

Дифференциальные уравнения и математическая физика



УДК 514.756.2

Уравнения дуальности на 4-многообразии конформной связности без кручения и некоторые их решения для нулевой сигнатуры

*Л. Н. Кривоносов, В. А. Лукьянов*Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева,
Россия, 603600, Нижний Новгород, ул. Минина, 24.

Аннотация

На 4-многообразии конформной связности без кручения нулевой сигнатуры $(- - ++)$ найдены условия, при которых матрица конформной кривизны является дуальной (автодуальной или антиавтодуальной). Они представляют собой пять дифференциальных уравнений в частных производных 2-го порядка на 10 коэффициентов угловой метрики и четыре дифференциальных уравнения с частными производными 1-го порядка, содержащие еще и 3 коэффициента внешней 2-формы заряда одной из компонент матрицы конформной кривизны. Составлены уравнения дуальности для метрики диагонального вида. Они образуют систему из пяти дифференциальных уравнений 2-го порядка на три неизвестных функции от всех четырех переменных. Найдены несколько серий решений этой системы. В частности, получены все решения для логарифмически полиномиальной метрики диагонального вида, то есть для диагональной метрики, коэффициенты которой являются экспонентами от многочленов четырех переменных.

Ключевые слова: многообразие конформной связности, кривизна, кручение, оператор Ходжа, автодуальность, антиавтодуальность, уравнения Янга–Миллса.

Получение: 23 января 2019 г. / Исправление: 12 мая 2019 г. /

Принятие: 10 июня 2019 г. / Публикация онлайн: 12 июня 2019 г.

Научная статья

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Кривоносов Л. Н., Лукьянов В. А. Уравнения дуальности на 4-многообразии конформной связности без кручения и некоторые их решения для нулевой сигнатуры // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 2. С. 207–228. doi: [10.14498/vsgtu1674](https://doi.org/10.14498/vsgtu1674).

Сведения об авторах

Леонид Николаевич Кривоносов  <https://orcid.org/0000-0002-3533-9595>

кандидат физико-математических наук; доцент; каф. прикладной математики;
e-mail: l.n.krivonosov@gmail.com

Вячеслав Анатольевич Лукьянов  <https://orcid.org/0000-0002-7294-0232>

кандидат физико-математических наук; доцент; каф. прикладной математики;
e-mail: oxyzt@ya.ru

Введение. В работе [1] и многих других наших работах исследуются уравнения Янга—Миллса на 4-многообразиях конформной связности с различными сигнатурами (мы считаем многообразие бесконечно дифференцируемым). Многообразия конформной связности также называются пространствами конформной связности. 4-многообразия конформной связности с нулевой сигнатурой $(- - + +)$, рассматриваемые в данной статье, удобны тем, что уравнения Янга—Миллса допускают нетривиальные (анти)автодуальные решения, которых нет при сигнатуре Минковского. Любая (анти)автодуальная связность удовлетворяет уравнениям Янга—Миллса в силу тождеств Бианки. В настоящей работе мы находим (анти)автодуальные решения уравнений Янга—Миллса для некоторых видов метрик нулевой сигнатуры.

(Анти)автодуальные 4-многообразия с *конформной структурой* сигнатуры $s = 0$ изучались в работах [2–4]. Мы же в настоящей статье рассматриваем (анти)автодуальные 4-многообразия *конформной связности*. Поясним сначала, в чем разница между конформной связностью и конформной структурой.

Напомним, что конформная связность на n -многообразии определяется заданием на каждой карте U_α некоторого атласа квадратной матрицы *конформной связности* порядка $n + 2$

$$\Omega_\alpha = \begin{pmatrix} \omega_0^0 & \omega_i & 0 \\ \omega^j & \omega_i^j & -\eta^{jk}\omega_k \\ 0 & -\eta_{ik}\omega^k & -\omega_0^0 \end{pmatrix}, \quad \eta_{ik}\omega_j^k + \eta_{jk}\omega_i^k = 0, \quad (1)$$

состоящей из внешних 1-форм, зависящих от координат карты; η_{ik} — метрический тензор, $\eta_{ii} = \pm 1$, $\eta_{ik} = 0$ при $i \neq k$; все индексы пробегают значения от 1 до n . Квадратичная форма

$$\psi = \eta_{ik}\omega^i\omega^k \quad (2)$$

называется *угловой метрикой*. Число s , равное разности между количеством положительных и отрицательных η_{ii} , называется *сигнатурой угловой метрики* (и конформной связности). На пересечении карт $U_\alpha \cap U_\beta$ должна быть задана переходная матрица $h_{\alpha\beta}$, связывающая матрицы конформной связности Ω_α и Ω_β формулой

$$\Omega_\beta = (h_{\alpha\beta})^{-1} dh_{\alpha\beta} + (h_{\alpha\beta})^{-1} \Omega_\alpha h_{\alpha\beta}.$$

Матрица $h_{\alpha\beta}$ в каждой точке пересечения $U_\alpha \cap U_\beta$ является элементом структурной группы $H_{n,s}$, являющейся подгруппой стационарности конформной группы $C_{n,s}$. Структурная группа $H_{n,s}$ зависит от $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ параметров. В наших работах по конформной связности структурную группу мы называем *калибровочной*. На каждой карте U_α матрица конформной связности Ω_α определена лишь с точностью до калибровочного преобразования h , представляющего собой локальную функцию со значениями в $H_{n,s}$.

Матрица Ω конформной связности порождает матрицу *конформной кривизны*

$$\Phi = d\Omega + \Omega \wedge \Omega. \quad (3)$$

Ее алгебраическая структура такая же, как у матрицы конформной связности

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_0^0 & \Phi_i & 0 \\ \Phi^j & \Phi_i^j & -\eta^{jk}\Phi_k \\ 0 & -\eta_{ik}\Phi^k & -\Phi_0^0 \end{pmatrix}, \quad \eta_{ik}\Phi_j^k + \eta_{jk}\Phi_i^k = 0. \quad (4)$$

2-формы Φ^j образуют геометрический объект, называемый *кручением*. При отсутствии кручения, когда $\Phi^j = 0$, 2-форма Φ_0^0 также образует геометрический объект, который мы называем *зарядом*. Мы обозначаем разложение $\Phi_i^j \equiv \frac{1}{2} \Phi_{ikl}^j \omega^k \wedge \omega^l$. Пространство конформной связности, где

$$\Phi^j = 0, \quad \Phi_0^0 = 0, \quad \sum_{j=1}^n \Phi_{ikj}^j = 0, \quad (5)$$

называется *нормальным пространством конформной связности* Картана [5, с. 178].

Обратимся теперь к многообразиям с конформной структурой. *Конформная структура* на n -многообразии — это класс псевдоримановых метрик, отличающихся друг от друга положительным функциональным множителем [6, р. 9]. Приведем равносильное определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Конформной структурой на дифференцируемом многообразии M называется G -структура, определяемая подрасслоением расслоения реперов первого порядка со структурной группой

$$G = CO(p, q) = O(p, q) \times \mathbb{R}^+, \quad p + q = n, \quad (6)$$

где $O(p, q)$ — n -мерная псевдоортогональная группа сигнатуры (p, q) [2, с. 18].

Основным аппаратом в теории конформных структур является теория конформных связностей на многообразии [2, с. 4].

С помощью дифференциально-геометрического продолжения в окрестности высших порядков авторы работы [2] строят систему пфаффовых форм, из которых можно составить матрицу порядка $n + 2$:

$$\begin{pmatrix} \theta & \theta_i & 0 \\ \theta^j & \theta_i^j & -\eta^{jk} \theta_k \\ 0 & -\eta_{ik} \theta^k & -\theta_0^0 \end{pmatrix}, \quad g_{ik} \theta_j^k + g_{jk} \theta_i^k = 0,$$

где $\psi = g_{ij} \theta^i \theta^j$ — исходная псевдометрика. Получилась матрица, по своей алгебраической структуре аналогичная матрице конформной связности (1).

Построенная нами конформная связность близка к нормальной конформной связности, рассматриваемой Картаном, но не вполне с ней совпадает, так как у Картана 1-форма θ является полным дифференциалом [2, с. 13].

Это высказывание неудачно, так как у Картана θ не является полным дифференциалом. Она в теории Картана вообще не образует геометрического объекта. В [3] М. А. Акивис указывает еще на одно отличие: у Картана $g_{ij} = \delta_{ij}$ (символ Кронекера). Но это отличие совершенно несущественно.

Любая квадратичная форма $\psi = g_{ij} dx^i dx^j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, где g_{ij} могут зависеть не только от переменных x^i , но еще от любого числа параметров u^α , в окрестности точки (x_0^k, u_0^α) может с помощью преобразований вида

$$\omega^i = L_j^i(x^k, u^\alpha) dx^j, \quad \det(L_j^i) \neq 0$$

быть приведена к

$$\psi = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (\omega^i)^2, \quad \varepsilon_i = 1, -1, 0,$$

причем сигнатура и ранг ψ такие же, какие были и у квадратичной формы $g_{ij}(x_0^k, u_0^\alpha) dx^i dx^j$. Об этом же говорит и Картан [5, с. 175] (для положительно определенной квадратичной формы).

На самом деле отличие между конформной структурой и конформной связностью только одно, но очень существенное. Конформная структура задается на каждой карте некоторого атласа той же матрицей (1), что и конформная связность. Но структурной группой для конформной структуры служит группа $CO(p, q)$ (6), зависящая от $\frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$ параметров (p и q — соответственно число положительных и отрицательных η_{ii}), а структурной группой для конформной связности служит группа $H_{n,s}$, зависящая от $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ параметров, причем $CO(p, q) \subset H_{n,s}$. У меньшей группы больше геометрических объектов, в частности инвариантов. В случае конформной структуры дополнительными объектами по сравнению с конформной связностью являются система 1-форм ω_i , квадратичная форма $\eta^{ij}\omega_i\omega_j$, 1-форма ω_0^0 , а инвариантами — квадратичная форма $\omega_i\omega^i$, произведение квадратичных форм $\eta^{ij}\omega_i\omega_j \cdot \eta_{kl}\omega^k\omega^l$, внешние 2-формы $\omega_i \wedge \omega^i$ и $d\omega_0^0$.

В работах [2–4] эти объекты не используются, а потому все результаты этих работ на 4-многообразии с конформной структурой справедливы и для нормальной конформной связности Картана. Обратно, любой результат, справедливый для нормальной конформной связности Картана, справедлив и для конформной структуры. В частности, найденные нами в разделах 3, 4 и 5 (анти)автодуальные метрики порождают (анти)автодуальные конформные $CO(2, 2)$ -структуры. Матрица кривизны для конформной структуры имеет тот же вид (4), только должны выполняться условия (5) нормальной конформной связности Картана.

Итак, построенная в [2] связность — это частный случай $CO(p, q)$ -связности, удовлетворяющий условиям (5). Ее можно назвать нормальной $CO(p, q)$ -связностью. $CO(p, q)$ -связность будет общей, если на матрицу кривизны (4) не накладывать условия (5). Но поскольку условия (5) инвариантны не только относительно действия группы $CO(p, q)$, но и относительно группы $H_{n,s}$, авторы статьи правы, называя $CO(p, q)$ -связность «близкой к нормальной конформной связности Картана, но не вполне с ней совпадающей» [2, с. 4].

Построенная в [2–4] $CO(2, 2)$ -связность изучается в *адаптированном* репере, характеризующимся тем, что угловая метрика (2) в нем записывается в виде

$$2(\omega^1\omega^4 - \omega^2\omega^3). \quad (7)$$

В этом репере указан конкретный вид двух подтензоров C^+ и C^- , на которые распадается тензор Вейля. Конформная структура названа в [2] *автодуальной* (*антиавтодуальной*), если $C^- = 0$ ($C^+ = 0$). Аналогичным образом определяется (анти)автодуальность римановых многообразий в более ранней статье [7]. Поскольку тензор Вейля полностью определяется компонентами метрики, то и сама метрика называется *автодуальной* (*антиавтодуальной*), если $C^- = 0$ ($C^+ = 0$). В [2] автодуальные и антиавтодуальные 4-многообразия названы общим термином «полуплоские 4-многообразия конформной

структуры». В [2] также указаны геометрический смысл подтензоров C^+ и C^- и геометрическая характеристика (анти)автодуальности.

Вернемся к конформной связности. Далее мы рассматриваем только 4-многообразия конформной связности сигнатуры $s = 0$. Поэтому в матрице (1) индексы i, j, k и обозначаемые другими малыми латинскими буквами будут принимать значения 1, 2, 3, 4. Для величин η_{ij} мы полагаем $\eta_{11} = \eta_{22} = -1$, $\eta_{33} = \eta_{44} = 1$, то есть квадратичная форма (2) угловой метрики имеет диагональный вид

$$\psi = -(\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 + (\omega^4)^2. \quad (8)$$

Такой репер мы называем *каноническим*. Мы отказались от представления ψ в виде (7) в адаптированном репере ради удобства представления оператора Ходжа $*$, который задается с помощью величин

$$\varepsilon_{ij}^{kl} = \delta_{1234}^{klpq} \eta_{pi} \eta_{qj} \quad (9)$$

(δ_{1234}^{klpq} — символ Кронекера, равный ± 1 в зависимости от четности перестановки k, l, p, q чисел 1, 2, 3, 4 и равный нулю, если среди чисел k, l, p, q есть одинаковые) и действует на внешние 2-формы $\theta = a_{ij} \omega^i \wedge \omega^j$ по правилу

$$*\theta = \frac{1}{2} a_{ij} \varepsilon_{kl}^{ij} \omega^k \wedge \omega^l. \quad (10)$$

Для сигнатуры $s = 0$ ненулевые компоненты (9) следующие:

$$\varepsilon_{12}^{34} = 1, \quad \varepsilon_{13}^{24} = 1, \quad \varepsilon_{14}^{23} = -1, \quad \varepsilon_{23}^{14} = -1, \quad \varepsilon_{24}^{13} = 1, \quad \varepsilon_{34}^{12} = 1. \quad (11)$$

Если ввести собирательные индексы

$$12 \longrightarrow \bar{1}, \quad 13 \longrightarrow \bar{2}, \quad 14 \longrightarrow \bar{3}, \quad 34 \longrightarrow \bar{4}, \quad 24 \longrightarrow \bar{5}, \quad 32 \longrightarrow \bar{6}, \quad (12)$$

то матрица $[*]$ оператора Ходжа принимает очень простой вид:

$$[*] = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где 0 и E — нулевая и единичная матрицы 3-го порядка. В адаптированном репере матрица $[*]$ имеет значительно более сложный вид.

Мы называем внешнюю 2-форму θ *автодуальной* (*антиавтодуальной*), если $*\theta = \theta$ ($*\theta = -\theta$). Мы предполагаем далее, что матрица кривизны Φ (4) конформной связности состоит только из автодуальных или антиавтодуальных 2-форм, то есть

$$*\Phi = \epsilon \Phi, \quad \epsilon = \pm 1. \quad (14)$$

В этом случае *конформная связность* (1) (и само пространство) называется *автодуальной* ($\epsilon = 1$) или *антиавтодуальной* ($\epsilon = -1$).

Как видим, это определение совсем не похоже на определение (анти)автодуальности в [2]. Но наша Теорема 5 из [8] показывает, что на самом деле эти определения в случае нормальной конформной связности Картана, а следовательно, и в случае конформной структуры, — равносильны.

В компонентах (14) записывается с помощью 33 равенств. Но оказывается, что из них можно выделить только 9 независимых уравнений, содержащих 10 коэффициентов угловой метрики ψ и 3 коэффициента заряда Φ_0^0 . Основная задача данной статьи: выделить эти 9 равенств и найти некоторые их решения. Таким образом, ни в методах, ни в результатах ничего общего со статьей [2] у нас нет. Для решения первой части поставленной задачи будет, во-первых, использоваться доказанная в [8]

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Конформная связность на 4-многообразии без кручения при сигнатурах $s = \pm 4; 0$ (анти)автодуальна тогда и только тогда, когда таковы же 2-формы Φ_i^j и выполняется уравнение $d\Phi_0^0 = 0$.*

Во-вторых, мы используем полученную в [9] структурную формулу

$$\Phi_{ijkp} = C_{ijkp} - \frac{1}{2}\eta_{ij} \circ E_{kp} + \frac{1}{2}\eta_{ij} \circ b_{[kp]} + \frac{1}{24}(6b - R)\eta_{ij} \circ \eta_{kp}. \quad (15)$$

Здесь $\Phi_{ijkp} \equiv \eta_{il}\Phi_{jkp}^l$, C_{ijkp} — тензор Вейля квадратичной формы ψ угловой метрики, $E_{jk} \equiv R_{jk} - \frac{1}{4}R\eta_{jk} - b_{(jk)} + \frac{1}{2}b\eta_{jk}$ — конформный тензор Эйнштейна, $R_{jk} \equiv R_{jk}^p$ — тензор Риччи, $R \equiv \eta^{ij}R_{ij}$, b_{kp} — коэффициенты разложения $\omega_k \equiv b_{kp}\omega^p$, $b_{[kp]} \equiv b_{kp} - b_{pk}$, $b \equiv \eta^{ij}b_{ij}$, кружком обозначено произведение Кулкарни—Номидзу двух произвольных двухвалентных тензоров

$$a_{ij} \circ c_{mn} \equiv a_{im}c_{jn} + a_{jn}c_{im} - a_{in}c_{jm} - a_{jm}c_{in}. \quad (16)$$

Из девяти уравнений дуальности пять уравнений содержат только коэффициенты угловой метрики (8), остальные 4 уравнения содержат еще и коэффициенты заряда

$$\Phi_0^0 \equiv d\omega_0^0 + \omega_k \wedge \omega^k.$$

С помощью калибровочного преобразования нормализации 1-форму ω_0^0 всегда можно привести к нулю, что мы и предполагаем выполненным. Тогда

$$\Phi_0^0 \equiv \omega_k \wedge \omega^k = \frac{1}{2}b_{[kl]}\omega^l \wedge \omega^k.$$

Здесь 6 коэффициентов $b_{[kl]}$, но в силу условий дуальности $*\Phi_0^0 = \epsilon\Phi_0^0$ их остается только три. Девять уравнений дуальности вычисляются в разделе 1. Затем, в разделе 2, пять уравнений дуальности на коэффициенты угловой метрики применяются к угловой метрике диагонального вида

$$\psi = -dt^2 - a^2dx^2 + b^2dy^2 + c^2dz^2,$$

где функции a, b, c зависят от 4 переменных t, x, y, z . Получаем пять дифференциальных уравнений в частных производных 2-го порядка на 3 неизвестные функции a, b, c . В разделах 3, 4 и 5 изучаются решения этих уравнений.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В [10] доказана замечательная теорема: любая антиавтодуальная 4-метрика сигнатуры $s = 0$ локально может быть записана в некоторых координатах (w, z, x, y) в виде

$$g = dw dx + dz dy + F_y dw^2 - (F_x + G_y) dw dz + G_x dz^2,$$

где функции F и G четырех переменных удовлетворяют некоторой (сложной) системе из двух дифференциальных уравнений третьего порядка.

Но авторы статьи [10] не приводят конкретных примеров для F и G . Наши уравнения дуальности (30) и (31) не столь универсальны. Зато они позволяют найти как антиавтодуальные, так и автодуальные решения. Кроме того, в разделах 3, 4 и 5 мы приводим несколько серий конкретных решений своих уравнений.

1. Вывод уравнений дуальности. Из уравнений дуальности (14) имеем, в частности,

$$*\Phi_0^0 = \epsilon\Phi_0^0, \quad \epsilon = \pm 1.$$

Применяя формулы (10) и (11), получим

$$b_{[12]} = \epsilon b_{[34]}, \quad b_{[13]} = \epsilon b_{[24]}, \quad b_{[14]} = \epsilon b_{[32]}. \quad (17)$$

Согласно основной теореме (см. введение) должно выполняться равенство $d\Phi_0^0 = 0$. В компонентах оно сводится к четырем уравнениям

$$b_{([ij]|k)} = 0. \quad (18)$$

Здесь i, j, k — любые различные индексы, круглые скобки обозначают круговую перестановку индексов, а индекс после вертикальной черты — ковариантную производную.

Из уравнений (14) очевидно следует выполнимость уравнений Янга—Миллса

$$d*\Phi + \Omega \wedge *\Phi - *\Phi \wedge \Omega = 0,$$

так как они в этом случае совпадают с тождествами Бианки

$$d\Phi + \Omega \wedge \Phi - \Phi \wedge \Omega = 0,$$

получаемыми внешним дифференцированием равенства (3). Как показано в [1], из уравнений Янга—Миллса вытекают уравнения Эйнштейна $E_{kp} = 0$, $R - 6b = 0$. Таким образом, структурная формула (15) упрощается:

$$\Phi_{ijkp} = C_{ijkp} + \frac{1}{2}\eta_{ij} \circ b_{[kp]}. \quad (19)$$

Согласно основной теореме, нам осталось воспользоваться условием дуальности форм Φ_i^j , то есть $*\Phi_i^j = \epsilon\Phi_i^j$. В силу формулы (10) и линейности оператора Ходжа это равносильно

$$\Phi_{ijkp}^* = \epsilon\Phi_{ijkp}, \quad (20)$$

где

$$\Phi_{ijkp}^* = \frac{1}{2}\varepsilon_{kp}^{mn}\Phi_{ijmn}, \quad (21)$$

то есть оператор Ходжа действует на правую пару индексов. В силу (19) и линейности оператора Ходжа равенство (20) равносильно

$$C_{ijkp}^* + \frac{1}{2}(\eta_{ij} \circ b_{[kp]})^* = \epsilon\left(C_{ijkp} + \frac{1}{2}\eta_{ij} \circ b_{[kp]}\right). \quad (22)$$

Для получения дальнейших следствий из этого равенства найдем блочную структуру матриц $[C_{ijkp}]$ и $[\eta_{ij} \circ b_{[kp]}]$ в собирательных индексах (12). Пусть

$$[C_{ijkp}] = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Как известно, для тензора Вейля выполняется свойство $C_{jki}^i \equiv \eta^{ip} C_{ijkp} = 0$. Запишем эти десять равенств в собирательных индексах:

$$\begin{aligned} C_{26} &= C_{35}, & C_{16} &= C_{34}, & C_{15} &= C_{24}, \\ C_{12} &= C_{54}, & C_{23} &= C_{65}, & C_{13} &= C_{64}, \\ C_{11} - C_{22} - C_{33} &= 0, & C_{11} - C_{66} - C_{55} &= 0, \\ C_{22} + C_{66} - C_{44} &= 0, & C_{33} + C_{55} - C_{44} &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Последние четыре равенства (24) можно переписать в виде

$$C_{66} = C_{33}, \quad C_{55} = C_{22}, \quad C_{44} = C_{11}, \quad C_{11} - C_{22} - C_{33} = 0. \quad (25)$$

Другое свойство тензора Вейля $C_{ijkp} = C_{kpij}$ в собирательных индексах дает

$$C_{pq} = C_{qp},$$

а свойство $C_{i(jkp)} = 0$ приводит лишь к одному равенству

$$C_{14} - C_{25} - C_{36} = 0. \quad (26)$$

В совокупности равенства (24)–(26) означают, что блоки матриц (23) удовлетворяют условиям:

- 1) $D = A$, $C = B$;
- 2) матрицы A и B симметричны;
- 3) A и B имеют нулевые следы относительно тензора $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

так как левая часть (26) — это след матрицы B , а левая часть (25)₄ — след матрицы A . Из симметричности матриц A и B очевидно следует симметричность всей матрицы (23). Здесь (и аналогично далее) запись (25)₄ означает ссылку на 4 формулу из (25).

Что касается матрицы $[\eta_{ij} \circ b_{[kp]}]$, то она может быть подсчитана непосредственно из определения операции Кулкарни—Номидзу (16):

$$[\eta_{ij} \circ b_{[kp]}] = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix},$$

где

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -b_{[23]} & -b_{[24]} \\ b_{[23]} & 0 & -b_{[34]} \\ b_{[24]} & b_{[34]} & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & b_{[14]} & -b_{[13]} \\ -b_{[14]} & 0 & -b_{[12]} \\ b_{[13]} & b_{[12]} & 0 \end{pmatrix}.$$

Из кососимметричности матриц X и Y очевидна кососимметричность всей матрицы $[\eta_{ij} \circ b_{[kp]}]$.

Действие оператора Ходжа на правую пару индексов по формуле (21) сводится к умножению матрицы $[\Phi_{ijkp}]$ справа на матрицу оператора Ходжа (13). Таким образом, имеем

$$[C_{ijkp}^*] = \begin{pmatrix} B & A \\ A & B \end{pmatrix}, \quad [(\eta_{ij} \circ b_{[kp]})^*] = \begin{pmatrix} Y & X \\ X & Y \end{pmatrix}.$$

Итак, в равенствах (22), записанных в матричном виде, первые слагаемые в левой и правой частях — симметрические матрицы, а вторые слагаемые — кососимметрические. Поэтому равенство (22) возможно только при условии

$$C_{ijkp}^* = \epsilon C_{ijkp}, \quad (\eta_{ij} \circ b_{[kp]})^* = \epsilon \eta_{ij} \circ b_{[kp]}. \quad (27)$$

Последнее равенство равносильно (17). Осталось упростить (27)₁. Дуальность тензора Вейля через его матрицу (23) записывается в виде $A = \epsilon B$. У матриц A и B только по пять существенных компонент. Получаем пять равенств в собирательных индексах:

$$C_{\overline{11}} = \epsilon C_{\overline{14}}, \quad C_{\overline{12}} = \epsilon C_{\overline{15}}, \quad C_{\overline{13}} = \epsilon C_{\overline{16}}, \quad C_{\overline{23}} = \epsilon C_{\overline{26}}, \quad C_{\overline{33}} = \epsilon C_{\overline{36}}.$$

Вернемся к первоначальным индексам по формулам (12):

$$C_{1212} = \epsilon C_{1234}, \quad C_{1213} = \epsilon C_{1224}, \quad C_{1214} = \epsilon C_{1232}, \\ C_{1314} = \epsilon C_{1332}, \quad C_{1414} = \epsilon C_{1432}.$$

Теперь используем стандартное выражение через тензор Римана

$$C_{ijmn} = R_{ijmn} + \frac{1}{2} (\eta_{im} R_{jn} - \eta_{in} R_{jm} + \eta_{jn} R_{im} - \eta_{jm} R_{in}) + \frac{R}{6} (\eta_{in} \eta_{jm} - \eta_{im} \eta_{jn})$$

и получим

$$2R_{1212} - R_{11} - R_{22} - \frac{1}{3}R = 2\epsilon R_{1234}, \quad 2R_{1414} + R_{11} - R_{44} + \frac{1}{3}R = 2\epsilon R_{1423}, \\ 2R_{1314} - R_{34} = \epsilon (2R_{1332} - R_{12}), \quad 2R_{1213} - R_{23} = \epsilon (2R_{1224} + R_{14}), \\ 2R_{1214} - R_{24} = \epsilon (2R_{1232} - R_{13}).$$

Запишем эти формулы без использования тензора Риччи:

$$2R_{112}^2 - 2R_{334}^4 - R_{113}^3 - R_{114}^4 - R_{223}^3 - R_{224}^4 = 6\epsilon R_{134}^2, \\ 2R_{114}^4 + 2R_{223}^3 - R_{112}^2 - R_{113}^3 - R_{224}^4 + R_{334}^4 = 6\epsilon R_{132}^4, \\ R_{114}^3 - R_{224}^3 = \epsilon (R_{124}^4 - R_{123}^3), \quad R_{113}^2 - R_{234}^4 = \epsilon (R_{124}^2 - R_{134}^3), \\ R_{114}^2 + R_{234}^3 + \epsilon (R_{123}^2 + R_{134}^4) = 0. \quad (28)$$

Получена

ТЕОРЕМА 1. В 4-пространстве конформной связности без кручения с сигнатурой $s = 0$ матрица кривизны Φ удовлетворяет условию дуальности (14) тогда и только тогда, когда выполняются условия (17), (18) и (28).

2. Уравнения дуальности для нормальной конформной связности Картана в случае диагональной метрики (сигнатура $s = 0$). Вычислим уравнения дуальности для метрики диагонального вида

$$\psi = -dt^2 - a^2 dx^2 + b^2 dy^2 + c^2 dz^2. \quad (29)$$

Положим

$$\omega^1 = dt, \quad \omega^2 = adx, \quad \omega^3 = bdy, \quad \omega^4 = cdz.$$

Дифференцируем внешне:

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= 0, & d\omega^2 &= \frac{\dot{a}}{a}\omega^1 \wedge \omega^2 - \frac{a_y}{ab}\omega^2 \wedge \omega^3 - \frac{a_z}{ac}\omega^2 \wedge \omega^4, \\ d\omega^3 &= \frac{\dot{b}}{b}\omega^1 \wedge \omega^3 + \frac{b_x}{ab}\omega^2 \wedge \omega^3 - \frac{b_z}{bc}\omega^3 \wedge \omega^4, \\ d\omega^4 &= \frac{\dot{c}}{c}\omega^1 \wedge \omega^4 + \frac{c_x}{ac}\omega^2 \wedge \omega^4 + \frac{c_y}{bc}\omega^3 \wedge \omega^4. \end{aligned}$$

Вычисляем формы Кристоффеля ω_i^j метрики (29):

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{\dot{a}}{a}\omega^2, & \omega_1^3 &= \frac{\dot{b}}{b}\omega^3, & \omega_1^4 &= \frac{\dot{c}}{c}\omega^4, \\ \omega_2^3 &= \frac{a_y}{ab}\omega^2 + \frac{b_x}{ab}\omega^3, & \omega_2^4 &= \frac{a_z}{ac}\omega^2 + \frac{c_x}{ac}\omega^4, & \omega_3^4 &= \frac{c_y}{bc}\omega^4 - \frac{b_z}{bc}\omega^3. \end{aligned}$$

Находим внешние 2-формы римановой кривизны $R_i^j \equiv d\omega_i^j + \omega_k^j \wedge \omega_i^k$:

$$\begin{aligned} R_1^2 &= \frac{\ddot{a}}{a}\omega^1 \wedge \omega^2 + \left(\frac{a_y\dot{b}}{ab^2} - \frac{\dot{a}y}{ab}\right)\omega^2 \wedge \omega^3 + \left(\frac{a_z\dot{c}}{ac^2} - \frac{\dot{a}z}{ac}\right)\omega^2 \wedge \omega^4, \\ R_1^3 &= \frac{\ddot{b}}{b}\omega^1 \wedge \omega^3 + \left(\frac{\dot{b}_x}{ab} - \frac{\dot{a}b_x}{a^2b}\right)\omega^2 \wedge \omega^3 + \left(\frac{b_z\dot{c}}{bc^2} - \frac{\dot{b}z}{bc}\right)\omega^3 \wedge \omega^4, \\ R_1^4 &= \frac{\ddot{c}}{c}\omega^1 \wedge \omega^4 + \left(\frac{\dot{c}_x}{ac} - \frac{\dot{a}c_x}{a^2c}\right)\omega^2 \wedge \omega^4 + \left(\frac{\dot{c}_y}{bc} - \frac{\dot{b}c_y}{b^2c}\right)\omega^3 \wedge \omega^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2^3 &= \left(\frac{\dot{a}_y}{ab} - \frac{a_y\dot{b}}{ab^2}\right)\omega^1 \wedge \omega^2 + \\ &+ \left(\frac{b_{xx}}{a^2b} - \frac{a_xb_x}{a^3b} - \frac{a_{yy}}{ab^2} + \frac{a_yb_y}{ab^3} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{a_zb_z}{abc^2}\right)\omega^2 \wedge \omega^3 + \\ &+ \left(\frac{a_yb_z}{ab^2c} + \frac{a_zc_y}{abc^2} - \frac{a_{yz}}{abc}\right)\omega^2 \wedge \omega^4 + \left(\frac{\dot{b}_x}{ab} - \frac{\dot{a}b_x}{a^2b}\right)\omega^1 \wedge \omega^3 + \\ &+ \left(\frac{a_zb_x}{a^2bc} + \frac{b_zc_x}{abc^2} - \frac{b_{xz}}{abc}\right)\omega^3 \wedge \omega^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_2^4 = & \left(\frac{\dot{a}z}{ac} - \frac{a_z \dot{c}}{ac^2} \right) \omega^1 \wedge \omega^2 + \\
 & + \left(\frac{c_{xx}}{a^2 c} - \frac{a_x c_x}{a^3 c} - \frac{a_{zz}}{ac^2} + \frac{a_z c_z}{ac^3} + \frac{\dot{a} \dot{c}}{ac} - \frac{a_y c_y}{ab^2 c} \right) \omega^2 \wedge \omega^4 + \\
 & + \left(\frac{a_y b_z}{ab^2 c} + \frac{a_z c_y}{abc^2} - \frac{a_{yz}}{abc} \right) \omega^2 \wedge \omega^3 + \left(\frac{\dot{c}x}{ac} - \frac{\dot{a} c_x}{a^2 c} \right) \omega^1 \wedge \omega^4 + \\
 & + \left(\frac{c_{xy}}{abc} - \frac{a_y c_x}{a^2 bc} - \frac{b_x c_y}{ab^2 c} \right) \omega^3 \wedge \omega^4,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_3^4 = & \left(\frac{b_z \dot{c}}{bc^2} - \frac{\dot{b}_z}{bc} \right) \omega^1 \wedge \omega^3 + \\
 & + \left(\frac{b_{zz}}{bc^2} - \frac{b_z c_z}{bc^3} + \frac{c_{yy}}{b^2 c} - \frac{b_y c_y}{b^3 c} - \frac{\dot{b} \dot{c}}{bc} - \frac{b_x c_x}{a^2 bc} \right) \omega^3 \wedge \omega^4 + \\
 & + \left(\frac{a_z b_x}{a^2 bc} + \frac{b_z c_x}{abc^2} - \frac{b_{xz}}{abc} \right) \omega^2 \wedge \omega^3 + \left(\frac{\dot{c}_y}{bc} - \frac{\dot{b} c_y}{b^2 c} \right) \omega^1 \wedge \omega^4 + \\
 & + \left(\frac{c_{xy}}{abc} - \frac{a_y c_x}{a^2 bc} - \frac{b_x c_y}{ab^2 c} \right) \omega^2 \wedge \omega^4.
 \end{aligned}$$

Теперь записываем систему (28). Первые два уравнения одинаковы как для автодуального, так и для антиавтодуального случаев, потому что $R_{134}^2 = R_{132}^4 = 0$. Их можно записать в более симметричном виде, если первое из них сложить и вычесть с удвоенным вторым. Получим

$$R_{112}^2 - R_{334}^4 = R_{114}^4 + R_{223}^3 = R_{113}^3 + R_{224}^4.$$

Подставляем сюда и в оставшиеся три уравнения (28) выражения R_{ikl}^j через a, b, c :

$$\begin{aligned}
 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{b_{zz}}{bc^2} + \frac{b_z c_z}{bc^3} - \frac{c_{yy}}{b^2 c} + \frac{b_y c_y}{b^3 c} + \frac{\dot{b} \dot{c}}{bc} + \frac{b_x c_x}{a^2 bc} = \\
 = \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{b_{xx}}{a^2 b} - \frac{a_x b_x}{a^3 b} - \frac{a_{yy}}{ab^2} + \frac{a_y b_y}{ab^3} + \frac{\dot{a} \dot{b}}{ab} - \frac{a_z b_z}{abc^2} = \\
 = \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{c_{xx}}{a^2 c} - \frac{a_x c_x}{a^3 c} - \frac{a_{zz}}{ac^2} + \frac{a_z c_z}{ac^3} + \frac{\dot{a} \dot{c}}{ac} - \frac{a_y c_y}{ab^2 c}, \quad (30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{a_{yz}}{abc} - \frac{a_y b_z}{ab^2 c} - \frac{a_z c_y}{abc^2} + \epsilon \left(\frac{\dot{b}_x}{ab} - \frac{\dot{a} b_x}{a^2 b} - \frac{\dot{c}_x}{ac} + \frac{\dot{a} c_x}{a^2 c} \right) &= 0, \\
 \frac{a_y c_x}{a^2 bc} + \frac{b_x c_y}{ab^2 c} - \frac{c_{xy}}{abc} + \epsilon \left(\frac{\dot{a} z}{ac} - \frac{a_z \dot{c}}{ac^2} + \frac{b_z \dot{c}}{bc^2} - \frac{\dot{b}_z}{bc} \right) &= 0, \\
 \frac{a_z b_x}{a^2 bc} + \frac{b_z c_x}{abc^2} - \frac{b_{xz}}{abc} + \epsilon \left(\frac{a_y \dot{b}}{ab^2} - \frac{\dot{a}_y}{ab} + \frac{\dot{c}_y}{bc} - \frac{\dot{b} c_y}{b^2 c} \right) &= 0.
 \end{aligned} \quad (31)$$

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 2. Квадратичная форма (29) задает (анти)автодуальную конформную связность Картана тогда и только тогда, когда выполняются уравнения (30), (31).

3. Решение уравнений (30), (31) при $a = 1$, $b = c$. Без дополнительных ограничений невозможно решить столь сложную систему уравнений (30), (31). При этом нас интересуют только решения с ненулевой матрицей кривизны, ибо только в этом случае автодуальность отличается от антиавтодуальности. Легко проверить, что если какая-либо независимая переменная x , y , z или t не входит сразу в три функции a , b и c , то уравнения (31) перестают зависеть от ϵ , и потому возможны только конформно-плоские решения ($\Phi = 0$). То же будет и при $a = b = c$. Но если положить $a = 1$, $b = c$, то получается сравнительно простая система уравнений. В этом случае уравнения (30) сводятся к одному:

$$\left(\frac{\dot{b}}{b}\right) + \left(\frac{b_x}{b}\right)_x = -\frac{1}{b^2} \left(\left(\frac{b_z}{b}\right)_z + \left(\frac{b_y}{b}\right)_y \right),$$

а уравнения (31) — к двум:

$$\left(\frac{b_x}{b}\right)_y + \epsilon \left(\frac{\dot{b}}{b}\right)_z = 0, \quad \epsilon \left(\frac{\dot{b}}{b}\right)_y - \left(\frac{b_x}{b}\right)_z = 0.$$

Более простая система получится, если положить $b \equiv e^f$:

$$\ddot{f} + f_{xx} = -e^{-2f} (f_{yy} + f_{zz}), \quad f_{xy} + \epsilon \dot{f}_z = 0, \quad \epsilon \dot{f}_y - f_{xz} = 0. \quad (32)$$

I случай ($f_{yy} + f_{zz} \neq 0$). Дифференцируя (32)_{2,3} по всем четырем переменным, получим

$$(\ddot{f} + f_{xx})_y = (\ddot{f} + f_{xx})_z = (f_{yy} + f_{zz})' = (f_{yy} + f_{zz})_x = 0. \quad (33)$$

Отсюда дифференцированием уравнения (32)₁ по y и z найдем

$$(f_{yy} + f_{zz})_y + 2(f_{yy} + f_{zz})f_y = 0, \quad (f_{yy} + f_{zz})_z + 2(f_{yy} + f_{zz})f_z = 0.$$

Эти равенства в силу (33) и условия $f_{yy} + f_{zz} \neq 0$ означают, что f_y и f_z не зависят от t и x . Поэтому $\dot{f}_y = f_{xz} = f_{xy} = \dot{f}_z = 0$ и уравнения дуальности (32) не зависят от ϵ и дают лишь конформно-плоские решения. Нужные решения мы получим, лишь рассмотрев следующий случай.

II случай ($f_{yy} + f_{zz} = 0$). В этом случае систему (32) можно записать в виде

$$\ddot{f} = -f_{xx}, \quad f_{yy} = -f_{zz}, \quad \dot{f}_y = \epsilon f_{xz}, \quad \dot{f}_z = -\epsilon f_{xy}. \quad (34)$$

Эта система пассивна, так как уравнения

$$\ddot{f}_y = (\dot{f}_y)', \quad \ddot{f}_z = (\dot{f}_z)', \quad (f_{yy})' = (\dot{f}_y)_y, \quad (\dot{f}_y)_z = (\dot{f}_z)_y$$

совпадают соответственно с производной по x от уравнения (34)₄, с производной по x от уравнения (34)₃, производной по z от (34)₄ и производной по x от (34)₂. Согласно принципу экономии начальных условий (см. [11]), параметрическая часть функции f получается ее разложением в степенной ряд

по степеням $(t - t_0)$, $(x - x_0)$, $(y - y_0)$, $(z - z_0)$ путем вычеркивания членов, делящихся на $(t - t_0)^2$, $(y - y_0)^2$, $(t - t_0)(y - y_0)$, $(t - t_0)(z - z_0)$, и имеет вид

$$f_1(x, z) + (t - t_0)f_2(x) + (y - y_0)f_3(x, z).$$

Поэтому при произвольно заданных аналитических функциях $f_1(x, z)$, $f_2(x)$, $f_3(x, z)$ решение системы однозначно вычисляется путем разложения в степенной ряд при следующих начальных условиях:

$$\begin{aligned} f(t_0, x, y_0, z) &= f_1(x, z), \\ f(t_0, x, y_0, z_0) &= f_2(x), \\ f_y(t_0, x, y_0, z) &= f_3(x, z). \end{aligned} \quad (35)$$

Для системы (34) можно указать несколько серий решений в конечном виде, в том числе выражающихся через элементарные функции.

I серия конечных решений. Будем искать решения системы (34) в виде

$$f = u(t, x) \cdot y + \epsilon v(t, x) \cdot z. \quad (36)$$

Тогда система (34) сведется к двум уравнениям:

$$\dot{u} = v_x, \quad u_x = -\dot{v}.$$

Это условия Коши—Римана для голоморфной функции $g(t + ix) = u(t, x) + iv(t, x)$, где i — мнимая единица. Таким образом, если $g(t + ix)$ голоморфна, $u = \operatorname{Re} g$ и $v = \operatorname{Im} g$, то формула (36) дает решение системы (34). В частности, если $g(t + ix) = \exp(t + ix)$, то получаем решение в элементарных функциях:

$$f = e^t(y \cos x + \epsilon z \sin x).$$

II серия конечных решений. Если для f вместо (36) взять выражение

$$f = u(t, x) \cdot y - \epsilon v(t, x) \cdot z, \quad (37)$$

то система (34) станет такой:

$$\dot{u} = -v_x, \quad u_x = \dot{v}.$$

Это условия Коши—Римана для голоморфной функции $g(x + it) = u(t, x) + iv(t, x)$. Итак, (37) есть решение системы, если $u(t, x)$ и $v(t, x)$ есть вещественная и мнимая части голоморфной функции $g(x + it)$. В частности, если $g(x + it) = \exp(x + it)$, то получаем решение в элементарных функциях:

$$f = e^x(y \cos t - \epsilon z \sin t).$$

III серия конечных решений. Будем искать решения системы (34) в виде

$$f = u(y, z) \cdot t + \epsilon v(y, z) \cdot x. \quad (38)$$

Тогда система (34) сведется к

$$u_y = v_z, \quad u_z = -v_y.$$

Следовательно, u и v в системе (38) должны быть вещественной и мнимой частями голоморфной функции $g(y + iz)$. В частности, если $g(y + iz) = \exp(y + iz)$, то получаем решение

$$f = e^y(t \cos z + \epsilon x \sin z).$$

IV серия конечных решений. Функция

$$f = u(y, z) \cdot t - \epsilon v(y, z) \cdot x$$

будет решением системы (34), если u и v — вещественная и мнимая части голоморфной функции $g(z + iy)$. В частности, $f = e^z(t \cos y - \epsilon x \sin y)$ есть решение.

V серия конечных решений. Будем искать решения системы (34) в виде

$$f = u(t + y) \cdot v(x - \epsilon z). \quad (39)$$

Подставим это выражение в (34). Получим только одно уравнение:

$$\frac{u''}{u} + \frac{v''}{v} = 0.$$

Отсюда, учитывая (39), получаем

$$u'' + Cu = 0, \quad v'' - Cv = 0, \quad C = \text{const.}$$

Полагая $C = \pm D^2$ или $C = 0$, получим решения

$$\begin{aligned} f &= (C_1 \cos D(t + y) + C_2 \sin D(t + y)) (C_3 e^{D(x - \epsilon z)} + C_4 e^{-D(x - \epsilon z)}), \\ f &= (C_1 \cos D(x - \epsilon z) + C_2 \sin D(x - \epsilon z)) (C_3 e^{D(t + y)} + C_4 e^{-D(t + y)}), \\ f &= (C_1(t + y) + C_2) (C_3(x - \epsilon z) + C_4), \end{aligned} \quad (40)$$

где $D, C_i = \text{const.}$

При условиях $a = 1, b = c$ метрика (29) не меняется при замене друг другом y и z или x и t . Поэтому формулы (40) снова дадут решения, если в них поменять местами y, z , или x, t или и то, и другое.

4. Решение уравнений (30), (31) при $a = b, c = 1$. В этом случае два уравнения (30) сводятся к одному:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)' - \left(\frac{a_z}{a}\right)_z = \frac{1}{a^2} \left(\left(\frac{a_x}{a}\right)_x - \left(\frac{a_y}{a}\right)_y \right),$$

а три уравнения (31) — к двум:

$$\left(\frac{a_y}{a}\right)_z + \epsilon \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)_x = 0, \quad \left(\frac{a_x}{a}\right)_z + \epsilon \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)_y = 0.$$

После замены $a = e^f$ получим

$$\ddot{f} - f_{zz} = e^{-2f}(f_{xx} - f_{yy}), \quad f_{yz} + \epsilon \dot{f}_x = 0, \quad f_{xz} + \epsilon \dot{f}_y = 0. \quad (41)$$

Как и в предыдущем разделе, убеждаемся, что при $f_{xx} - f_{yy} \neq 0$ решения дают только конформно-плоские метрики, поэтому интерес представляет лишь случай $f_{xx} - f_{yy} = 0$. Тогда (41) превращается в

$$\ddot{f} = f_{zz}, \quad f_{xx} = f_{yy}, \quad \dot{f}_y = -\epsilon f_{xz}, \quad \dot{f}_x = -\epsilon f_{yz}. \quad (42)$$

Эта система не является системой Ковалевской, но пассивна, поэтому можно применить принцип экономии начальных условий. Параметрическая часть функции f получается ее разложением в степенной ряд по степеням $(t - t_0)$, $(x - x_0)$, $(y - y_0)$, $(z - z_0)$ путем вычеркивания членов, делящихся на $(t - t_0)^2$, $(y - y_0)^2$, $(t - t_0)(y - y_0)$, $(t - t_0)(x - x_0)$, и имеет вид

$$f_1(x, z) + (t - t_0)f_2(z) + (y - y_0)f_3(x, z).$$

Поэтому при произвольно заданных аналитических функциях $f_1(x, z)$, $f_2(z)$, $f_3(x, z)$ решение системы (42) однозначно вычисляется путем разложения в степенной ряд при следующих начальных условиях:

$$\begin{aligned} f(t_0, x, y_0, z) &= f_1(x, z), \\ \dot{f}(t_0, x_0, y_0, z) &= f_2(z), \\ f_y(t_0, x, y_0, z) &= f_3(x, z). \end{aligned} \quad (43)$$

Отыскание решений системы (42) в конечном виде можно провести по схеме предыдущего раздела, поэтому запишем лишь конечный результат:

$$\text{I. } f = y(g_1(t - z) + g_2(t + z)) + \epsilon x(g_1(t - z) - g_2(t + z)), \quad (44)$$

$$\text{II. } f = t(g_1(x - y) + g_2(x + y)) + \epsilon z(g_1(x - y) - g_2(x + y)). \quad (45)$$

Здесь g_1, g_2 — произвольные функции одной переменной.

$$\text{III. } f = (C_1 e^{D(t+x)} + C_2 e^{-D(t+x)})(C_3 e^{D(y-\epsilon z)} + C_4 e^{-D(y-\epsilon z)}),$$

$$\text{IV. } f = (C_1 \cos D(t+x) + C_2 \sin D(t+x))(C_3 \cos D(y-\epsilon z) + C_4 \sin D(y-\epsilon z)),$$

$$\text{V. } f = (C_1(t+x) + C_2)(C_3(y-\epsilon z) + C_4), \quad D, C_i = \text{const.}$$

5. Решение системы уравнений (30), (31) для логарифмически полиномиальных метрик. Квадратичную форму (29) будем называть *логарифмически полиномиальной*, если каждая из функций a, b, c представляет собой экспоненту от многочлена переменных t, x, y, z . Нас по-прежнему интересуют только те решения системы уравнений (30), (31), которые дают ненулевую матрицу Φ конформной кривизны. Это означает, что уравнения (31) должны существенно зависеть от ϵ . Положим

$$a = e^\alpha, \quad b = e^\beta, \quad c = e^\gamma, \quad (46)$$

где α, β, γ — многочлены от t, x, y, z . Тогда уравнения (31) примут вид

$$\begin{aligned} &e^{\alpha-\beta-\gamma}(\alpha_{yz} + \alpha_y \alpha_z - \alpha_y \beta_z - \alpha_z \gamma_y) + \\ &\quad + \epsilon(\dot{\beta}_x - \dot{\gamma}_x + \dot{\beta} \beta_x - \dot{\gamma} \gamma_x + \dot{\alpha} \gamma_x - \dot{\alpha} \beta_x) = 0, \\ &e^{\gamma-\alpha-\beta}(\gamma_{xy} + \gamma_x \gamma_y - \alpha_y \gamma_x - \beta_x \gamma_y) + \\ &\quad + \epsilon(\dot{\beta}_z - \dot{\alpha}_z + \dot{\beta} \beta_z - \dot{\alpha} \alpha_z + \alpha_z \dot{\gamma} - \beta_z \dot{\gamma}) = 0, \\ &e^{\beta-\alpha-\gamma}(\beta_{xz} + \beta_x \beta_z - \alpha_x \beta_x - \beta_z \gamma_x) + \\ &\quad + \epsilon(\dot{\alpha}_y - \dot{\gamma}_y + \dot{\alpha} \alpha_y - \dot{\gamma} \gamma_y + \dot{\beta} \gamma_y - \alpha_y \dot{\beta}) = 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Рассмотрим четыре возможности.

1) Выполняются все три равенства

$$\alpha - \beta - \gamma = C_1, \quad \gamma - \alpha - \beta = C_2, \quad \beta - \alpha - \gamma = C_3, \quad C_i = \text{const.} \quad (48)$$

Отсюда α, β, γ — константы. Понятно, что в этом случае матрица кривизны Φ нулевая.

2) Не выполняется ни одно из трех равенств (48). Тогда в (47) все выражения в скобках равны нулю, поэтому система (47) перестает зависеть от ϵ . Следовательно, все решения снова дают $\Phi = 0$.

3) Из равенств (48) выполняется только одно, например $\gamma - \alpha - \beta = C_2$. Перенормировкой переменных x, y, z можно добиться $C_2 = 0$, то есть $\gamma = \alpha + \beta$, причем α и β не константы (иначе будет выполняться еще одно равенство (48)). Тогда уравнения (47) станут такими:

$$\begin{aligned} \alpha_{yz} + \alpha_y \alpha_z - \alpha_y \beta_z - \alpha_z \gamma_y &= \dot{\beta}_x - \dot{\gamma}_x + \dot{\beta} \beta_x - \dot{\gamma} \gamma_x + \dot{\alpha} \gamma_x - \dot{\alpha} \beta_x = 0, \\ \gamma_{xy} + \gamma_x \gamma_y - \alpha_y \gamma_x - \beta_x \gamma_y + \epsilon(\dot{\beta}_z - \dot{\alpha}_z + \dot{\beta} \beta_z - \dot{\alpha} \alpha_z + \alpha_z \dot{\gamma} - \beta_z \dot{\gamma}) &= 0, \\ \beta_{xz} + \beta_x \beta_z - \alpha_z \beta_x - \beta_z \gamma_x &= \dot{\alpha}_y - \dot{\gamma}_y + \dot{\alpha} \alpha_y - \dot{\gamma} \gamma_y + \dot{\beta} \gamma_y - \alpha_y \dot{\beta} = 0, \end{aligned} \quad (49)$$

а (30) дадут

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} + e^{-2\alpha}(\beta_{xx} - 2\alpha_x \beta_x) + \\ + e^{-2\beta}(\beta_{yy} + 2\alpha_y \beta_y) + e^{-2\gamma}(\beta_{zz} - 2\alpha_z \beta_z) &= 0, \\ \ddot{\alpha} + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} - e^{-2\alpha}(\alpha_{xx} + 2\alpha_x \beta_x) + \\ + e^{-2\beta}(2\alpha_y \beta_y - \alpha_{yy}) + e^{-2\gamma}(\alpha_{zz} - 2\alpha_z \beta_z) &= 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Если $\gamma = \text{const}$, то в уравнения (49) не входит ϵ , поэтому в интересующих нас решениях $\gamma \neq \text{const}$. Тогда из (50) с учетом того, что α и β , и γ не константы и при этом являются многочленами, следует, что

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} &= 0, & \ddot{\alpha} + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} &= 0, & \beta_{xx} - 2\alpha_x \beta_x &= 0, \\ \alpha_{xx} + 2\alpha_x \beta_x &= 0, & \beta_{yy} + 2\alpha_y \beta_y &= 0, & 2\alpha_y \beta_y - \alpha_{yy} &= 0, \\ \beta_{zz} - 2\alpha_z \beta_z &= 0, & \alpha_{zz} - 2\alpha_z \beta_z &= 0. \end{aligned} \quad (51)$$

Так как первые слагаемые равенств (51)_{1,2} имеют степень вхождения переменной t меньшую, чем вторые, то равенства (51)_{1,2} возможны лишь при $\ddot{\alpha} = \dot{\beta} = 0$ или $\dot{\alpha} = \ddot{\beta} = 0$. Поскольку функции α и β равноправны, мы будем считать, что $\dot{\alpha} = \ddot{\beta} = 0$, другой случай рассматривается аналогично. При этом $\dot{\beta} \neq 0$, так как в противном случае в уравнения (49) не входит ϵ . Система (49) превращается в

$$\begin{aligned} \alpha_{yz} - \alpha_y \beta_z - \alpha_z \beta_y &= \alpha_x = 0, \\ \beta_{xy} - \alpha_y \beta_x + \epsilon(\dot{\beta}_z + \alpha_z \dot{\beta}) &= 0, \\ \beta_{xz} - \alpha_z \beta_x &= \dot{\beta}_y + \alpha_y \dot{\beta} = 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Первые слагаемые равенств (51)_{7,8} имеют степень вхождения переменной z меньшую, чем вторые, поэтому равенства (51)_{7,8} возможны лишь при

$$\beta_{zz} = \alpha_z = 0 \quad \text{или} \quad \alpha_{zz} = \beta_z = 0. \quad (53)$$

Пусть выполняется (53)₁. При этом должно быть $\beta_z \neq 0$, иначе (52) перестанет зависеть от ϵ . Тогда (52) принимает вид

$$\beta_{xy} + \epsilon \dot{\beta}_z = 0, \quad \beta_{xz} = \dot{\beta}_y = 0, \quad \alpha = \text{const},$$

и мы выходим за рамки возможности 3), так как в ней $\alpha \neq \text{const}$. Следовательно, обязательно выполняется (53)₂. При этом должно быть $\alpha_z \neq 0$, иначе (52) снова не зависит от ϵ . Тогда (52) принимает вид

$$\alpha_{yz} - \alpha_z \beta_y = \alpha_x = 0, \quad \alpha_z \dot{\beta} = 0, \quad \beta_x = \dot{\beta}_y + \alpha_y \dot{\beta} = 0,$$

опять не зависящий от ϵ . Итак, возможность 3) дает лишь конформно-плоские решения.

- 4) Осталось рассмотреть последний случай, когда из трех равенств (48) выполняются только два, а третье не выполняется. Пусть, например,

$$\alpha - \beta - \gamma \neq \text{const}, \quad \gamma - \alpha - \beta = C_2, \quad \beta - \alpha - \gamma = C_3, \quad C_i = \text{const}.$$

Отсюда $\alpha = \text{const}$, $\gamma - \beta = \text{const}$. Перенормировкой переменных x , y , z можно добиться $\alpha = 0$, $\gamma = \beta$, и с учетом (46) мы снова пришли к ограничениям раздела 3: $a = 1$, $b = c$.

Вывод. Для логарифмически полиномиальных метрик (29) уравнения дуальности могут иметь решения с ненулевой матрицей кривизны только при ограничениях $a = 1$, $b = c$, или $b = 1$, $a = c$, или $c = 1$, $a = b$.

Отсюда следует, что отыскание нетривиальных решений уравнений дуальности (30), (31) для логарифмически полиномиальных метрик равносильно отысканию полиномиальных решений системы (32) в случае $a = 1$, $b = c = e^f$ или системы (41) в случае $c = 1$, $a = b = e^f$, которые, очевидно, сводятся соответственно к системам (34) или (42).

Мы уже нашли некоторые полиномиальные решения этих систем. Формулы (36)–(39) дают полиномиальные решения системы (34), если в них в качестве u и v взять соответственно вещественную и мнимую части голоморфного многочлена $g(t + ix)$, $g(x + it)$, $g(y + iz)$ и $g(z + iy)$; формулы (44) и (45) дают полиномиальные решения системы (42), если в них считать $g_1(t - z)$, $g_2(t + z)$, $g_1(x - y)$, $g_2(x + y)$ многочленами.

Однако этими формулами далеко не исчерпываются все полиномиальные решения систем (34) и (42). Для отыскания всех полиномиальных решений этих систем воспользуемся тем, что эти системы линейные, однородные, с постоянными коэффициентами и содержат только вторые частные производные от функции f . Отсюда следует, что если f — полиномиальное решение, то и все однородные составляющие многочлена f тоже будут решениями этих систем. Поэтому достаточно уметь находить лишь однородные полиномиальные решения. Чтобы найти однородное полиномиальное решение степени n

уравнений (34) и (42), следует воспользоваться представлением коэффициентов многочлена f по формуле Тейлора, а все производные от f вычислять исходя из начальных условий (35):

$$f(0, x, 0, z) = f_1(x, z), \quad \dot{f}(0, x, 0, 0) = f_2(x), \quad f_y(0, x, 0, z) = f_3(x, z)$$

для системы (34) или исходя из начальных условий (43):

$$f(0, x, 0, z) = f_1(x, z), \quad \dot{f}(0, 0, 0, z) = f_2(z), \quad f_y(0, x, 0, z) = f_3(x, z) \quad (54)$$

для системы (42). При этом следует считать функции f_1, f_2, f_3 заданными однородными многочленами степеней соответственно $n, n-1, n-1$.

Приведем примеры решения системы (42) в виде однородных многочленов степеней $n=2$ и $n=3$. При $n=2$

$$f_1(x, z) = a_1x^2 + a_2z^2 + a_3xz, \quad f_2(z) = a_4z, \quad f_3(x, z) = a_5x + a_6z, \quad a_i = \text{const.}$$

Тогда

$$f = \frac{f_{zz}}{2!}z^2 + z(\dot{f}_zt + f_{xz}x + f_{yz}y) + \\ + \frac{\ddot{f}}{2!}t^2 + \frac{f_{xx}}{2!}x^2 + \frac{f_{yy}}{2!}y^2 + \dot{f}_xtx + \dot{f}_yty + f_{xy}xy =$$

[воспользуемся (42) и (54)]

$$= \frac{(f_1)_{zz}}{2!}z^2 + z((f_2)_zt + (f_1)_{xz}x + (f_3)_zy) + \\ + \frac{(f_1)_{zz}}{2}t^2 + \frac{(f_1)_{xx}}{2}x^2 + \frac{(f_1)_{yy}}{2!}y^2 - \epsilon(f_3)_z tx - \epsilon(f_1)_{xz} ty + (f_3)_x xy = \\ = a_1(x^2 + y^2) + a_2(z^2 + t^2) + a_3(xz - \epsilon ty) + a_4tz + a_5xy + a_6(yz - \epsilon tx).$$

Поэтому для метрики (29) имеем

$$a = b = e^f = \exp(a_1(x^2 + y^2) + a_2(z^2 + t^2) + a_3(xz - \epsilon ty) + \\ + a_4tz + a_5xy + a_6(yz - \epsilon tx)z), \quad c = 1, \quad a_i = \text{const.}$$

При $n=3$

$$f_1(x, z) = a_1x^3 + a_2z^3 + a_3x^2z + a_4xz^2, \quad f_2(z) = a_5z^2, \\ f_3(x, z) = a_6x^2 + a_7z^2 + a_8xz, \quad a_i = \text{const.}$$

Тогда

$$f = \frac{1}{3!}f_{zzz}z^3 + \frac{1}{2!}z^2(\dot{f}_{zz}t + f_{zzz}x + f_{yzz}y) + \frac{1}{3!}(\ddot{f}t^3 + f_{xxx}x^3 + f_{yyy}y^3) + \\ + z\left(\frac{1}{2!}\ddot{f}_zt^2 + \frac{1}{2!}f_{xxz}x^2 + \frac{1}{2!}f_{yyz}y^2 + \dot{f}_{xz}tx + \dot{f}_{yz}ty + f_{xyz}xy\right) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2!}(\ddot{f}_x t^2 x + \dot{f}_{xx} t x^2 + \ddot{f}_y t^2 y + \dot{f}_{yy} t y^2 + f_{xxy} x^2 y + f_{xyy} x y^2) + \dot{f}_{xy} t x y = \\
 & = \frac{(f_1)_{zzz}}{6} z^3 + \frac{z^2}{2}((f_2)_{xx} t + (f_3)_{zz} y + (f_1)_{xzz} x) + \frac{1}{2}(f_3)_{xx} x^2 y + \\
 & + \frac{1}{6}((f_1)_{xxx} x^3 + (f_2)_{zz} t^3 + (f_3)_{xx} y^3) - \epsilon(f_1)_{xxz} t x y + \\
 & + z\left(\frac{(f_1)_{zzz}}{2} t^2 + \frac{(f_1)_{xxz}}{2} x^2 + \frac{(f_1)_{xxz}}{2} y^2 - \epsilon(f_1)_{xzz} t y - \epsilon(f_3)_{zz} t x + (f_3)_{xz} x y\right) + \\
 & + \frac{1}{2}((f_1)_{xzz} t^2 x - \epsilon(f_3)_{xz} t x^2 + (f_3)_{zz} t^2 y - \epsilon(f_3)_{xz} t y^2 + (f_1)_{xxx} x y^2) = \\
 & = a_1(x^3 + 3xy^2) + a_2(z^3 + 3t^2 z) + a_3(x^2 z + y^2 z - 2\epsilon t x y) + \\
 & + a_4(xz^2 + t^2 x - 2\epsilon t y z) + \frac{1}{3}a_5(3tz^2 + t^3) + \frac{1}{3}a_6(3x^2 y + y^3) + \\
 & + a_7(yz^2 + t^2 y - 2\epsilon t x z) + \frac{1}{2}a_8(2xyz - \epsilon t y^2 - \epsilon t x^2).
 \end{aligned}$$

По этой же схеме вычисляются однородные полиномиальные решения системы (42) для всех степеней n . Аналогично ищутся однородные полиномиальные решения и для системы (34). Можно составить программу для машинного отыскания полиномиальных решений систем (34) и (42) для всех степеней n .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Уравнения (28) верны только в каноническом репере. В адаптированном или голономном реперах формулы будут совсем другими. Но уравнения (30), (31) для метрики (29) одинаковы во всех реперах.

Заключение. Уравнения Янга—Миллса на 4-многообразии с нормальной конформной связностью Картана представляют собой чрезвычайно сложную систему из десяти нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных 4-го порядка на десять неизвестных функций, являющихся коэффициентами угловой метрики. Условие дуальности (14), накладываемое на матрицу конформной кривизны, позволяет сильно упростить уравнения Янга—Миллса, так как порядок дифференциальных уравнений в условии (14) равен двум, а сами уравнения Янга—Миллса выполняются в силу тождеств Бианки. В данной работе мы показали, что условия дуальности на 4-многообразии с нормальной конформной связностью Картана и сигнатурой метрики $(- - ++)$ представляют собой систему из пяти уравнений (28). В случае диагональной метрики (29) они приобретают вид (30), (31) системы из пяти дифференциальных уравнений в частных производных 2-го порядка на три неизвестных функции от всех четырех переменных. Но эта система все равно еще очень сложная, поэтому мы привели лишь некоторые ее частные решения.

Конкурирующие интересы. У нас нет конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи.

Авторская ответственность. Мы несем полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи нами одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Лукьянов В. А., Кривоносов Л. Н. Уравнения Янга–Миллса на 4-многообразиях конформной связности без кручения с различными сигнатурами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 4. С. 633–650. doi: [10.14498/vsgtu1562](https://doi.org/10.14498/vsgtu1562).
2. Акивис М. А., Коннов В. В. Некоторые локальные аспекты теории конформных структур // *УМН*, 1993. Т. 48, № 1(289). С. 3–40.
3. Акивис М. А. О вполне изотропных подмногообразиях четырехмерной псевдоконформной структуры // *Изв. вузов. Матем.*, 1983. № 1. С. 3–11.
4. Коннов В. В. Асимптотическая псевдоконформная структура на четырехмерной гиперповерхности и ее вполне изотропные двумерные подмногообразия // *Изв. вузов. Матем.*, 1992. № 6. С. 71–79.
5. Картан Э. Пространства конформной связности / *Пространства аффинной, проективной и конформной связности*. Казань: Казанск. ун-т, 1962. С. 153–206; Cartan É. Les espaces à connexion conforme // *Ann. Soc. Pol. Math.*, 1923. vol. 2. pp. 171–221.
6. Kobayashi Sh. Automorphisms of G-Structures / *Transformation Groups in Differential Geometry* / Classics in Mathematics, 70. Berlin, Heidelberg: Springer, 1995. pp. 1–38. doi: [10.1007/978-3-642-61981-6_1](https://doi.org/10.1007/978-3-642-61981-6_1).
7. Atiyah M. F., Hitchin N. J., Singer I. M. Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry // *Proc. Roy. Soc. London. Series A*, 1978. vol. 362, no. 1711. pp. 425–461. doi: [10.1098/rspa.1978.0143](https://doi.org/10.1098/rspa.1978.0143).
8. Кривоносов Л. Н., Лукьянов В. А. Основная теорема для (анти)автотуальной конформной связности без кручения // *Изв. вузов. Матем.*, 2019. № 2. С. 29–38. doi: [10.26907/0021-3446-2019-2-29-38](https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-2-29-38).
9. Кривоносов Л. Н., Лукьянов В. А. Структура основного тензора пространства конформной связности без кручения. Конформные связности на гиперповерхности проективного пространства // *Сиб. журн. чист. и прикл. матем.*, 2017. Т. 17, № 2. С. 21–38. doi: [10.17377/PAM.2017.17.203](https://doi.org/10.17377/PAM.2017.17.203).
10. Dunajski M., Ferapontov E. V., Kruglikov B. On the Einstein–Weyl and conformal self-duality equations // *J. Math. Phys.*, 2015. vol. 56, 083501. doi: [10.1063/1.4927251](https://doi.org/10.1063/1.4927251).
11. Фиников С. П. *Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии*. М.–Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1948. 432 с.

MSC: 53A30

Duality equations on a 4-manifold of conformal torsion-free connection and some of their solutions for the zero signature

L. N. Krivonosov, V. A. Luk'yanov

Nizhny Novgorod State Technical University,
24, Minina st., Nizhnii Novgorod, 603600, Russian Federation.

Abstract

On a 4-manifold of conformal torsion-free connection with zero signature $(- - ++)$ we found conditions under which the conformal curvature matrix is dual (self-dual or anti-self-dual). These conditions are 5 partial differential equations of the 2nd order on 10 coefficients of the angular metric and 4 partial differential equations of the 1st order, containing also 3 coefficients of external 2-form of charge. (External 2-form of charge is one of the components of the conformal curvature matrix.) Duality equations for a metric of a diagonal type are composed. They form is a system of five second-order differential equations on three unknown functions of all four variables. We found several series of solutions for this system. In particular, we obtained all solutions for a logarithmically polynomial diagonal metric, that is, for a metric whose coefficients are exponents of polynomials of four variables.

Keywords: manifold of conformal connection, curvature, torsion, Hodge operator, self-duality, anti-self-duality, Yang–Mills equations.

Received: 23rd January, 2019 / Revised: 12th May, 2019 /

Accepted: 10th June, 2019 / First online: 12th June, 2019

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship or publication of this contribution.

Authors' contributions and responsibilities. We are fully responsible for submitting the final manuscript in print. Each of us has approved the final version of the manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Krivonosov L. N., Luk'yanov V. A. Duality equations on a 4-manifold of conformal torsion-free connection and some of their solutions for the zero signature, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 2, pp. 207–228. doi: [10.14498/vsgtu1674](https://doi.org/10.14498/vsgtu1674) (In Russian).

Authors' Details:

Leonid N. Krivonosov  <https://orcid.org/0000-0002-3533-9595>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics;
e-mail: l.n.krivonosov@gmail.com

Vyacheslav A. Luk'yanov  <https://orcid.org/0000-0002-7294-0232>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics;
e-mail: oxyzt@ya.ru

References

1. Luk'yanov V. A., Krivososov L. N. Yang–Mills equations on conformally connected torsion-free 4-manifolds with different signatures, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 4, pp. 633–650 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu1562](https://doi.org/10.14498/vsgtu1562).
2. Akivis M. A., Konnov V. V. Some local aspects of the theory of conformal structure, *Russian Math. Surveys*, 1993, vol. 48, no. 1, pp. 1–35. doi: [10.1070/RM1993v048n01ABEH000984](https://doi.org/10.1070/RM1993v048n01ABEH000984).
3. Akivis M. A. On completely isotropic submanifolds of a four-dimensional pseudoconformal structure, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 1983, vol. 27, no. 1, pp. 1–11.
4. Konnov V. V. The asymptotic pseudoconformal structure on a four-dimensional hypersurface and its totally isotropic two-dimensional submanifolds, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1992, vol. 36, no. 6, pp. 67–74.
5. Cartan É. Les espaces à connexion conforme, *Ann. Soc. Pol. Math.*, 1923, vol. 2, pp. 171–221.
6. Kobayashi Sh. Automorphisms of G-Structures, In: *Transformation Groups in Differential Geometry*, Classics in Mathematics, 70. Berlin, Heidelberg, Springer, 1995, pp. 1–38. doi: [10.1007/978-3-642-61981-6_1](https://doi.org/10.1007/978-3-642-61981-6_1).
7. Atiyah M. F., Hitchin N. J., Singer I. M. Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry, *Proc. Roy. Soc. London. Series A*, 1978, vol. 362, no. 1711, pp. 425–461. doi: [10.1098/rspa.1978.0143](https://doi.org/10.1098/rspa.1978.0143).
8. Krivososov L. N., Luk'yanov V. A. The main theorem for (anti)self-dual conformal torsion-free connection, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 2019, no. 2, pp. 29–38 (In Russian). doi: [10.26907/0021-3446-2019-2-29-38](https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-2-29-38).
9. Krivososov L. N., Luk'yanov V. A. Structure of the Main Tensor of Conformally Connected Torsion Free Space. Conformal Connections on Hypersurfaces of Projective Space, *J. Math. Sci.*, 2018, vol. 231, no. 2, pp. 189–205. doi: [10.1007/s10958-018-3815-z](https://doi.org/10.1007/s10958-018-3815-z).
10. Dunajski M., Ferapontov E. V., Kruglikov B. On the Einstein–Weyl and conformal self-duality equations, *J. Math. Phys.*, 2015, vol. 56, 083501. doi: [10.1063/1.4927251](https://doi.org/10.1063/1.4927251).
11. Finikov S. P. *Metod vneshnih form Kartana v differencial'noj geometrii* [Cartan's method of exterior forms in differential geometry]. Moscow, Leningrad, 1948, 432 pp. (In Russian)