Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22, № 4. С. 774–784
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) http://doi.org/10.14498/vsgtu1639

УДК 517.955, 517.968.7

К проблеме единственности решения задачи Коши для уравнения дробной диффузии с оператором Бесселя

Ф. Г. Хуштова

Институт прикладной математики и автоматизации –
филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения
«Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр
Российской академии наук»,
Россия, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 а.

Аннотация

Рассматривается уравнение дробной диффузии с сингулярным оператором Бесселя, действующим по пространственной переменной, и оператором дробного дифференцирования Римана–Лиувилля, действующим по временной переменной. Когда порядок дробной производной равен единице, а особенность у оператора Бесселя отсутствует, рассматриваемое уравнение совпадает с классическим уравнением теплопроводности. Ранее для уравнения дробной диффузии с оператором Бесселя было построено решение задачи Коши и доказана теорема единственности решения в классе функций экспоненциального роста.

Построен пример, показывающий, что увеличение показателя степени в условии, гарантирующем единственность решения задачи Коши, влечет за собой неединственность решения. С помощью известных свойств функции Райта получены оценки для построенной функции. Показывается, что она, будучи не равной тождественно нулю, удовлетворяет однородному уравнению и однородному условию Коши.

Ключевые слова: уравнение дробной диффузии, оператор дробного дифференцирования, оператор Бесселя, задача Коши, единственность решения, условие Тихонова, функция Райта.

Получение: 28 августа 2018 г. / Исправление: 25 октября 2018 г. /
Принятие: 12 ноября 2018 г. / Публикация онлайн: 28 ноября 2018 г.

Краткое сообщение

Образец для цитирования
Хуштова Ф. Г. К проблеме единственности решения задачи Коши для уравнения дробной диффузии с оператором Бесселя // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 4. С. 774–784. doi: 10.14498/vsgtu1639.

Сведения об авторе
Фатима Гидовна Хуштова http://orcid.org/0000-0003-4088-3621
научный сотрудник; отдел дробного исчисления; e-mail: khushtova@yandex.ru

Введение. В области $\Omega = \{(x, y) : -\infty < x < \infty,\ 0 < y < T\}$ рассмотрим уравнение

$$B_x u(x, y) - D_{0y}^{\alpha} u(x, y) = 0, \tag{1}$$

где D_{0y}^{α} — оператор дробного дифференцирования в смысле Римана—Лиувилля порядка α, определяемый равенствами [1, 2]

$$D_{0y}^{\alpha}\, g(y) = \frac{dg}{dy},$$

если $\alpha = 1$, и

$$D_{0y}^{\alpha}\, g(y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dy} \int_0^y \frac{g(t)}{(y-t)^{\alpha}} dt,$$

если $0 < \alpha < 1$;

$$B_x = x^{-b} \frac{d}{dx}\left(x^b \frac{d}{dx}\right) = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{b}{x}\frac{d}{dx}$$

— оператор Бесселя, $|b| < 1$.

Уравнение (1) при $\alpha = 1$, то есть уравнение

$$u_{xx}(x, y) + \frac{b}{x} u_x(x, y) - u_y(x, y) = 0, \tag{2}$$

совпадает с B-параболическим уравнением. Краевые задачи в ограниченной и неограниченной областях для этого уравнения при различных значениях параметра b рассматривали многие авторы. Например, в работе V. Alexiades [3] для него решены первая, вторая и третья краевые задачи в области с подвижной границей, в работе D. Calton [4] для него исследована задача Коши.

Уравнение (2) заменой $z = x^2/(4n)$ сводится к уравнению

$$u_{zz}(z, y) + \frac{m+1}{z} u_z(z, y) - \frac{n}{z} u_y(z, y) = 0, \quad m = (b-1)/2,$$

для которого S. Kępiński [5] исследовал краевую задачу в полуполосе $x > 0$, $0 < y < y_0$. Уравнение (2) было также объектом исследования монографий С. А. Терсенова [6] и М. И. Матийчука [7].

Дифференциальные уравнения, содержащие оператор Бесселя, наиболее подробно исследованы в работах И. А. Киприянова и его учеников [8, 9]. Отметим здесь, что очень важные результаты по применению операторов преобразования в теории дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах, в частности с операторами Бесселя, получены В. В. Катраховым и С. М. Ситником [10, 11].

В случае, когда $b = 0$, $0 < \alpha < 2$, уравнение (1) совпадает с диффузионно-волновым уравнением. Различные краевые задачи для него, а также для многомерных его обобщений подробно исследованы в работах многих авторов. Приведем некоторые из них.

А. Н. Кочубей [12] исследовал задачу Коши для уравнения диффузии дробного порядка с регуляризованной дробной производной (производной

Капуто) и эллиптическим оператором с непрерывными ограниченными вещественными коэффициентами

$$L=\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}+c(x)u.$$

В случае, когда $L=\Delta$ — оператор Лапласа, фундаментальное решение построено в терминах H-функции Фокса. Исследованию задачи Коши для диффузионного и диффузионно-волнового уравнений дробного порядка с производной Капуто посвящены также работы А. Н. Кочубея и С. Д. Эйдельмана [13–16].

А. В. Псху [17] построил фундаментальное решение и исследовал задачу Коши для многомерного диффузионно-волнового уравнения с оператором дробного дифференцирования Джрбашяна—Нерсесяна, который включает в себя как частный случай операторы дробного дифференцирования Римана—Лиувилля и Капуто.

В работах [18, 19] также построено фундаментальное решение и исследована задача Коши для уравнения дробной диффузии соответственно с оператором дискретно распределенного дифференцирования и оператором Джрбашяна—Нерсесяна, действующим по многим переменным времени. В работе [20] решена первая краевая задача в нецилиндрической области для диффузионно-волнового уравнения с оператором Джрбашяна—Нерсесяна. Доказана теорема существования и единственности исследуемой задачи, конструктивно построено ее решение.

А. А. Ворошилов и А. А. Килбас [21] методом интегральных преобразований построили решение задачи Коши для уравнения

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t)=\lambda^2\Delta_x u(x,t),\quad x\in\mathbb{R}^m,\quad t>0,\tag{3}$$

где $\Delta_x=\sum_{j=1}^{m}\partial^2/\partial x_j^2$, $n-1<\alpha<n$, $n\in\mathbb{N}$. При $0<\alpha\leqslant 1$ и $1<\alpha<2$ решения выписаны в терминах H-функции Фокса. В работе [22] было также построено решение задачи Коши в случае, когда в уравнении (3) вместо оператора Римана—Лиувилля содержится оператор Капуто.

Задача Коши для уравнения (3) при $\lambda=1$, $0<\alpha\leqslant 1$ была ранее рассмотрена С. Х. Геккиевой [23], а в работе [24] ею исследована первая краевая задача в первом квадранте для уравнения (3) при $m=\lambda=1$, $0<\alpha\leqslant 1$.

Уравнение диффузии дробного порядка и некоторые его обобщения рассматривали F. Mainardi, G. Pagnini, Yu. Luchko, P. Paradisi [25–29] и многие другие. Более подробную библиографию по данному вопросу можно найти в монографиях [2, 30, 31].

1. Постановка задачи Коши и теорема единственности решения. Пусть $\Omega^+=\Omega\cap\{x>0\}$, $\Omega^-=\Omega\cap\{x<0\}$, $\bar{\Omega}$ — замыкание области Ω.

Определение. *Регулярным решением* уравнения (1) в области Ω будем называть функцию $u=u(x,y)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области $\Omega^+\cup\Omega^-$, и такую, что $y^{1-\alpha}u\in C(\bar{\Omega})$, $|x|^b u_x\in C(\Omega)$, u_{xx}, $D_{0y}^{\alpha}u\in C(\Omega^+\cup\Omega^-)$.

Задача Коши. *Найти регулярное в области Ω решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условию*

$$\lim_{y\to 0}D_{0y}^{\alpha-1}u(x,y)=\varphi(x),\quad -\infty<x<\infty,\tag{4}$$

где $\varphi(x)$ — заданная функция.

В работе [32] доказана следующая теорема единственности.

Теорема. *Существует не более одного регулярного решения задачи Коши* (1), (4) *в классе функций, удовлетворяющих для некоторой положительной постоянной k условию*

$$\lim_{|x|\to\infty} y^{1-\alpha}\, u(x,y) \exp\left(-k\,|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}\right) = 0. \tag{5}$$

Отметим, что условие (5) имеет место и в случае задачи Коши для уравнения дробной диффузии. Теоремы единственности решения задачи Коши в классе ограниченных функций и в классе функций экспоненциального роста для многомерного уравнения дробной диффузии с оператором Капуто были доказаны в работе А. Н. Кочубея [12], теорема единственности решения задачи Коши в классе функций экспоненциального роста для многомерного диффузионно-волнового уравнения с оператором Джрбашяна—Нерсесяна — в работе А. В. Псху [17]. В этих же работах построены примеры, показывающие, что увеличение показателя $2/(2-\alpha)$ ведет к утрате единственности решения соответствующих задач. При $\alpha = 1$ условие (5) совпадает с хорошо известным условием Тихонова

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x,y) \exp\left(-k\,|x|^2\right) = 0.$$

Как известно, пример неединственности решения задачи Коши для уравнения теплопроводности был впервые построен А. Н. Тихоновым в основополагающей работе [34] (см. также [35]).

В данной работе эти идеи развиваются применительно к задаче (1), (4).

2. Неулучшаемость показателя степени в условии единственности решения задачи Коши. Рассмотрим функцию

$$T_\mu(z,\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{\,\beta+n}}{n!\,\Gamma(1+\beta+n)}\, \phi\left(-\rho, \mu-\alpha\beta-\alpha n; -\zeta\right), \tag{6}$$

где $\phi\left(-\rho,\delta;z\right)$ — *функция Райта*, определяемая степенным рядом [2, 33]

$$\phi\left(-\rho,\delta;z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!\,\Gamma(\delta-\rho\, n)}.$$

Далее будем считать, что $\rho \in (0;1)$. Для любых ν, $\delta \in \mathbb{R}$ справедливы формулы [2, с. 26, 44]

$$\frac{d}{dz}\phi(-\rho,\delta;-z) = -\phi(-\rho,\delta-\rho;-z), \tag{7}$$

$$D^{\nu}_{ay}\, y^{\delta-1}\phi(-\rho,\delta;-c\,y^{-\rho}) = y^{\delta-\nu-1}\phi(-\rho,\delta-\nu;-c\,y^{-\rho}). \tag{8}$$

Лемма 1. *Если $\delta \geqslant 1$, то для любого положительного z справедливо неравенство* [2, с. 47]

$$\phi\left(-\rho,\delta;-z\right) \leqslant \frac{1}{\Gamma\left(\delta\right)} \exp\left[-(1-\rho)\,\rho^{\frac{\rho}{1-\rho}}\, z^{\frac{1}{1-\rho}}\right]. \tag{9}$$

Лемма 2. *Если $\delta < 1$, то для любых положительных x и y, $a \in (0;x)$, $\omega \in (1/2;\omega_0)$, $\omega_0 = \min\{1, 1/(2\rho)\}$, справедливы неравенства* [2, с. 49]

$$\left| y^{\,\delta-1}\phi\Big(-\rho,\delta;-\frac{x}{y^\rho}\Big)\right| \leqslant \frac{\Gamma\left((1-\delta)/\rho\right)}{\rho\,\pi\left[aC_\rho(\rho,\omega)\right]^{(1-\delta)/\rho}}\,\phi\Big(-\rho,1;-\frac{x-a}{y^\rho}\Big), \tag{10}$$

$$\left|y^{\,\delta-1}\phi\Big(-\rho,\delta;-\frac{x}{y^\rho}\Big)\right| \leqslant \frac{\Gamma\left(1-\delta\right)}{\pi\left[yC_\rho(1,\omega)\right]^{1-\delta}}, \tag{11}$$

где $C_\rho(\rho,\omega) = \frac{1}{\rho\pi}\cos\rho\omega\pi$, $C_\rho(1,\omega) = -\frac{1}{\pi}\cos\omega\pi$.

Как следует из (11), ряд (6) сходится абсолютно для любых $z \in \mathbb{C}$, $\zeta > 0$, $\rho,\alpha,\beta \in (0;1)$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Докажем следующую лемму.

Лемма 3. *Если $0 < \alpha < \rho < 1$, $\mu \geqslant 0$, то при любых $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$ справедливо неравенство*

$$\left|y^{\mu-1}T_\mu\Big(\frac{x^2}{4y^\alpha},\frac{1}{y^\rho}\Big)\right| \leqslant \frac{C|x|^{\frac{2[1-\rho(1-\beta)]}{2\rho-\alpha}}y^\mu}{\Gamma(\mu+1)}\exp\left[k_1|x|^{\frac{2\rho}{2\rho-\alpha}} - k_2 y^{-\frac{\rho}{1-\rho}}\right], \tag{12}$$

где C, k_1, k_2 — положительные постоянные, зависящие только от α, β и ρ.

Доказательство. Из (10) следует оценка

$$\left|y^{-\alpha\beta-\alpha n-1}\phi\Big(-\rho,-\alpha\beta-\alpha n;-\frac{1}{y^\rho}\Big)\right| \leqslant \frac{\Gamma\left(1/\rho+\varepsilon\beta+\varepsilon n\right)}{\rho\pi\left(aC_\rho\right)^{1/\rho+\varepsilon\beta+\varepsilon n}}\phi\Big(-\rho,1;-\frac{1-a}{y^\rho}\Big),$$

где $\varepsilon = \alpha/\rho$, $a \in (0;1)$, $C_\rho = C_\rho(\rho,\omega)$.

С помощью последней оценки получим

$$\begin{aligned}
&\left|y^{\,\mu-1}T_\mu\Big(\frac{x^2}{4y^\alpha},\frac{1}{y^\rho}\Big)\right| = \\
&\quad = \left|D_{0y}^{-\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^{2\beta+2n}}{2^{2\beta+2n}n!\Gamma(1+\beta+n)}y^{-\alpha\beta-\alpha n-1}\phi\Big(-\rho,-\alpha\beta-\alpha n;-\frac{1}{y^\rho}\Big)\right| \leqslant \\
&\quad \leqslant \frac{|x|^{2\beta}y^\mu\phi\big(-\rho,\mu+1;-\frac{1-a}{y^\rho}\big)}{2^{2\beta}\rho\pi\left(aC_\rho\right)^{1/\rho+\varepsilon\beta}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(1/\rho+\varepsilon\beta+\varepsilon n\right)}{n!\Gamma(1+\beta+n)}\Big(\frac{x^2}{4\left(aC_\rho\right)^\varepsilon}\Big)^n.
\end{aligned} \tag{13}$$

Степенной ряд, стоящий справа от неравенства (13), представляет собой обобщенную функцию Райта

$${}_1\Psi_1\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}(1/\rho+\varepsilon\beta,\,\varepsilon)\\(1+\beta,1)\end{matrix}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(1/\rho+\varepsilon\beta+\varepsilon n\right)}{n!\,\Gamma(1+\beta+n)}z^n,\quad z = \frac{x^{\,2}}{4(aC_\rho)^\varepsilon}.$$

Из ее асимптотических свойств при $z\to\infty$ следует [36]

$${}_1\Psi_1\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}(1/\rho+\varepsilon\beta,\,\varepsilon)\\(1+\beta,1)\end{matrix}\right] = Z^{\,1/\rho-\beta(1-\varepsilon)-1}\,e^Z\left[\sum_{m=0}^{M-1}A_mZ^{-m} + O\left(Z^{-M}\right)\right],$$

где $Z=(2-\varepsilon)\,\varepsilon^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}}z^{\frac{1}{2-\varepsilon}}$, $\varepsilon<2$, а коэффициенты A_m, $m=0,1,2,...$, зависят только от ρ, ε и β.

Учитывая, что a — произвольное число из интервала $(0;1)$, из последней оценки и соотношений (13), (9) получаем (12). □

Покажем, что функция $y^{\mu-1}T_\mu\left(\frac{x^2}{4y^\alpha},\frac{1}{y^\rho}\right)$ является решением уравнения (1). Из (6), (7) и (8) имеем

$$B_xT_\mu\left(\frac{x^2}{4y^\alpha},\frac{1}{y^\rho}\right)=$$
$$=y^{-\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!\Gamma(\beta+n)}\left(\frac{x^2}{4y^\alpha}\right)^{\beta+n-1}\phi\left(-\rho,\mu-\alpha\beta-\alpha n;-\frac{1}{y^\rho}\right)=$$
$$=y^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(1+\beta+k)}\left(\frac{x^2}{4y^\alpha}\right)^{\beta+k}\phi\left(-\rho,\mu-\alpha-\alpha\beta-\alpha k;-\frac{1}{y^\rho}\right)=$$
$$=y^{-\alpha}T_{\mu-\alpha}\left(\frac{x^2}{4y^\alpha},\frac{1}{y^\rho}\right),$$

$$D_{0y}^{\nu}y^{\mu-1}T_\mu\left(\frac{x^2}{4y^\alpha},\frac{1}{y^\rho}\right)=y^{\mu-\nu-1}T_{\mu-\nu}\left(\frac{x^2}{4y^\alpha},\frac{1}{y^\rho}\right). \tag{14}$$

Из последних двух равенств следует

$$\left(B_x-D_{0y}^{\alpha}\right)y^{\mu-1}T_\mu\left(\frac{x^2}{4y^\alpha},\frac{1}{y^\rho}\right)=0. \tag{15}$$

Из равенства (14) и оценки (12) также имеем

$$\lim_{y\to 0}D_{0y}^{\alpha-1}y^{\mu-1}T_\mu\left(\frac{x^2}{4y^\alpha},\frac{1}{y^\rho}\right)=0. \tag{16}$$

Таким образом, из соотношений (12), (15) и (16) следует, что нетривиальная функция

$$u(x,y)=y^{\mu-1}T_\mu\left(\frac{x^2}{4y^\alpha},\frac{1}{y^\rho}\right)$$

является решением однородного уравнения (1), удовлетворяет однородному условию (4) ($\varphi(x)\equiv 0$) и для любого положительного сколь угодно малого δ, некоторых положительных постоянных k и C, а также параметра ρ, выбранного из условия $\rho=\frac{\alpha}{2}\frac{2+\delta(2-\alpha)}{\alpha+\delta(2-\alpha)}$, имеет место оценка

$$|u(x,y)|\leqslant C\exp\left(k|x|^{\delta+\frac{2}{2-\alpha}}\right).$$

Последняя оценка показывает, что увеличение показателя $2/(2-\alpha)$ в условии (5) ведет к неединственности решения задачи (1), (4) и в этом смысле условие (5) является необходимым.

Заключение. В данной работе показывается, что показатель степени в условии, обеспечивающем единственность решения задачи Коши для уравнения дробной диффузии с оператором Бесселя, является предельным, и его увеличение приводит к нарушению единственности.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение.* М.: Физматлит, 2003. 271 с.
2. Псху А. В. *Уравнения в частных производных дробного порядка.* М.: Наука, 2005. 199 с.
3. Alexiades V. Generalized axially symmetric heat potentials and singular parabolic initial boundary value problems // *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1982. vol. 79, no. 4. pp. 325–350. doi: 10.1007/BF00250797.
4. Calton D. Cauchy's problem for a singular parabolic partial differential equation // *J. Diff. Equations*, 1970. vol. 8, no. 2. pp. 250–257. doi: 10.1016/0022-0396(70)90004-5.
5. Kępiński S. Über die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{m+1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{n}{x}\frac{\partial z}{\partial t} = 0$ // *Math. Ann.*, 1905. vol. 61, no. 3. pp. 397–405 (In German).
6. Терсенов С. А. *Параболические уравнения с меняющимся направлением времени.* М.: Наука, 1985. 105 с.
7. Матійчук М. І. *Параболічні сингулярні крайові задачі.* Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. 176 с.
8. Киприянов И. А. *Сингулярные эллиптические краевые задачи.* М.: Наука, 1997. 208 с.
9. Киприянов И. А., Катрахов В. В., Ляпин В. М. О краевых задачах в областях общего вида для сингулярных параболических систем уравнений // *Докл. АН СССР*, 1976. Т. 230, № 6. С. 1271–1274.
10. Ситник С. М. *Применение операторов преобразования Бушмана–Эрдейи и их обобщений в теории дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах*: Дис. … д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02. Воронеж, 2016. 307 с.
11. Катрахов В. В., Ситник С. М. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений / *Сингулярные дифференциальные уравнения* / СМФН, Т. 64. М.: Российский университет дружбы народов, 2018. С. 211–426. doi: 10.22363/2413-3639-2018-64-2-211-426.
12. Кочубей А. Н. Диффузия дробного порядка // *Дифференц. уравнения*, 1990. Т. 26, № 4. С. 660–670.
13. Кочубей А. Н. Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка // *Дифференц. уравнения*, 1989. Т. 25, № 8. С. 1359–1368.
14. Кочубей А. Н., Эйдельман С. Д. Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка // *Докл. РАН*, 2004. Т. 394, № 2. С. 159–161.
15. Kochubei A. N. Asymptotic Properties of Solutions of the Fractional Diffusion-Wave Equation // *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2014. vol. 17, no. 3. pp. 881–896. doi: 10.2478/s13540-014-0203-3.
16. Kochubei A. N. Cauchy problem for fractional diffusion-wave equations with variable coefficients // *Applicable Analysis*, 2014. vol. 93, no. 10. pp. 2211–2242. doi: 10.1080/00036811.2013.875162.
17. Псху А. В. Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка // *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009. Т. 73, № 2. С. 141–182. doi: 10.4213/im2429.

18. Псху А. В. Уравнение дробной диффузии с оператором дискретно распределенного дифференцирования // *Сиб. электрон. матем. изв.*, 2016. Т. 13. С. 1078–1098. doi: 10.17377/semi.2016.13.086.
19. Pskhu A. V. Multi-time fractional diffusion equation // *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 2013. vol. 222, no. 8. pp. 1939–1950. doi: 10.1140/epjst/e2013-01975-y.
20. Псху А. В. Первая краевая задача для дробного диффузионно-волнового уравнения в нецилиндрической области // *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2017. Т. 81, № 6. С. 158–179. doi: 10.4213/im8520.
21. Ворошилов А. А., Килбас А. А. Задача типа Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Римана–Лиувилля // *Докл. РАН*, 2006. Т. 406, № 1. С. 12–16.
22. Ворошилов А. А., Килбас А. А. Задача Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Капуто // *Дифференц. уравнения*, 2006. Т. 42, № 5. С. 599–609.
23. Геккиева С. Х. Задача Коши для обобщенного уравнения переноса с дробной по времени производной // *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2000. Т. 5, № 1. С. 16–19.
24. Геккиева С. Х. Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной производной в полубесконечной области // *Изв. КБНЦ РАН*, 2002. № 1(8). С. 6–8.
25. Mainardi F. The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation // *Appl. Math. Letters*, 1996. vol. 6, no. 1. pp. 23–28. doi: 10.1016/0893-9659(96)00089-4.
26. Mainardi F. The time fractional diffusion-wave equation // *Radiophys. Quantum Electron.*, 1995. vol. 38, no. 1-2. pp. 13–24. doi: 10.1007/BF01051854.
27. Mainardi F., Luchko Yu., Pagnini G. The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation // *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2001. vol. 4, no. 2. pp. 153–192, arXiv: cond-mat/0702419 [cond-mat.stat-mech].
28. Pagnini G. The M-Wright function as a generalization of the Gaussian density for fractional diffusion processes // *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2013. vol. 16, no. 2. pp. 436–453. doi: 10.2478/s13540-013-0027-6.
29. Pagnini G., Paradisi P. A stochastic solution with Gaussian stationary increments of the symmetric space-time fractional diffusion equation // *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2016. vol. 19, no. 2. pp. 408–440. doi: 10.1515/fca-2016-0022.
30. Podlubny I. *Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications* / Mathematics in Science and Engineering. vol. 198. San Diego, CA: Academic Press, 1999. xxiv+340 pp.
31. Mathai A. M., Saxena R. K., Haubold H. J. *The H-function. Theory and Applications.* Dordrecht: Springer, 2010. xiv+268 pp. doi: 10.1007/978-1-4419-0916-9.
32. Хуштова Ф. Г. Задача Коши для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и частной производной Римана–Лиувилля // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 1. С. 74–84. doi: 10.14498/vsgtu1455.
33. Gorenflo R., Luchko Y., Mainardi F. Analytical properties and applications of the Wright function // *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 1999. vol. 2, no. 4. pp. 383–414, arXiv: math-ph/0701069.
34. Tychonoff A. Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur // *Mat. Sb.*, 1935. vol. 42, no. 2. pp. 199–216 (In French).
35. Тихонов А. Н. Теоремы единственности для уравнения теплопроводности / *Собрание научных трудов: в десяти томах*, Т. II. Математика. Ч. 2. Вычислительная математика 1956–1979. Математическая физика 1933–1948. Ред.-сост. Т. А. Сушкевич, А. В. Гулин. М.: Наука, 2009. С. 371–382.
36. Wright E. M. The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function // *Proc. Lond. Math. Soc., II. Ser.*, 1940. vol. 46, no. 1. pp. 389–408. doi: 10.1112/plms/s2-46.1.389.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 4, pp. 774–784
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) http://doi.org/10.14498/vsgtu1639

MSC: 26A33, 35K15, 35R11

On the uniqueness of the solution of the Cauchy problem for the equation of fractional diffusion with Bessel operator

F. G. Khushtova

Institute of Applied Mathematics and Automation
of Kabardin-Balkar Scientific Centre of RAS,
89 a, Shortanova st., Nal'chik, 360000, Russian Federation.

Abstract

In this paper, we consider fractional diffusion equation involving the Bessel operator acting with respect to a spatial variable and the Riemann-Liouville fractional differentiation operator acting with respect to a time variable. When the order of the fractional derivative is unity, and the singularity of the Bessel operator is absent, this equation coincides with the classical heat equation. Earlier, a solution of the Cauchy problem has been considered for the considered equation and a uniqueness theorem has been proved for a class of functions satisfying the analog of the Tikhonov condition.

In this paper, we have constructed an example to show that the exponent (power) at the condition of the uniqueness of the solution to the Cauchy problem cannot be raised under. Its increase leads to a non-uniqueness of the solution. Using the well-known properties of the Wright function, we have obtained estimates for constructed function, which satisfies the homogeneous equation and the zero Cauchy condition.

Keywords: fractional diffusion equation, fractional differentiation operator, Bessel operator, Cauchy problem, solution uniqueness, Tikhonov condition, Wright function.

Received: 28th August, 2018 / Revised: 25th October, 2018 /
Accepted: 12th November, 2018 / First online: 28th November, 2018

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

Short Communication

Please cite this article in press as:
Khushtova F. G. On the uniqueness of the solution of the Cauchy problem for the equation of fractional diffusion with Bessel operator, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 4, pp. 774–784. doi: 10.14498/vsgtu1639 (In Russian).

Author's Details:
Fatima G. Khushtova http://orcid.org/0000-0003-4088-3621
Researcher; Dept. of Fractional Calculus; e-mail: khushtova@yandex.ru

References

1. Nakhushev A. M. *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional calculus and its applications]. Moscow, Fizmatlit, 2003, 271 pp. (In Russian)
2. Pskhu A. V. *Uravneniia v chastnykh proizvodnykh drobnogo poriadka* [Partial differential equations of fractional order]. Moscow, Nauka, 2005, 199 pp. (In Russian)
3. Alexiades V. Generalized axially symmetric heat potentials and singular parabolic initial boundary value problems, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1982, vol. 79, no. 4, pp. 325–350. doi: 10.1007/BF00250797.
4. Calton D. Cauchy's problem for a singular parabolic partial differential equation, *J. Diff. Equations*, 1970, vol. 8, no. 2, pp. 250–257. doi: 10.1016/0022-0396(70)90004-5.
5. Kępiński S. Über die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{m+1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{n}{x}\frac{\partial z}{\partial t} = 0$, *Math. Ann.*, 1905, vol. 61, no. 3, pp. 397–405 (In German).
6. Tersenov S. A. *Parabolicheskie uravneniia s meniaiushchimsia napravleniem vremeni* [Parabolic Equations with a Changing Time Direction]. Moscow, Nauka, 1985, 105 pp. (In Russian)
7. Matiichuk M. I. *Parabolichni singuliarni kraiovi zadachi* [Parabolic Singular Boundary-Value Problems]. Kiev, Institute of Mathematics of the Ukrainian National Academy of Sciences, 1999, 176 pp. (In Ukrainian)
8. Kipriyanov I. A. *Singuliarnye ellipticheskie kraevye zadachi* [Singular Elliptic Boundary-Value Problems]. Moscow, Nauka, 1997, 208 pp. (In Russian)
9. Kipriyanov I. A., Katrakhov V. V., Lyapin V. M. On boundary value problems in domains of general type for singular parabolic systems of equations, *Sov. Math., Dokl.*, 1976, vol. 17, pp. 1461–1464.
10. Sitnik S. M. *Application of the Bushman–Erdélyi transformation operators and their generalizations in the theory of differential equations with singularities in the coefficients*, Dr. Phys. Math. Sci. Thesis. Voronezh, 2016, 307 pp. (In Russian)
11. Katrakhov V. V., Sitnik S. M. The transmutation method and boundary-value problems for singular elliptic equations, In: *Singular differential equations*, CMFD, 64. Moscow, Peoples' Friendship University of Russia, 2018, pp. 211–426 (In Russian). doi: 10.22363/2413-3639-2018-64-2-211-426.
12. Kochubei A. N. Diffusion of fractional order, *Differ. Equ.*, 1990, vol. 26, no. 4, pp. 485–492.
13. Kochubei A. N. The Cauchy problem for evolution equations of fractional order, *Differ. Equ.*, 1989, vol. 25, no. 8, pp. 967–974.
14. Kochubeii A. N., Éidel'man S. D. The Cauchy problem for evolution equations of fractional order, *Dokl. Akad. Nauk*, 2004, vol. 394, no. 2, pp. 159–161 (In Russian).
15. Kochubei A. N. Asymptotic Properties of Solutions of the Fractional Diffusion-Wave Equation, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2014, vol. 17, no. 3, pp. 881–896. doi: 10.2478/s13540-014-0203-3.
16. Kochubei A. N. Cauchy problem for fractional diffusion-wave equations with variable coefficients, *Applicable Analysis*, 2014, vol. 93, no. 10, pp. 2211–2242. doi: 10.1080/00036811.2013.875162.
17. Pskhu A. V. The fundamental solution of a diffusion-wave equation of fractional order, *Izv. Math.*, 2009, vol. 73, no. 2, pp. 351–392. doi: 10.1070/IM2009v073n02ABEH002450.
18. Pskhu A. V. Fractional diffusion equation with discretely distributed differentiation operator, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2016, vol. 13, pp. 1078–1098 (In Russian). doi: 10.17377/semi.2016.13.086.
19. Pskhu A. V. Multi-time fractional diffusion equation, *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 2013, vol. 222, no. 8, pp. 1939–1950. doi: 10.1140/epjst/e2013-01975-y.
20. Pskhu A. V. The first boundary-value problem for a fractional diffusion-wave equation in a non-cylindrical domain, *Izv. Math.*, 2017, vol. 81, no. 6, pp. 1212–1233. doi: 10.1070/IM8520.

21. Voroshilov A. A., Kilbas A. A. A Cauchy-type problem for a diffusion-wave equation with a Riemann-Liouville partial derivative, *Dokl. Akad. Nauk*, 2006, vol. 406, no. 1, pp. 12–16 (In Russian).
22. Voroshilov A. A., Kilbas A. A. The Cauchy problem for the diffusion-wave equation with the Caputo partial derivative, *Differ. Equ.*, 2006, vol. 42, no. 5, pp. 638–649. doi: 10.1134/S0012266106050041.
23. Gekkieva S. Kh. The Cauchy problem for the generalized transport equation with time-fractional derivative, *Dokl. Adyg. (Cherkess.) Mezdunar. Akad. Nauk*, 2000, vol. 5, no. 1, pp. 16–19 (In Russian).
24. Gekkieva S. Kh. A boundary value problem for the generalized transfer equation with a fractional derivative in a semi-infinite domain, *Izv. KBNTs RAN*, 2002, no. 1(8), pp. 6–8 (In Russian).
25. Mainardi F. The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation, *Appl. Math. Letters*, 1996, vol. 6, no. 1, pp. 23–28. doi: 10.1016/0893-9659(96)00089-4.
26. Mainardi F. The time fractional diffusion-wave equation, *Radiophys. Quantum Electron.*, 1995, vol. 38, no. 1-2, pp. 13–24. doi: 10.1007/BF01051854.
27. Mainardi F., Luchko Yu., Pagnini G. The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2001, vol. 4, no. 2, pp. 153–192, arXiv: cond-mat/0702419 [cond-mat.stat-mech].
28. Pagnini G. The M-Wright function as a generalization of the Gaussian density for fractional diffusion processes, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2013, vol. 16, no. 2, pp. 436–453. doi: 10.2478/s13540-013-0027-6.
29. Pagnini G., Paradisi P. A stochastic solution with Gaussian stationary increments of the symmetric space-time fractional diffusion equation, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2016, vol. 19, no. 2, pp. 408–440. doi: 10.1515/fca-2016-0022.
30. Podlubny I. *Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 198. San Diego, CA, Academic Press, 1999, xxiv+340 pp.
31. Mathai A. M., Saxena R. K., Haubold H. J. *The H-function. Theory and Applications*. Dordrecht, Springer, 2010, xiv+268 pp. doi: 10.1007/978-1-4419-0916-9.
32. Khushtova F. G. Cauchy problem for a parabolic equation with Bessel operator and Riemann–Liouville partial derivative, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 1, pp. 74–84. doi: 10.14498/vsgtu1455.
33. Gorenflo R., Luchko Y., Mainardi F. Analytical properties and applications of the Wright function, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 1999, vol. 2, no. 4, pp. 383–414, arXiv: math-ph/0701069.
34. Tychonoff A. Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur, *Mat. Sb.*, 1935, vol. 42, no. 2, pp. 199–216 (In French).
35. Tikhonov A. N. Uniqueness theorems for the heat equation, In: *Collection of scientific works. In ten volumes*, Vol. 2: Mathematics. Part 2: Numerical mathematics 1956–1979. Mathematical physics 1933–1948. Edited by T. A. Sushkevich and A. V. Gulin. Moscow, Nauka, 2009, pp. 371–382 (In Russian and French).
36. Wright E. M. The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function, *Proc. Lond. Math. Soc., II. Ser.*, 1940, vol. 46, no. 1, pp. 389–408. doi: 10.1112/plms/s2-46.1.389.