Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22, № 4. С. 750–761
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) http://doi.org/10.14498/vsgtu1653

УДК 517.958:539.3(1)

Динамическая устойчивость геометрически нерегулярной нагретой пологой цилиндрической оболочки в сверхзвуковом потоке газа

Г. Н. Белосточный, О. А. Мыльцина

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
(национальный исследовательский университет),
Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83.

Аннотация

На базе модели типа Лява рассматривается нагретая до постоянной температуры геометрически нерегулярная пологая цилиндрическая оболочка, обдуваемая сверхзвуковым потоком газа со стороны одной из ее основных поверхностей. За основу взята континуальная модель термоупругой системы в виде тонкостенной оболочки, подкрепленной ребрами вдоль набегающего газового потока. Сингулярная система уравнений динамической термоустойчивости геометрически нерегулярной оболочки содержит слагаемые, учитывающие «растяжение-сжатие» и сдвиг подкрепляющих элементов в тангенциальной плоскости, тангенциальные усилия, вызванные нагревом оболочки, и поперечную нагрузку, стандартным образом записанную по «поршневой теории».

Тангенциальные усилия предварительно определяются как решение сингулярных дифференциальных уравнений безмоментной термоупругости геометрически нерегулярной оболочки с учетом краевых усилий.

Решение системы динамических уравнений термоупругости оболочки разыскивается в виде суммы двойного тригонометрического ряда (для функции прогиба) с переменными по временной координате коэффициентами. На основании метода Галеркина получена однородная система для коэффициентов аппроксимирующего ряда, которая сведена к одному дифференциальному уравнению четвертого порядка. Решение приводится во втором приближении, что соответствует двум полуволнам в направлении потока и одной полуволне в перпендикулярном направлении. На основании стандартных методов анализа динамической устойчивости тонкостенных конструкций определяются критические значения скоростей газового потока.

Краткое сообщение

Образец для цитирования

Белосточный Г. Н., Мыльцина О. А. Динамическая устойчивость геометрически нерегулярной нагретой пологой цилиндрической оболочки в сверхзвуковом потоке газа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 4. С. 750–761. doi: 10.14498/vsgtu1653.

Сведения об авторах

Григорий Николаевич Белосточный http://orcid.org/0000-0003-4471-6599
доктор технических наук, профессор; профессор; каф. математической теории упругости и биомеханики; e-mail: belostochny@mail.ru

Ольга Анатольевна Мыльцина http://orcid.org/0000-0003-4718-2772
кандидат физико-математических наук; ассистент; каф. теории функций и стохастического анализа; e-mail: omyltcina@yandex.ru

Количественные результаты приводятся в виде таблиц, иллюстрирующих влияние геометрических параметров термоупругой системы «оболочка-ребра», температуры на устойчивость геометрически нерегулярной цилиндрической оболочки в сверхзвуковом потоке газа с учетом демпфирования.

Ключевые слова: динамическая устойчивость, температура, пологие оболочки, сверхзвук, континуальность, обобщенные функции, поршневая теория, аэродинамика, критические скорости, ребра жесткости, демпфирование, кривизна, критерий Гурвица, изотропия.

Получение: 11 октября 2018 г. / Исправление: 10 ноября 2018 г. / Принятие: 12 ноября 2018 г. / Публикация онлайн: 21 декабря 2018 г.

Геометрически нерегулярные тонкостенные упругие системы, обширный класс которых составляют ребристые оболочки и пластинки, широко используются в различных областях современной техники. Условия эксплуатации таких систем предусматривают совместное воздействие температурных полей и высокоскоростных газовых потоков. Исследованию упругого поведения гладких пластин и оболочек на основе атермической теории посвящено большое число работ, полный перечень которых содержал бы десятки наименований. Ограничимся некоторыми из них [1–6]. Значительно меньше работ посвящено исследованиям совместного воздействия температурных факторов и сверхзвукового потока на тонкостенные системы. Важные для практики результаты в этой области содержатся в работах [7–9].

Работы, в которых анализируется влияние подкрепляющих ребер на поведение оболочки, находящейся под действием сверхзвукового потока, на базе термической теории, в открытой научной литературе отсутствуют. Это связано не с маловажностью проблемы, а прежде всего с чрезвычайной математической сложностью таких задач, решаемых на основе дискретной модели «оболочка–ребра». Использование континуальной модели типа «конструктивная анизотропия» мало пригодно для практических целей, так как количественные результаты, полученные на ее основе, далеки от физической реальности.

Обращение к континуальным моделям на основе теории обобщенных функций, основные положения которых содержится в работах [10–16], позволило сводить решения задач статической и динамической термоупругости ребристых оболочек к интегрированию систем сингулярных дифференциальных уравнений точными и приближенными методами высшего анализа [17, 18], что немаловажно для инженерной практики.

1. Система сингулярных дифференциальных уравнений динамической термоупругости пологой геометрически нерегулярной цилиндрической оболочки, стандартным образом отнесенной к декартовым координатам на основе континуальной модели, в которых учет тангенциальных усилий записывается в форме Рейснера [19], в компонентах поля перемещений примет вид

$$u_{,11} + \frac{1-\nu}{2}u_{,22} + \frac{1+\nu}{2}v_{,12} - k_{11}w_{,1} + \varepsilon_1\frac{1-\nu}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{h}(u_{,2}+v_{,1})_{,2}\delta(x-x_i) = 0,$$

$$\frac{1+\nu}{2}u,_{21}+v,_{22}+\frac{1-\nu}{2}v,_{11}-\nu k_{11}w,_{2}+\varepsilon_2\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{h}a_i(\nu u,_{1}+v,_{2}),_{2}\delta(x-x_i)=0,$$

$$\begin{aligned}&\nabla^2\nabla^2 w+\frac{B}{D}k_{11}^2 w-k_{11}\frac{B}{D}(u,_{1}+\nu v,_{2})-\\&\quad-\frac{1}{D}\big[(T_0^{11}w,_{1}),_{1}+(T_0^{12}w,_{1}),_{2}+(T_0^{12}w,_{2}),_{1}+(T_0^{22}w,_{2}),_{2}\big]-\\&\quad-\frac{1}{D}\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{h}a_i(T_0^{22}w,_{2})\delta(x-x_i)+\\&\quad+\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{h_i}{h}\Big)^3\Phi_{3i}a_i w,_{2222}\delta(x-x_i)+\\&\quad+2(1-\nu)\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{h_i}{h}\Big)^3\Phi_{3i}a_i w,_{122}\big|_{x_i}\frac{d\delta(x-x_i)}{dx}=\\&\quad=\frac{\gamma h}{gD}w,_{tt}\Big[1+\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{h}a_i\delta(x-x_i)\Big]-\frac{\mu}{hD}w,_{t}-p_0\frac{\varkappa\mu}{D}w,_{2},\end{aligned}\tag{1}$$

где $p_0\frac{\varkappa\mu}{D}w,_{2}$ — относительная интенсивность поперечной нагрузки, вызванная прогибом пластинки, стандартным образом записана согласно поршневой теории [1,20,21]; $M=v_y/c_0$ — число Маха; v_y — невозмущенная скорость набегающего газового потока; c_0 — скорость звука на бесконечности; u, v, w — компоненты поля (векторы) перемещений; h_i/h — относительная высота i-того ребра, число которых n; a_i — ширина i-того ребра; k_{11} — кривизна цилиндрической оболочки; $D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu)}$; ν — коэффициент Пуассона; E — модуль Юнга, γ — удельный вес; g — интенсивность поля тяжести;

$$\Phi_{3i}=1+3\frac{h_i}{h}+\Big(\frac{h_i}{h}\Big)^3;$$

μ — коэффициент демпфирования; $\delta(x-x_i)$ — обобщенная дельта-функция Дирака [22]; ε_j $(j=0,1)$ — знаковые числа, равные 1 или 0; T_0^{ij} — тангенциальные усилия, вызванные нагревом пластинки до постоянной температуры Θ_0, которые определяются на основании решений системы сингулярных однородных дифференциальных уравнений, описывающих безмоментное состояние термоупругой системы в компонентах поля перемещений $\bar{u}^0(u^0,v^0,w^0)$:

$$\begin{aligned}&u^0,_{11}+\frac{1-\nu}{2}u^0,_{22}+\frac{1+\nu}{2}v^0,_{12}-k_{11}w^0,_{1}+\\&\qquad+\frac{1-\nu}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{h}a_i(u^0,_{2}+v^0,_{1}),_{2}\delta(x-x_i)=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1+\nu}{2}u^0,_{12}+v^0,_{22}+\frac{1-\nu}{2}v^0,_{11}-\nu k_{11}w^0,_{2}+\\&\qquad+\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{h}a_i(v^0,_{2}+\nu u^0,_{1}),_{2}\delta(x-x_i)=0,\end{aligned}$$

$$k_{11}^2 w^0 + k_{11}(u^0_{,1} + \nu v^0_{,2}) = \alpha(1+\nu)k_{11}\Theta_0. \qquad (2)$$

При неоднородных краевых условиях

$$x = 0,\ x = a\colon\quad u^0_{,2} + v^0_{,1} = 0, \quad u^0_{,1} + \nu v^0_{,2} - k_{11}w^0 = \alpha(1+\nu\Theta_0), \quad w^0 = 0;$$
$$y = 0,\ y = b\colon\quad v^0 = 0, \quad u^0_{,2} + v^0_{,1} = 0, \quad w^0 = 0$$

решения сингулярной системы (2) запишутся в элементарных функциях:

$$v^0 = 0, \quad u^0 = \alpha(1+\nu)\Theta_0 x, \quad w^0 = 0,$$

а тангенциальные усилия примут вид

$$T_0^{11} = T_0^{12} = 0, \quad T_0^{22} = -Eh\alpha\Theta_0.$$

Решение системы (1) (в которой отсутствуют инерционные слагаемые в тангенциальной плоскости [1, 7, 8]), тождественно удовлетворяющее условиям шарнирного закрепления всех сторон пологой цилиндрической оболочки

$$\text{при } x = 0,\ x = a\colon\quad T^{12} = 0, \quad T^{11} = 0, \quad w = 0 \quad M^{11} = 0;$$
$$\text{при } y = 0,\ y = b\colon\quad v = 0, \quad T^{12} = 0, \quad w = 0 \quad M^{22} = 0,$$

зададим в виде

$$u(x,y,t) = \tilde{u}(t)u_1(x/a)u_2(y/b), \quad v(x,y,t) = \tilde{v}(t)v_1(x/a)v_2(y/b), \qquad (3)$$
$$w(x,y,t) = w_{11}(t)\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} + w_{12}(t)\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b},$$

где

$$u_1(x/a) = (x/a)^4 - 2(x/a)^3 + (x/a)^2, \quad u_2(y/b) = -(2/3)(y/b)^3 + (y/b)^2,$$
$$v_1(x/a) = (x/a)^4 - 2(x/a)^3 + (x/a)^2, \quad v_2(y/b) = (y/b)(y/b-1).$$

Первые два уравнения системы (1) на основании подстановок (3) с последующим применением процедуры Галеркина [23, 24] перепишутся в виде

$$e_{11}\tilde{u}(t) + e_{12}\tilde{v}(t) = k_{11}a\Big[\pi\frac{b}{a}I_4 w_{11}(t) + \pi\frac{b}{a}I_5 w_{12}(t)\Big],$$
$$e_{21}\tilde{u}(t) + e_{22}\tilde{v}(t) = \nu k_{11}a\big[\pi I_9 w_{11}(t) + 2\pi I_{10} w_{12}(t)\big].$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$e_{11} = \frac{b}{a}I_1 + \frac{1-\nu}{2}\frac{a}{b}I_2, \quad e_{12} = \frac{1+\nu}{2}I_3,$$
$$e_{21} = \frac{1+\nu}{2}I_6, \quad e_{22} = \frac{a}{b}I_7 + \frac{1-\nu}{2}\frac{b}{a}I_8;$$
$$I_1 = \int_0^1\int_0^1 \tilde{u}_{1,11}\tilde{u}_1\tilde{u}_2^2\,dXdY, \quad I_2 = \int_0^1\int_0^1 \tilde{u}_{2,22}\tilde{u}_2\tilde{u}_1^2\,dXdY,$$
$$I_3 = \int_0^1\int_0^1 \tilde{v}_{1,1}\tilde{u}_1\tilde{u}_2\tilde{v}_{2,2}\,dXdY, \ldots,$$

$$I_{10} = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{v}_1 \tilde{v}_2 \sin(\pi X) \cos(2\pi Y) dX dY, \quad X = x/a, \quad Y = y/b.$$

Разрешая неоднородную алгебраическую систему относительно коэффициентов $\tilde{u}(t)$ и $\tilde{v}(t)$, получим

$$\tilde{u} = k_{11} a \big(L_1 w_{11}(t) + L_2 w_{12}(t) \big), \quad \tilde{v} = k_{11} a \big(L_3 w_{11}(t) + L_4 w_{12}(t) \big),$$

где L_j — безразмерные величины:

$$L_1 = \frac{\pi \frac{b}{a} I_4 e_{22} - \nu \pi I_9 e_{12}}{e_{11} e_{22} - e_{12} e_{21}}, \quad L_2 = \frac{\pi \frac{b}{a} I_5 e_{22} - \nu 2\pi I_{10} e_{12}}{e_{11} e_{22} - e_{12} e_{21}},$$
$$L_3 = \frac{-\pi \frac{b}{a} I_4 e_{21} + \nu \pi I_9 e_{11}}{e_{11} e_{22} - e_{12} e_{21}}, \quad L_4 = \frac{-\pi \frac{b}{a} I_5 e_{21} + \nu 2\pi I_{10} e_{11}}{e_{11} e_{22} - e_{12} e_{21}}.$$

Окончательно функции $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$ примут следующий вид:

$$u(x, y, t) = k_{11} a \big(L_1 w_{11}(t) + L_2 w_{12}(t) \big) u_1(x/a) u_2(y/b),$$
$$v(x, y, t) = k_{11} a \big(L_3 w_{11}(t) + L_4 w_{12}(t) \big) v_1(x/a) v_2(y/b).$$

Из третьего уравнения системы (1) на основании аналогичных преобразований получим систему обыкновенных однородных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов $w_{11}(t)$ и $w_{12}(t)$:

$$\xi_{11} [w_{11}] + \xi_{12} w_{12} = 0, \quad \xi_{21} w_{11} + \xi_{22} [w_{12}] = 0, \tag{4}$$

где ξ_{kl} — дифференциальные операторы:

$$\xi_{11} = \frac{\gamma h a^4}{g D} \left(1 + 2 \sum_{i=1}^{n} \tilde{\beta}_i^s \right) \frac{d^2}{dt^2} + \tilde{\mu} \frac{d}{dt} + f_{11} \Big(k_{11}, \Theta_0, \frac{h_i}{h} \Big),$$
$$\xi_{12} = \frac{p_0 \varkappa M a^3}{D} 4\pi \frac{a}{b} I_{13} - \tilde{f}_{12}, \quad \xi_{21} = \frac{p_0 \varkappa M a^3}{D} 2\pi \frac{a}{b} I_{16} - \tilde{f}_{11},$$
$$\xi_{22} = \frac{\gamma h a^4}{g D} \left(1 + 2 \sum_{i=1}^{n} \tilde{\beta}_i^s \right) \frac{d^2}{dt^2} + \tilde{\mu} \frac{d}{dt} + f_{12} \Big(k_{11}, \Theta_0, \frac{h_i}{h} \Big),$$

в которых

$$f_{11} = \left(\pi^2 + \Big(\frac{\pi a}{b} \Big)^2 \right)^2 + 12 \Big(\frac{h_i}{h} \Big)^2 (k_{11} a)^2 - 48 \Big(\frac{a}{h} \Big)^2 (k_{11} a)^2 \Big(L_1 I_{11} + \nu \frac{a}{b} L_3 I_{12} \Big) -$$
$$- 12(1 - \nu^2) \Big(\frac{\pi a}{b} \Big)^2 \Big(\frac{a}{h} \Big)^2 \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \tilde{\beta}_i^s \right) \alpha \Theta_0 + \Big(\frac{\pi a}{b} \Big)^4 2 \sum_{i=1}^{n} \beta_i^s +$$
$$+ 4(1 - \nu) \pi^2 \Big(\frac{\pi a}{b} \Big)^2 \sum_{i=1}^{n} \beta_i^c,$$

$$\tilde{f}_{12} = 48 \Big(\frac{a}{h} \Big)^2 (k_{11} a)^2 \Big(L_2 I_{11} + \nu \frac{a}{b} L_4 I_{12} \Big),$$

$$\tilde{f}_{11} = 48\Big(\frac{a}{h}\Big)^2 (k_{11}a)^2 \Big(L_1 I_{14} + \nu \frac{a}{b} L_3 I_{15}\Big),$$

$$f_{12} = \Big(\pi^2 + \Big(\frac{2\pi a}{b}\Big)^2\Big)^2 - 12\Big(\frac{a}{h}\Big)^2 (k_{11}a)^2 - 48\Big(\frac{a}{h}\Big)^2 (k_{11}a)^2 \Big(L_2 I_{14} + \nu \frac{a}{b} L_4 I_{15}\Big) -$$
$$- 12(1-\nu^2)\Big(\frac{2\pi a}{b}\Big)^2 \Big(\frac{a}{h}\Big)^2 \Big(1 + \sum_{i=1}^{n} \tilde{\beta}_i^s\Big) \alpha \Theta_0 + \Big(\frac{2\pi a}{b}\Big)^4 2 \sum_{i=1}^{n} \beta_i^s +$$
$$+ 4(1-\nu)\pi^2 \Big(\frac{2\pi a}{b}\Big)^2 \sum_{i=1}^{n} \beta_i^c,$$

$$\beta_i^c = \Big(\frac{h_i}{h}\Big)^3 \frac{a_i}{a} \varPhi_{3i} \cos^2 \frac{\pi x_i}{a}, \quad \beta_i^s = \Big(\frac{h_i}{h}\Big)^3 \frac{a_i}{a} \varPhi_{3i} \sin^2 \frac{\pi x_i}{a}, \quad \tilde{\beta}_i^s = \frac{h_i}{h} \frac{a_i}{a} \sin^2 \frac{\pi x_i}{a}.$$

Система дифференциальных уравнений (4) подстановкой

$$w_{11} = -\xi_{12} \varPhi(t), \quad w_{12} = \xi_{11} \left[\varPhi(t)\right]$$

сводится к одному дифференциальному уравнению четвертого порядка, которое в случае отсутствия демпфирования ($\mu = 0$) содержит только четные производные от функции $\varPhi(t)$:

$$\left[\frac{\gamma h a^4}{gD}\Big(1 + 2\sum_{i=1}^{n} \tilde{\beta}_i^s\Big)\right]^2 \frac{d^4 \varPhi}{dt^4} + \left[\frac{\gamma h a^4}{gD}\Big(1 + 2\sum_{i=1}^{n} \tilde{\beta}_i^s\Big)(f_{11} + f_{12})\right] \frac{d^2 \varPhi}{dt^2} +$$
$$+ \left[f_{11} f_{12} - 8\pi \Big(\frac{a}{b}\Big)^2 I_{13} I_{16} \tilde{M} + \tilde{M}\Big(4\pi \frac{a}{b} I_{13} \tilde{f}_{11} + 2\pi \frac{a}{b} I_{16} \tilde{f}_{12}\Big) - \tilde{f}_{11} \tilde{f}_{12}\right] \varPhi = 0, \tag{5}$$

где $\tilde{M} = \frac{p_0 \varkappa M a^3}{D}$.

Если $\mu \neq 0$, то дифференциальное уравнение для функции $\varPhi(t)$ запишется в виде

$$\frac{d^4 \varPhi}{dt^4} + 2e_1 \frac{d^3 \varPhi}{dt^3} + e_3 \frac{d^2 \varPhi}{dt^2} + e_4 \frac{d \varPhi}{dt} + e_5 \varPhi = 0, \tag{6}$$

где

$$e_1 = \frac{\tilde{\mu}}{\frac{\gamma h a^4}{gD}\left(1 + 2\sum_{i=1}^{n} \tilde{\beta}_i^s\right)}, \quad e_3 = \frac{\frac{\gamma h a^4}{gD}\left(1 + 2\sum_{i=1}^{n} \tilde{\beta}_i^s\right)(f_{11} + f_{12}) + \tilde{\mu}}{\left(\frac{\gamma h a^4}{gD}\left(1 + 2\sum_{i=1}^{n} \tilde{\beta}_i^s\right)\right)^2},$$

$$e_4 = \frac{\tilde{\mu}\,(f_{11} + f_{12})}{\left(\frac{\gamma h a^4}{gD}\left(1 + 2\sum_{i=1}^{n} \tilde{\beta}_i^s\right)\right)^2}, \quad e_5 = \frac{f_{11} f_{12} - \xi_{21}\xi_{12}}{\left(\frac{\gamma h a^4}{gD}\left(1 + 2\sum_{i=1}^{n} \tilde{\beta}_i^s\right)\right)^2}, \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu a^4 h}{D}.$$

Из условия, при котором хотя бы один корень из четырех характеристического уравнения для дифференциального уравнения (5) будет положительным, определяется наименьшее значение относительной скорости потока газа v_y/c_0, при котором прогиб термоупругой системы растет. При учете демпфирования ($\mu \neq 0$) возникает вопрос об устойчивости системы (4), которая сведена к одному дифференциальному уравнению (6). В этом случае это значение скорости потока определяется на основании критерия Гурвица [26]:

$$\Delta_1 = 2e_1 > 0, \quad \Delta_2 = 2e_1e_3 - e_4 > 0, \quad \Delta_3 = 2e_1e_3e_4 - e_4^2 - 4e_1^2e_5 > 0.$$

Кривизна пологой цилиндрической оболочки задавалась в виде $k_{11} = -4\tilde{\delta}/a^2$ [27, 28], где $\tilde{\delta}$ — наибольший подъем оболочки над ее планом. Выражение для относительной кривизны $\tilde{k}_{11}$ принимает вид

$$\tilde{k}_{11} = k_{11}a = -4\frac{\tilde{\delta}}{h}\frac{h}{a},$$

где $\tilde{\delta}/h \in [0, 5]$ [27, 28].

2. Численные результаты приведены в таблице. Вычисления проводились при следующих значениях параметров: $h/a = 0.01$, $a_i/a = 0.01$, $\mu = 0.001$, $a/b = 1$.

Количественный анализ выявил закономерности влияния геометрических параметров и температуры на величины относительных скоростей потока, на-

Значения параметра v_y/c_0 в зависимости от других параметров
[The values of the parameter v_y/c_0 depending on other parameters]

		$h_i/h = 2.5$			$h_i/h = 5$		
$\tilde{k}_{11}$ \ n	0	1	3	5	1	3	5
for $\Theta_0 = 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$							
0.10	0.24	1.50	3.16	3.50	6.47	13.35	14.79
0.15	0.54	1.40	3.06	3.40	6.37	13.25	14.69
0.20	0.97	1.26	2.92	3.26	6.23	13.11	14.55
for $\Theta_0 = 2$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$							
0.10	1.08	0.61	2.22	2.54	5.55	12.34	13.73
0.15	1.39	0.51	2.12	2.44	5.45	12.24	13.63
0.20	1.81	0.37	1.98	2.30	5.31	12.10	13.49
for $\Theta_0 = 4$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$							
0.10	1.93	0.27	1.28	1.58	4.63	11.32	12.67
0.15	2.23	0.37	1.18	1.48	4.53	11.22	12.57
0.20	2.66	0.51	1.04	1.34	4.39	11.08	12.43
for $\Theta_0 = 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$							
0.10	0.24	1.50	3.16	3.51	6.48	13.37	14.80
0.15	0.54	1.40	3.07	3.42	6.39	13.28	14.72
0.20	0.97	1.27	2.94	3.29	6.26	13.16	14.60
for $\Theta_0 = 2$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$							
0.10	1.08	0.61	2.23	2.55	5.56	12.35	13.74
0.15	1.39	0.52	2.13	2.46	5.47	12.26	13.66
0.20	1.81	0.38	2.00	2.33	5.34	12.14	13.54
for $\Theta_0 = 4$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$							
0.10	1.93	0.26	1.29	1.58	4.64	11.33	12.68
0.15	2.23	0.36	1.19	1.49	4.55	11.25	12.60
0.20	2.66	0.49	1.06	1.36	4.42	11.13	12.48

чиная с которых прогибы термоупругой системы увеличиваются во времени, и сделать нижеследующий выводы.

1. Учет в дифференциальных уравнениях системы (1) слагаемых, учитывающих «растяжение-сжатие» ребер и их «сдвиг» в тангенциальной плоскости (слагаемых, содержащих знаковые числа), практически не влияет на величину относительной скорости v_y/c_0 газового потока. По этой причине удерживать эти слагаемые в уравнениях нет необходимости.
2. Увеличение температуры ведет к уменьшению предельной скорости потока при прочих равных условиях.
3. Существенно повышают динамическую устойчивость геометрически нерегулярной оболочки параметры h_i/h и число подкрепляющих элементов n.
4. Величина относительной предельной скорости потока мало чувствительна к изменению относительной кривизны пологой оболочки.

Перечисленные закономерности выявлены для случая двух полуволн в направлении потока и одной полуволны в перпендикулярном направлении. Следует отметить, что при $k_{11} = 0$ полученные решения аналитически преобразуются к решениям, приведенным в работах [25, 29]. В случае «холодной» ($\Theta_0 = 0$) гладкой пластины ($k_{11} = 0$, $a_i/a = 0$) решения принимают вид, приведенный в [21].

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России № 9.8570.2017/8.9.

Библиографический список

1. Вольмир А. С. *Оболочки в потоке жидкости и газа.* М.: Наука, 1979. 320 с.
2. Амбарцумян С. А., Багдасарян Ж. Е. Об устойчивости ортотропных пластинок, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа // *Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение*, 1961. №4. С. 91–96.
3. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Выпучивание и установившийся флайтер термически сжатых панелей, находящихся в сверхзвуковом потоке // *Инж. журн.*, 1961. №2. С. 82–96.
4. Мовчан А. А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе // *ПММ*, 1956. Т. 20, №2. С. 211–222.
5. Дун Мин-дэ, Об устойчивости упругой пластинки при сверхзвуковом обтекании // *Докл. АН СССР*, 1958. Т. 120, №4. С. 726–729.
6. Веденеев В. В. Высокочастотный флаттер прямоугольной пластины // *Изв. РАН. МЖГ*, 2006. №4. С. 173–181.
7. Огибалов П. М., Грибанов В. Ф. *Термоустойчивость пластин и оболочек.* М.: МГУ, 1968. 520 с.
8. Огибалов П. М. *Вопросы динамики и устойчивости оболочек.* М.: МГУ, 1963. 417 с.
9. Болотин В. В. Температурное выпучивание пластин и пологих оболочек в сверхзвуковом потоке газа / *Расчеты на прочность*, Вып. 6. М.: Машгиз, 1960. С. 190–216.

10. Жилин П. А. Линейная теория ребристых оболочек // *Изв. АН СССР. МТТ*, 1970. № 4. С. 150–166.
11. Белосточный Г. Н., Ульянова О. И. Континуальная модель композиции из оболочек вращения с термочувствительной толщиной // *Изв. РАН. МТТ*, 2011. № 2. С. 184–191.
12. Белосточный Г. Н., Рассудов В. М. Континуальная модель термочувствительной ортотропной системы «оболочка–ребра» с учетом влияния больших прогибов / *Механика деформируемых сред*, Вып. 8. Саратов: Сарат. политехн. ин-т, 1983. С. 10–22.
13. Белосточный Г. Н., Рассудов В. М. Континуальный подход к термоустойчивости упругих систем «пластинка–ребра» / *Прикладная теория упругости.* Саратов: Сарат. политехн. ин-т, 1980. С. 94–99.
14. Жилин П. А. Общая теория ребристых оболочек. Прочность гидротурбин / *Тр. ЦКТИ*, Вып. 8. Л., 1968. С. 46–70.
15. Карпов В. В., Сальников А. Ю. Вариационный метод вывода нелинейных уравнений движения пологих ребристых оболочек // *Вестн. гражд. инженеров*, 2008. № 4(17). С. 121–124.
16. Белосточный Г. Н., Мыльцина О. А. Уравнения термоупругости композиций из оболочек вращения // *Вестник СГТУ*, 2011. № 4 (59). Вып. 1. С. 56–64.
17. Онанов Г. Г. Уравнения с сингулярными коэффициентами типа дельта-функции и ее производных // *Докл. АН СССР*, 1970. Т. 191, № 5. С. 997–1000.
18. Белосточный Г. Н. Аналитические методы определения замкнутых интегралов сингулярных дифференциальных уравнений термоупругости геометрически нерегулярных оболочек // *Докл. Акад. воен. наук*, 1999. № 1. С. 14–26.
19. Geckeler J. W. Elastostatik / *Handbuch der Physik.* vol. 6, 1928. pp. 141–308 (In German).
20. Ильюшин А. А. Закон плоских сечений в аэродинамики больших сверхзвуковых скоростей // *ПММ*, 1956. № 6. С. 733–755.
21. Вольмир А. С. *Устойчивость деформируемых систем.* М.: Наука, 1967. 984 с.
22. Владимиров В. С. *Обобщенные функции в математической физике.* М.: Наука, 1979. 319 с.
23. Канторович Л. В., Крылов В. И. *Приближенные методы высшего анализа.* М.: Физматлит, 1962. 708 с.
24. Rektorys K. *Variational methods in mathematics, science and engineering.* Dordrecht, Boston, London: D. Reidel Publ., 1980. 571 pp.; doi: 10.1007/978-94-011-6450-4.
25. Белосточный Г. Н., Рассудов В. М. Термоупругие системы типа «пластинка–ребра» в сверхзвуковом потоке газа / *Прикладная теория упругости*, Вып. 8. Саратов: Сарат. политехн. ин-т, 1983. С. 114–121.
26. Егоров К. В. *Основы теории автоматического регулирования.* М.: Энергия, 1967. 648 с.
27. Рассудов В. М., Красюков В. П., Панкратов Н. Д. *Некоторые задачи термоупругости пластинок и пологих оболочек.* Саратов: Сарат. ун-т, 1973. 155 с.
28. Назаров А. А. *Основы теории и методы расчета пологих оболочек.* Л., М.: Стройиздат, 1966. 304 с.
29. Мыльцина О. А., Белосточный Г. Н. Устойчивость нагретой ортотропной геометрически нерегулярной пластинки в сверхзвуковом потоке газа // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2017. № 4. С. 109–120. doi: 10.15593/perm.mech/2017.4.08.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 4, pp. 750–761
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) http://doi.org/10.14498/vsgtu1653

MSC: 74F05, 74K20

Dynamic stability of heated geometrically irregular cylindrical shell in supersonic gas flow

G. N. Belostochnyi, O. A. Myltcina

N. G. Chernyshevsky Saratov State University (National Research University),
83, Astrakhanskaya st., Saratov, 410012, Russian Federation.

Abstract

On the basis of the Love model, a geometrically irregular heated cylindrical shell blown by a supersonic gas flow from one of its main surfaces is considered. The continuum model of a thermoelastic system in the form of a thin-walled shell supported by ribs along the incoming gas flow is taken as a basis. The singular system of equations for the dynamic thermal stability of a geometrically irregular shell contains terms that take into account the tension-compression and the shift of the reinforcing elements in the tangential plane, the tangential forces caused by the heating of the shell and the transverse load, as standard recorded by the piston theory. The solution of a singular system of differential equations in displacements, in the second approximation for the deflection function, is sought in the form of a double trigonometric series with time coordinate variables.

Tangential forces are predefined as the solution of singular differential equations of non-moment thermoelasticity of a geometrically irregular shell taking into account boundary forces.

The solution of the system of dynamic equations of thermoelasticity of the shell is sought in the form of the sum of the double trigonometric series (for the deflection function) with time coordinate variable coefficients. On the basis of the Galerkin method, a homogeneous system for the coefficients of the approximating series is obtained, which is reduced to one fourth-order differential equation. The solution is given in the second approximation, which corresponds to two half-waves in the direction of flow and one half-wave in the perpendicular direction. On the basis of standard methods of analysis of dynamic stability of thin-walled structures are determined critical values of the gas flow rate.

The quantitative results are presented in the form of tables illustrating the influence of the geometrical parameters of the thermoelastic shell-edge

Short Communication

Please cite this article in press as:
Belostochnyi G. N., Myltcina O. A. Dynamic stability of heated geometrically irregular cylindrical shell in supersonic gas flow, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 4, pp. 750–761. doi: 10.14498/vsgtu1653 (In Russian).

Authors' Details:

Grigory N. Belostochnyi http://orcid.org/0000-0003-4471-6599
Dr. Techn. Sci.; Professor; Dept. of Mathematic Theory of Elasticity & Biomechanics; e-mail: belostochny@mail.ru

Olga A. Myltcina http://orcid.org/0000-0003-4718-2772
Cand. Phys. & Math. Sci.; Assistant; Dept. of Functions & Approxmation Theory; e-mail: omyltcina@yandex.ru

system, temperature and damping on the stability of a geometrically irregular cylindrical shell in a supersonic gas flow.

Keywords: dynamic stability, temperature, flat shells, supersonic, continuity, generalized functions, piston theory, aerodynamics, critical velocities, ribs, damping, curvature, Routh–Hurwitz stability criterion, isotropy.

Received: 11th October, 2018 / Revised: 10th November, 2018 / Accepted: 12th November, 2018 / First online: 21st December, 2018

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The results have been obtained within the State Assignment of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation no. 9.8570.2017/8.9.

References

1. Vol'mir A. S. *Obolochki v potoke zhidkosti i gaza* [The shells in flow liquid and gas]. Moscow, Nauka, 1979, 320 pp. (In Russian)
2. Ambartsumyan S. A. Bagdasaryan Zh. E. Of the stability of orthotropic plates streamlined by a supersonic gas flow, *Izv. Akad. Nauk SSSR, OTN, Mekhanika i Mashinostroenie*, 1961, no. 4, pp. 91–96 (In Russian).
3. Bolotin V. V., Novichkov Yu. N. Buckling and steady-state flayter thermally compressed panels in supersonic flow, *Inzhenernyi Zhurnal*, 1961, no. 2, pp. 82–96 (In Russian).
4. Movchan A. A. Oscillations of the plate moving in the gas, *Prikladnaia Matematika i Mekhanika*, 1956, vol. 20, no. 2, pp. 211–222 (In Russian).
5. Tung Ming-teh, The stability of an elastic plate in a supersonic flow, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1958, vol. 120, no. 4, pp. 726–729 (In Russian).
6. Vedeneev V. V. High-frequency flutter of a rectangular plate, *Fluid Dyn.*, 2006, vol. 41, no. 4, pp. 641–648. doi: 10.1007/s10697-006-0083-2.
7. Ogibalov P. M., Gribanov V. F. *Termoustoichivost' plastin i obolochek* [Thermostability of plates and shells]. Moscow, Moscow State Univ., 1968, 520 pp. (In Russian)
8. Ogibalov P. M. *Voprosy dinamiki i ustoichivosti obolochek*[The problems of dynamics and stability of shells]. Moscow, Moscow State Univ., 1963, 417 pp. (In Russian)
9. Bolotin V. V. Thermal buckling of plates and shallow shells in a supersonic gas flow, In: *Raschety na prochnost'*, Issue 6. Moscow, Mashgiz, 1960, pp. 190–216 (In Russian).
10. Zhilin P. A. Linear theory of ribbed shells, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekhanika Tverdogo Tela*, 1970, no. 4, pp. 150–166 (In Russian).
11. Belostochnyi G. N., Ul'yanova O. I. Continuum model for a composition of shells of revolution with thermosensitive thickness, *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 184–191. doi: 10.3103/S0025654411020051.
12. Belostochnyi G. N., Rassudov V. M. Continuum model of orthotropic heat-sensitive "shell-ribs" system taking into account the influence of large deflection, In: *Prikladnaia teoriia uprugosti*, Issue 8. Saratov, Saratov Polytechnic Inst., 1983, pp. 10–22 (In Russian).
13. Belostochnyi G. N., Rassudov V. M. Continuum approach to the thermal stability of elastic "plate-ribs" systems, In: *Prikladnaia teoriia uprugosti*. Saratov, Saratov Polytechnic Inst., 1980, pp. 94–99 (In Russian).
14. Zhilin P. A. General theory of ribbed shells. The strength of turbines, In: *Proc. of the Central Turbine-Boiler Institute*, Issue 8. Leningrad, 1968, pp. 46–70 (In Russian).

15. Karpov V. V., Sal'nikov A. Yu. Variational method output nonlinear equations of motion of shallow ribbed shells, *Vestnik Grazhdanskikh Inzhenerov*, 2008, no. 4(17), pp. 121–124 (In Russian).
16. Belostochnyi G. N., Myltcina O. A. Thermoelasticity equations of shells compositions, *Vestnik Saratovskogo Tekhnicheskogo Universiteta*, 2011, no. 4 (59). Issue 1, pp. 56–64 (In Russian).
17. Onanov G. G. Equations with singular coefficients of the type of the delta-function and its derivatives, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1970, vol. 191, no. 5, pp. 997–1000 (In Russian).
18. Belostochnyi G. N. Analytical methods for the determination of closed integrals of singular differential equations of thermoelasticity, geometrically irregular shells, *Doklady Akademii Voennykh Nauk*, 1999, no. 1, pp. 14–26 (In Russian).
19. Geckeler J. W. Elastostatik, In: *Handbuch der Physik*, vol. 6, 1928, pp. 141–308 (In German).
20. Il'yushin A. A. Law of plane sections in aerodynamics of high supersonic velocity, *Prikladnaia Matematika i Mekhanika*, 1956, no. 6, pp. 733–755 (In Russian).
21. Vol'mir A. S. *Ustoichivost' deformiruemykh sistem* [Stability of deformable systems]. Moscow, Nauka, 1967, 984 pp. (In Russian)
22. Vladimirov V. S. *Generalized functions in mathematical physics*. Moscow, Mir Publ., 1979, 362 pp.
23. Kantorovich L. V., Krylov V. I. *Approximate methods of higher analysis*. Groningen, P. Noordhoff Ltd., 1958, xii+681 pp.
24. Rektorys K. *Variational methods in mathematics, science and engineering*. Dordrecht, Boston, London, D. Reidel Publ., 1980, 571 pp.; doi: 10.1007/978-94-011-6450-4.
25. Belostochnyi G. N., Rassudov V. M. Thermoelastic system of "plate-ribs" type in a supersonic gas flow, In: *Prikladnaia teoriia uprugosti*, Issue 8. Saratov, Saratov Polytechnic Inst., 1983, pp. 114–121 (In Russian).
26. Egorov K. V. *Osnovy teorii avtomaticheskogo regulirovaniia* [Fundamentals of the theory of automatic control]. Moscow, Energiia, 1967, 648 pp. (In Russian)
27. Rassudov V. M., Krasiukov V. P., Pankratov N. D. *Nekotorye zadachi termouprugosti plastinok i pologikh obolochek* [Some problems of thermoelasticity of plates and flat covers]. Saratov, Saratov Univ., 1973, 155 pp. (In Russian)
28. Nazarov A. A. *Osnovy teorii i metody rascheta pologikh obolochek* [Fundamentals of the Theory and Methods for Designing Shallow Shells]. Leningrad, Moscow, Stroiizdat, 1966, 304 pp. (In Russian)
29. Myltcina O. A., Belostochnyi G. N. Stability of heated orthotropic geometrically irregular plate in a supersonic gas flow, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, no. 4, pp. 109–120 (In Russian). doi: 10.15593/perm.mech/2017.4.08.