и перспективы развития машиностроения*. Сб. науч. трудов междунар. науч.-техн. конф., посвящ. 60-летию Липецкого государственного технического университета. Т. 2. Липецк, 2016. С. 203–208.
2. Мусхелишвили Н. И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости*. М.: Наука, 1966. 708 с.
3. Лурье А. И. *Теория упругости*. М.: Наука, 1970. 940 с.
4. Работнов Ю. Н. *Механика деформируемого твердого тела*. М.: Наука, 1979. 744 с.
5. Седов Л. И. *Методы подобия и размерности в механике*. М.: Наука, 1972. 440 с.
6. Neuber H. Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie. Der Hohlkegel unter Einzellast als Beispiel // *ZAMM*, 1934. vol. 14, no. 4. pp. 203–212. doi: [10.1002/zamm.19340140404](https://doi.org/10.1002/zamm.19340140404).
7. Penkov V. B., Satalkina L. V., Shulmin A. S. The use of the method of boundary states to analyse an elastic medium with cavities and inclusions // *J. Appl. Math. Mech.*, 2014. vol. 78, no. 4. pp. 384–394. doi: [10.1016/j.japmathmech.2014.12.010](https://doi.org/10.1016/j.japmathmech.2014.12.010).
8. Nayfeh A. H. *Introduction to perturbation techniques*. New York: A wiley-interscience publication. John Wiley & Sons, Inc., 1993. xiv+519 pp.
9. Минаева Н. В. *Метод возмущений в механике деформируемых тел*. М.: Научная книга, 2002. 156 с.
10. Schwarz H. A. Über einige Abbildungsaufgaben // *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. vol. 1869, no. 70. pp. 105–120. doi: [10.1515/crll.1869.70.105](https://doi.org/10.1515/crll.1869.70.105).
11. Стружанов В. В. Об одном итерационном методе расчета напряжений в неодносвязных телах // *Вычислительные технологии*, 2006. Т. 11, № 6. С. 118–124.

MSC: 74A10, 74S30


A construction algorithm for full parametric analytical solutions in the basic mixed problem of elastostatics for the simply connected body

*V. B. Penkov, O. S. Novikova, L. V. Levina*Lipetsk State Technical University,
30, Moskovskaya st., 398055, Russian Federation.

Abstract

Using analytical solutions to analyze the state of the bodies at the research and engineering calculations provides computing resources. We propose a methodology for structuring full parametric solutions to the problems of mathematical physics, including the basic mixed problem of elastostatic. The tool is a relatively new energy method of boundary states based on computer algebra. The method is based on the concept of state of the medium, isomorphism of Hilbert spaces of internal and boundary states of the body. The method is self-sufficient in the sense that, in principle, does not require comparison of the solution of test problems with those constructed by other methods. For inclusion in the solution in an explicit form of the medium constants we recommend saving computing resources method of boundary states with perturbations in which the direct method is combined with approach to A. Poincare. To explicitly include in the decision parameters the boundary conditions we suggested the technology of the reference solutions. Its effectiveness is demonstrated on a concrete example the basic mixed problem of elastostatic. The object of research is a limited simply connected body whose boundary is divided into three sections. At each site held individual method of parameterization of the points of the border: polar, cylindrical, spherical coordinate systems. The calculations are made using the computer algebra of the system “Mathematica” and demonstrated the effectiveness of the developed methodology to achieve this goal. The sequence of steps leading to guaranteed achievement of goal is described. The decision of a concrete task is made. Its results are presented in explicit analytical form containing all the parameters of the boundary value prob-

Short Communication

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Penkov V. B., Novikova O. S., Levina L. V. A construction algorithm for full parametric analytical solutions in the basic mixed problem of elastostatics for the simply connected body, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 3, pp. 586–598. doi: [10.14498/vsgtu1603](https://doi.org/10.14498/vsgtu1603) (In Russian).

Authors' Details:

Viktor B. Penkov  <http://orcid.org/0000-0002-6059-1856>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of General Mechanics; e-mail: vbpenkov@mail.ru

Olga S. Novikova  <http://orcid.org/0000-0003-2577-4515>

Postgraduate Student; Dept. of General Mechanics; e-mail: _o_l_g_a_@bk.ru

Lyubov V. Levina  <http://orcid.org/0000-0002-7441-835X>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics;
e-mail: satalkina_lyubov@mail.ru

lem of elasticity theory and illustrated graphically after calculation by the analytical solution for a concrete set of parameter values.

Keywords: method of boundary states, method of boundary states with perturbations, full parametric analytical solutions, basic mixed problem, elastostatics, computer algebra.

Received: 25th January, 2018 / Revised: 25th July, 2018 /

Accepted: 3rd September, 2018 / First online: 13th October, 2018

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-41-480729 r_a).

References

1. Novikova O. S. A construction methodology for full parametric analytical solutions in the basic mixed problems of elastostatics to ensure the stages of technological processes of pressure treatment, In: *Problemy i perspektivy razvitiia mashinostroeniia* [Problems and prospects for the development of mechanical engineering], vol. 2. Lipetsk, 2016, pp. 203–208 (In Russian).
2. Muskhelishvili N. I. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Fundamental Equations Plane Theory of Elasticity Torsion and Bending. Dordrecht, Springer, 1977, xxxi+732 pp. doi: [10.1007/978-94-017-3034-1](https://doi.org/10.1007/978-94-017-3034-1)
3. Lur'e A. I. *Teoriia uprugosti* [Theory of Elasticity]. Moscow, Nauka, 1970, 940 pp. (In Russian)
4. Rabotnov Yu. N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of a deformable rigid body]. Moscow, Nauka, 1979, 744 pp. (In Russian)
5. Sedov L. I. *Similarity and dimensional methods in mechanics*. Moscow, Mir Publ., 1982, 424 pp.
6. Neuber H. Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie. Der Hohlkegel unter Einzellast als Beispiel, *ZAMM*, 1934, vol. 14, no. 4, pp. 203–212. doi: [10.1002/zamm.19340140404](https://doi.org/10.1002/zamm.19340140404).
7. Penkov V. B., Satalkina L. V., Shulmin A. S. The use of the method of boundary states to analyse an elastic medium with cavities and inclusions, *J. Appl. Math. Mech.*, 2014, vol. 78, no. 4, pp. 384–394. doi: [10.1016/j.jappmathmech.2014.12.010](https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2014.12.010).
8. Nayfeh A. H. *Introduction to perturbation techniques*. New York, A wiley-interscience publication. John Wiley & Sons, Inc., 1993, xiv+519 pp.
9. Minaeva N. V. *Metod vozmushchenii v mekhanike deformiruemymkh tel* [Perturbation Method in Mechanics of Deformable Bodies]. Moscow, Nauchnaia kniga, 2002, 156 pp. (In Russian)
10. Schwarz H. A. Über einige Abbildungsaufgaben, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 1869, no. 70, pp. 105–120. doi: [10.1515/crll.1869.70.105](https://doi.org/10.1515/crll.1869.70.105).
11. Struzhanov V. V. On one iteration method of stress calculation in non-simply connected solids, *Computational Technologies*, 2006, vol. 11, no. 6, pp. 118–124 (In Russian).