Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 23, № 2. С. 229–245
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1707

УДК 517.956.3

Разрешимость нелокальной задачи для гиперболического уравнения с вырождающимися интегральными условиями

Л. С. Пулькина, В. А. Киричек

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева,
Россия, 443086, Самара, Московское ш., 34.

Аннотация

Рассмотрена нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения. Основное внимание уделено исследованию разрешимости задачи в том случае, когда интегральные условия второго рода вырождаются в некоторых точках рассматриваемого интервала в условия первого рода. При обосновании разрешимости задачи с вырождающимися нелокальными условиями неизбежно возникает ряд трудностей, которые успешно преодолены с помощью предложенного в статье метода, суть которого состоит в переходе к эквивалентной задаче с динамическими нелокальными условиями. Применение этого приема позволило эффективно ввести понятие обобщенного решения, получить априорные оценки и доказать однозначную разрешимость поставленной задачи в пространстве Соболева.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, нелокальная задача, интегральные условия первого и второго рода, вырождающиеся нелокальные условия, динамические краевые условия, обобщенное решение, пространство Соболева.

Получение: 24 мая 2019 г. / Исправление: 8 июня 2019 г. /
Принятие: 10 июня 2019 г. / Публикация онлайн: 23 июня 2019 г.

Научная статья

Образец для цитирования

Пулькина Л. С., Киричек В. А. Разрешимость нелокальной задачи для гиперболического уравнения с вырождающимися интегральными условиями // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 2. С. 229–245. doi: 10.14498/vsgtu1707.

Сведения об авторах

Людмила Степановна Пулькина https://orcid.org/0000-0001-7947-6121
доктор физико-математических наук, профессор; каф. дифференциальных уравнений и теории управления; e-mail: louise@samdiff.ru

Виталия Алекандровна Киричек https://orcid.org/0000-0001-9817-863X
аспирант; каф. дифференциальных уравнений и теории управления;
e-mail: Vitalya29@gmail.com

Введение. Рассматривается задача с нелокальными интегральными условиями для гиперболического уравнения. Внимание к задачам с интегральными условиями, привлеченное статьями Дж. Кэннона [1] и Л. И. Камынина [2] в 60-х годах прошлого века, не ослабевает и в настоящее время. Это связано не только с тем,что нелокальные задачи интересны как математический объект. Специалисты в других областях современного естествознания предлагают использовать нелокальный подход в математическом моделировании многих процессов и явлений, считая его эффективным. Обоснованию этого утверждения посвящена статья [3], содержащая также большое количество примеров и обширный библиографический список.

Исследование нелокальных задач осложняется тем, что для обоснования их разрешимости неприменимы классические методы, которые обычно используют для той же цели при изучении начально-краевых задач, что влечет за собой необходимость разработки новых методов. К настоящему времени разработаны некоторые методы исследования нелокальных задач [4–9].

В нашей статье внимание сосредоточено на нелокальной задаче для одномерного гиперболического уравнения с интегральными условиями. Задачи с интегральными условиями различных типов в настоящее время активно изучаются. Отметим ряд работ, наиболее близких по предмету исследования к содержанию предлагаемой статьи [10–12]. Задача, результаты исследования которой представлены в статье, имеет существенное отличие от рассмотренных ранее, которое заключается в том, что интегральные условия вырождаются в некоторых точках границы области. Возникающие при этом трудности обоснования разрешимости и методы их преодоления являются основным содержанием настоящей статьи.

1. Постановка задачи. В области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$ рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - \big(a(x,t)u_x\big)_x + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1}$$

и поставим следующую задачу.

Задача. *В области Q_T найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным данным*

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 \tag{2}$$

и нелокальным условиям

$$\alpha(t)u(0,t) + \int_0^l K_1(x)u(x,t)dx = 0, \tag{3}$$

$$\beta(t)u(l,t) + \int_0^l K_2(x)u(x,t)dx = 0. \tag{4}$$

Будем считать уравнение (1) всюду в области Q_T гиперболическим, что обеспечивается условием $a(x,t) > 0$ для всех $(x,t) \in Q_T$.

Заметим, что однородность начальных условий не ограничивает общности. Существенным моментом в постановке задачи является предположение

$$\alpha(0) = 0, \quad \beta(T) = 0,$$

которое не позволяет использовать полученные ранее результаты о разрешимости задач с нелокальными интегральными условиями.

Действительно, как было показано в [12], выбор эффективного метода зависит от вида нелокальных условий.

Если внеинтегральный член нелокального условия второго рода представляет собой след решения на границе области, то в этом случае можно использовать либо метод вспомогательных задач [13], либо метод, основанный на сведении задачи (1)–(4) к задаче со стандартными граничными условиями для нагруженного уравнения с помощью специально построенного оператора [10]. Однако оба эти метода применимы только в том случае, когда $\alpha(t), \beta(t)$ нигде не обращаются в нуль. Действительно, попытка применить метод вспомогательных задач приведет к следующему результату.

Пусть $u(0,t) = \mu_1(t)$, $u(l,t) = \mu_2(t)$, $U\big(x,t,\mu_1(t),\mu_2(t)\big)$ — решение краевой задачи для уравнения (1) с граничными условиями $\mu_i(t)$.

Применив к этому решению, существование и единственность которого вытекают из общей теории краевых задач, условия (3), (4), приходим к операторным уравнениям третьего рода:

$$\alpha(t)\mu_1(t) + \int_0^l K_1(x)U\big(x,t,\mu_1(t),\mu_2(t)\big)dx = g_1(t),$$

$$\beta(t)\mu_2(t) + \int_0^l K_2(x)U\big(x,t,\mu_1(t),\mu_2(t)\big)dx = g_2(t).$$

Похожая ситуация возникает и при попытке применить второй из упомянутых методов [11], что и послужило мотивацией для разработки метода, пригодного для доказательства разрешимости задачи с вырождающимися нелокальными условиями. Этот метод и будет продемонстрирован в следующих параграфах.

Предлагаемый метод основан на возможности сведения условий (3), (4) к интегральным условиям, не вырождающимся в условия первого рода. Мы выведем такие условия и покажем, что они эквивалентны исходным. Заметим, что ранее была рассмотрена задача с одним вырождающимся интегральным условием [11], однако исследование предложенной в этой статье задачи с двумя вырождающимися интегральными условиями потребовало существенной модификации предложенного в [11] метода.

2. Переход к эквивалентной задаче. Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (1)–(4), α, $\beta \in C^2[0,T]$. Продифференцируем условия (3), (4) по t дважды:

$$\alpha''(t)u(0,t) + 2\alpha'(t)u_t(0,t) + \alpha(t)u_{tt}(0,t) + \int_0^l K_1(x)u_{tt}(x,t)dx = 0,$$

$$\beta''(t)u(l,t) + 2\beta'(t)u_t(l,t) + \beta(t)u_{tt}(l,t) + \int_0^l K_2(x)u_{tt}(x,t)dx = 0.$$

Преобразуем интегралы, входящие в эти соотношения, учитывая предположение о том, что $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1). Тогда

$$\int_0^l K_i(x)u_{tt}(x,t)dx = \int_0^l K_i(x)\big[(au_x)_x - cu + f\big]dx. \quad i = 1,2$$

Интегрируя по частям последние соотношения, получим:

$$\big[\alpha''(t)+K_1'(0)a(0,t)\big]u(0,t)-K_1'(l)a(l,t)u(l,t)+$$
$$+2\alpha'(t)u_t(0,t)+\alpha(t)u_{tt}(0,t)+K_1(l)a(l,t)u_x(l,t)-K_1(0)a(0,t)u_x(0,t)+$$
$$+\int_0^l (K_1'a)_x u(x,t)dx-\int_0^l K_1(x)c(x,t)u(x,t)dx+$$
$$+\int_0^l K_1(x)f(x,t)dx=0, \quad (5)$$

$$\big[\beta''(t)+K_2'(l)a(l,t)\big]u(l,t)-K_2'(0)a(0,t)u(0,t)+$$
$$+2\beta'(t)u_t(l,t)+\beta(t)u_{tt}(l,t)+K_2(l)a(l,t)u_x(l,t)-K_2(0)a(0,t)u_x(0,t)+$$
$$+\int_0^l (K_2'a)_x u(x,t)dx-\int_0^l K_2(x)c(x,t)u(x,t)dx+$$
$$+\int_0^l K_2(x)f(x,t)dx=0. \quad (6)$$

Пусть выполняется условие

$$\Delta\equiv K_1(0)K_2(l)-K_1(l)K_2(0)\neq 0. \quad (7)$$

Рассмотрим соотношения (5), (6) как систему уравнений относительно $u_x(0,t)$ и $u_x(l,t)$. В силу (7) эту систему можно разрешить, и в результате мы получим

$$a(0,t)u_x(0,t)=\alpha_{11}u(0,t)+\alpha_{12}u(l,t)+\beta_{11}u_t(0,t)+\beta_{12}u_t(l,t)+$$
$$+\gamma_{11}u_{tt}(0,t)+\gamma_{12}u_{tt}(l,t)+\int_0^l H_1(x,t)u(x,t)dx+g_1(t), \quad (8)$$

$$a(0,t)u_x(l,t)=\alpha_{21}u(0,t)+\alpha_{22}u(l,t)+\beta_{21}u_t(0,t)+\beta_{22}u_t(l,t)+$$
$$+\gamma_{21}u_{tt}(0,t)+\gamma_{22}u_{tt}(l,t)+\int_0^l H_2(x,t)u(x,t)dx+g_2(t), \quad (9)$$

где

$$\alpha_{11}(t)=\frac{\alpha''(t)K_2(l)-[K_1'(0)K_2(l)-K_2'(0)K_1(l)]a(0,t)}{\Delta},$$
$$\alpha_{12}(t)=\frac{[K_2'(l)K_1(0)-K_1'(l)K_2(0)]a(l,t)-\beta''(t)K_1(l)}{\Delta},$$
$$\beta_{11}(t)=\frac{2\alpha'(t)K_2(l)}{\Delta}, \qquad \beta_{12}(t)=-\frac{2\beta'(t)K_1(l)}{\Delta},$$
$$\gamma_{11}(t)=\frac{\alpha(t)K_2(l)}{\Delta}, \qquad \gamma_{12}(t)=-\frac{\beta(t)K_1(l)}{\Delta},$$
$$H_1(x,t)=\frac{K_2(l)[(K_1'a)_x-K_1(x)c(x,t)]-K_1(l)[(K_2'a)_x-K_2(x)c(x,t)]}{\Delta},$$
$$g_1(t)=\int_0^l \frac{K_1(x)K_2(l)-K_2(x)K_1(l)}{\Delta}f(x,t)dx,$$

$$\alpha_{21}(t) = \frac{\alpha''(t)K_2(0) - [K_1'(0)K_2(0) - K_2'(0)K_1(0)]a(0,t)}{\Delta},$$
$$\alpha_{22}(t) = \frac{[K_2'(l)K_1(0) - K_1'(l)K_2(0)]a(l,t) - \beta''(t)K_1(0)}{\Delta},$$
$$\beta_{21}(t) = \frac{2\alpha'(t)K_2(0)}{\Delta}, \qquad \beta_{22}(t) = -\frac{2\beta'(t)K_1(0)}{\Delta},$$
$$\gamma_{21}(t) = \frac{\alpha(t)K_2(0)}{\Delta}, \qquad \gamma_{22}(t) = -\frac{\beta(t)K_1(0)}{\Delta},$$
$$H_2(x,t) = \frac{K_2(0)[(K_1'a)_x - K_1(x)c(x,t)] - K_1(0)[(K_2'a)_x - K_2(x)c(x,t)]}{\Delta},$$
$$g_2(t) = \int_0^l \frac{K_1(x)K_2(0) - K_2(x)K_1(0)}{\Delta} f(x,t)dx.$$

Пусть теперь $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям (8), (9). Тогда выполняются и соотношения (5), (6), которые мы преобразуем следующим образом:

$$\int_0^l \big(K_i'(x)a\big)_x u dx = \int_0^l K_i(x)(au_x)_x dx - K_i(l)a(l,t)u_x(l,t) +$$
$$+ K_i(0)a(0,t)u_x(0,t) + K_i'(l)a(l,t)u(l,t) - K_i'(0)a(0,t)u(0,t), \quad i = 1,2.$$

Тогда соотношения (5), (6) примут следующий вид:

$$\big(\alpha(t)u(0,t)\big)_{tt} + \int_0^l K_1(x)(a(x,t)u_x(x,t))_x dx -$$
$$- \int_0^l K_1(x)c(x,t)u(x,t)dx + \int_0^l K_1(x)f(x,t)dx = 0,$$

$$\big(\beta(t)u(l,t)\big)_{tt} + \int_0^l K_2(x)(a(x,t)u_x(x,t))_x dx -$$
$$- \int_0^l K_2(x)c(x,t)u(x,t)dx + \int_0^l K_2(x)f(x,t)dx = 0.$$

Заметим, что, по предположению, $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1), поэтому

$$\int_0^l K_i(x)[(au_x)_x - cu + f]dx = \int_0^l K_i(x)u_{tt}dx, \quad i = 1,2,$$

и мы получим, что

$$\big(\alpha(t)u(0,t)\big)_{tt} + \int_0^l K_1(x)u_{tt}(x,t)dx = 0,$$
$$\big(\beta(t)u(l,t)\big)_{tt} + \int_0^l K_2(x)u_{tt}(x,t)dx = 0.$$

Интегрируя каждое из этих соотношений дважды по t и учитывая начальные условия (2), приходим к нелокальным условиям (3), (4).

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма. *Если* α, $\beta \in C^2[0,T]$, $K_i \in C^2[0,l]$,

$$\Delta \equiv K_1(0)K_2(l) - K_1(l)K_2(0) \neq 0,$$

то задача (1)–(4) *эквивалентна задаче* (1), (2), (8) (9).

Доказательство. Условия (8), (9) (в отличие от (3), (4)) содержат значения производных по нормали к боковой границе области Q_T. Для обоснования разрешимости задач с нелокальными условиями такой структуры известен весьма эффективный метод [13, с. 28], который мы теперь имеем возможность применить. □

Доказанная лемма позволяет проводить все рассуждения для задачи (1), (2), (8), (9), а полученные результаты о разрешимости этой задачи будут справедливы и для задачи (1)–(4).

3. Разрешимость задачи (Основной результат). Введем понятие обобщенного решения задачи (1), (2), (8), (9). Используя известную процедуру [14, с. 210], получим тождество

$$\int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + a u_x v_x + cuv)dxdt +$$
$$+ \int_0^T v(0,t)\big[\alpha_{11}u(0,t) + \alpha_{12}u(l,t) + (\beta_{11} - \gamma'_{11})u_t(0,t) + (\beta_{12} - \gamma'_{12})u_t(l,t)\big]dt +$$
$$+ \int_0^T v(0,t) \int_0^l H_1(x,t)u(x,t)dxdt -$$
$$- \int_0^T v(l,t)\big[\alpha_{21}u(0,t) + \alpha_{22}u(l,t) + (\beta_{21} - \gamma'_{21})u_t(0,t) + (\beta_{22} - \gamma'_{22})u_t(l,t)\big]dt -$$
$$- \int_0^T v(l,t) \int_0^l H_2(x,t)u(x,t)dxdt =$$
$$= \int_0^T \int_0^l f(x,t)v(x,t)dxdt + \int_0^T v(l,t)g_2(t)dt - \int_0^T v(0,t)g_1(t)dt. \quad (10)$$

Введем следующие обозначения:

$$\Gamma_0 = \{(x,t) : x = 0, t \in [0,T]\}, \ \Gamma_l = \{(x,t) : x = l, t \in [0,T]\}, \ \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_l;$$
$$W(Q_T) = \{u : u \in W_2^1(Q_T), u_t \in L_2(\Gamma)\};$$
$$\hat{W}(Q_T) = \{v : v \in W(Q_T), v(x,T) = 0\}.$$

Определение. Функцию $u \in W(Q_T)$ будем называть обобщенным решением задачи (1), (2), (8), (9), если она удовлетворяет начальному условию $u(x,0) = 0$ и тождеству (10) для всех $v \in \hat{W}(Q_T)$.

Теорема. *Пусть выполняются следующие условия*:

1) $K_i \in C^1[0,l]$, $K_1(l)=0$, $K_2(0)=0$, $K_1(0)\neq 0$, $K_2(l)\neq 0$;
2) a, a_t, $c \in C(\bar{Q}_T)$, $a(x,t)>0\ \forall (x,t)\in \bar{Q}_T$;
3) α, $\beta \in C^3[0,T]$, $\alpha \neq 0$, $\beta\neq 0\ \forall t\in(0,T)$, $\alpha(0)=0$, $(T)=0$;
4) $\big(\alpha_{11}(0)-\gamma''_{11}(0)\big)\xi^2-2\alpha_{21}(0)\xi\eta-\big(\alpha_{22}(0)-\gamma''_{22}(0)\big)\eta^2\geqslant 0$;
5) $\gamma_{11}\geqslant 0$, $\gamma_{22}\leqslant 0$, $\gamma'_{11}>0$, $\gamma'_{22}<0$;
6) $\alpha_{11}\xi^2-2\alpha_{21}\xi\eta-\alpha_{22}\eta^2\geqslant 0$.

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1), (2), (8), (9).

Доказательство. Прежде всего заметим, что при выполнении условия 1 теоремы условия (8), (9) примут следующий вид:

$$a(0,t)u_x(0,t)=\alpha_{11}u(0,t)+\alpha_{12}u(l,t)+\beta_{11}u_t(0,t)+\gamma_{11}u_{tt}(0,t)+\\+\int_0^l H_1(x,t)u(x,t)dx+g_1(t),$$

$$a(l,t)u_x(l,t)=\alpha_{21}u(0,t)+\alpha_{22}u(l,t)+\beta_{22}u_t(0,t)+\gamma_{22}u_{tt}(l,t)+\\+\int_0^l H_2(x,t)u(x,t)dx+g_2(t),$$

а тождество (10) приобретет такой вид:

$$\int_0^T\int_0^l(-u_tv_t+au_xv_x+cuv)dxdt+\\+\int_0^T v(0,t)\big[\alpha_{11}u(0,t)+\alpha_{12}u(l,t)+\gamma'_{11}u_t(0,t)\big]dt-\\-\int_0^T\gamma_{11}v_t(0,t)u_t(0,t)dt+\int_0^T v(0,t)\int_0^l H_1(x,t)u(x,t)dxdt-\\-\int_0^T v(l,t)\big[\alpha_{21}u(0,t)+\alpha_{22}u(l,t)+\gamma'_{22}u_t(l,t)\big]dt+\\+\int_0^T\gamma_{22}v_t(l,t)u_t(l,t)dt-\int_0^T v(l,t)\int_0^l H_2(x,t)u(x,t)dxdt=\\=\int_0^T\int_0^l f(x,t)v(x,t)dxdt+\int_0^T v(l,t)g_2(t)dt-\int_0^T v(0,t)g_1(t)dt.$$

Единственность. Предположим, что существует два различных обобщенных решения задачи $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Тогда их разность $u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ удовлетворяет условию $u(x,0)=0$ и тождеству

$$\int_0^T\int_0^l(-u_tv_t+au_xv_x+cuv)dxdt+\\+\int_0^T v(0,t)\big[\alpha_{11}u(0,t)+\alpha_{12}u(l,t)+\gamma'_{11}u_t(0,t)\big]dt-\\-\int_0^T\gamma_{11}v_t(0,t)u_t(0,t)dt+\int_0^T v(0,t)\int_0^l H_1(x,t)u(x,t)dxdt-$$

$$-\int_0^T v(l,t)\big[\alpha_{21}u(0,t)+\alpha_{22}u(l,t)+\gamma'_{22}u_t(l,t)\big]dt+$$
$$+\int_0^T \gamma_{22}v_t(l,t)u_t(l,t)dt-\int_0^T v(l,t)\int_0^l H_2(x,t)u(x,t)dxdt=0. \quad (11)$$

В этом тождестве выберем v следующим образом:

$$v(x,t)=\begin{cases} \displaystyle\int_\tau^t u(x,\eta)d\eta; & 0\leqslant t\leqslant\tau,\\ 0; & \tau\leqslant t\leqslant T,\end{cases}$$

и преобразуем (11), интегрируя по частям. Получим

$$\int_0^l [u^2(x,\tau)+av_x^2(x,0)]dx+\gamma_{11}(\tau)v_t^2(0,\tau)-\gamma_{22}(\tau)v_t^2(l,\tau)+$$
$$+\int_0^\tau \gamma'_{11}(t)v_t^2(0,t)dt-\int_0^\tau \gamma'_{22}(t)v_t^2(l,t)dt=$$
$$=2\int_0^\tau\int_0^l c(x,t)v(x,t)v_t(x,t)dxdt-\int_0^\tau\int_0^l a_tv_x^2dxdt-$$
$$-\int_0^\tau(\alpha'_{11}-\gamma'''_{11})v^2(0,t)dt+2\int_0^\tau\alpha'_{21}v(0,t)v(l,t)dt+$$
$$+\int_0^\tau(\alpha'_{22}-\gamma'''_{22})v^2(l,t)dt+2\int_0^\tau(\alpha_{21}+\alpha_{12})v(0,t)v_t(l,t)dt-$$
$$-\big(\alpha_{11}(0)-\gamma''_{11}(0)\big)v^2(0,0)+2\alpha_{21}v(0,0)v(l,0)+$$
$$+\big(\alpha_{22}(0)-\gamma''_{22}(0)\big)v^2(l,0)+2\int_0^\tau v(0,t)\int_0^l H_1(x,t)u(x,t)dxdt-$$
$$-2\int_0^\tau v(l,t)\int_0^l H_2(x,t)u(x,t)dxdt. \quad (12)$$

При выполнении условий 4, 5 теоремы из (12) следует неравенство

$$\int_0^l \big[u^2(x,\tau)+av_x^2(x,0)\big]dx+\gamma_{11}(\tau)v_t^2(0,\tau)-\gamma_{22}(\tau)v_t^2(l,\tau)+$$
$$+\int_0^\tau \gamma'_{11}(t)v_t^2(0,t)dt-\int_0^\tau \gamma'_{22}(t)v_t^2(l,t)dt\leqslant$$
$$\leqslant 2\Big|\int_0^\tau\int_0^l cvv_tdxdt\Big|+\int_0^\tau\int_0^l |a_t|v_x^2dxdt+\int_0^\tau|\alpha'_{11}-\gamma'''_{11}|v^2(0,t)dt+$$
$$+2\int_0^\tau|\alpha'_{21}v(0,t)v(l,t)|dt+\int_0^\tau|\alpha'_{22}-\gamma'''_{22}|v^2(l,t)dt+$$
$$+2\Big|\int_0^\tau(\alpha_{21}+\alpha_{12})v(0,t)v_t(l,t)dt\Big|+2\Big|\int_0^\tau v(0,t)\int_0^l H_1(x,t)u(x,t)dxdt\Big|+$$
$$+2\Big|\int_0^\tau v(l,t)\int_0^l H_2(x,t)u(x,t)dxdt\Big|. \quad (13)$$

Оценим правую часть (13). Заметим, что из условий теоремы вытекает существование положительных чисел a_0, a_1, c_0, p_{ij}, q_{ij}, r_{ij}, h_i таких, что $a \geqslant a_0$, $|a_t| \leqslant a_1$, $|c| \leqslant c_0$, $|\alpha_{ij}| \leqslant p_{ij}$, $|\alpha'_{ij}| \leqslant q_{ij}$, $|\gamma''_{ij}| \leqslant r_{ij}$, $\max\limits_{[0,T]} \int_0^l H_i^2 dx \leqslant h_i$.

Применяя неравенство Коши, получим следующие оценки:

$$2\left|\int_0^\tau \int_0^l cvv_t dxdt\right| \leqslant c_0 \int_0^\tau \int_0^l (v^2 + v_t^2) dxdt;$$

$$2\left|\int_0^\tau \alpha'_{21} v(0,t)v(l,t)dt\right| \leqslant q_{21} \int_0^\tau (v^2(0,t) + v^2(l,t))dt;$$

$$2\left|\int_0^\tau v(0,t) \int_0^l H_1(x,t)u(x,t)dxdt\right| \leqslant \int_0^\tau v^2(0,t)dt + h_1 \int_0^\tau \int_0^l u^2(x,t)dxdt;$$

$$2\left|\int_0^\tau v(l,t) \int_0^l H_2(x,t)u(x,t)dxdt\right| \leqslant \int_0^\tau v^2(l,t)dt + h_2 \int_0^\tau \int_0^l u^2(x,t)dxdt.$$

К одному из слагаемых оценки (13) применим неравенство Коши с ε:

$$2\left|\int_0^\tau (\alpha_{21} + \alpha_{12}) v(0,t) v_t(l,t) dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant (p_{12} + p_{21})\varepsilon \int_0^\tau v_t^2(l,t) + \frac{p_{12} + p_{21}}{\varepsilon} \int_0^\tau v^2(0,t)dt.$$

Теперь воспользуемся неравенствами из [15]:

$$v^2(0,t) \leqslant 2l \int_0^l v_x^2(x,t)dx + \frac{2}{l} \int_0^l v^2(x,t)dx,$$
$$v^2(l,t) \leqslant 2l \int_0^l v_x^2(x,t)dx + \frac{2}{l} \int_0^l v^2(x,t)dx.$$

Заметим также, что в силу представления функции $v(x,t)$ справедливо неравенство

$$v^2(x,t) \leqslant \tau \int_0^\tau u^2 dt.$$

С учетом этих неравенств из (13) получим

$$\int_0^l \left[u^2(x,\tau) + a_0 v_x^2(x,0)\right] dx + \gamma_{11}(\tau) v_t^2(0,\tau) - \gamma_{22}(\tau) v_t^2(l,\tau) +$$
$$+ \int_0^\tau \gamma'_{11}(t) v_t^2(0,t)dt - \int_0^\tau \gamma'_{22}(t) v_t^2(l,t)dt \leqslant$$
$$\leqslant C \int_0^\tau \int_0^l (u^2 + v_x^2)dxdt + (p_{12} + p_{21})\varepsilon \int_0^\tau v_t^2(l,t)dt, \quad (14)$$

где константа C зависит лишь от введенных выше постоянных.

Последнее слагаемое правой части (14) перенесем в левую часть, выбрав ε так, чтобы $\delta = -\gamma'_{22} - (p_{12} + p_{21})\varepsilon > 0$. Теперь получаем

$$\nu \int_0^l \big(u^2(x,\tau) + v_x^2(x,0)\big)dx + \gamma_{11} v_t^2(0,\tau) - \gamma_{22} v_t^2(l,\tau) + \\ + \int_0^\tau \gamma'_{11} v_t^2(0,t)dt + \delta \int_0^\tau v_t^2(l,t)dt \leqslant C \int_0^\tau \int_0^l (u^2 + v_x^2)dxdt,$$

где $\nu = \min\{1, a_0\}$, и в частности

$$\nu \int_0^l (u^2\big(x,\tau) + v_x^2(x,0)\big)dx \leqslant C \int_0^\tau \int_0^l (u^2 + v_x^2)dxdt. \tag{15}$$

Введем функцию $w(x,t) = \displaystyle\int_0^t u_x d\eta$. Тогда, как нетрудно видеть,

$$v_x(x,t) = -w(x,\tau) + w(x,t),$$

значит $v(x,0) = -w(x,\tau)$, и из (15) следует

$$\nu \int_0^l \big(u^2(x,\tau) + w(x,\tau)\big)dx \leqslant \\ \leqslant 2C \int_0^\tau \int_0^l \big(u^2(x,t) + w^2(x,t)\big)dxdt + 2C\tau \int_0^l w^2(x,\tau)dx.$$

Пользуясь произволом, выберем τ так, чтобы $\nu - 2C\tau \geqslant \nu/2$. Тогда для всех $\tau \in [0, \frac{\nu}{4C}]$ выполняется $\nu - 2C\tau > 0$ и интеграл $2C\tau \displaystyle\int_0^l w^2(x,\tau)dx$ можно перенести в левую часть неравенства. Тогда

$$\int_0^l \big(u^2(x,\tau) + w^2(x,\tau)\big)dx \leqslant M \int_0^\tau \int_0^l \big(u^2(x,t) + w^2(x,t)\big)dxdt, \tag{16}$$

где $M = 4C/\nu$. К неравенству (16) можно применить лемму Гронуола, что приводит к оценке

$$\int_0^l \big(u^2(x,\tau) + w^2(x,\tau)\big)dx \leqslant 0,$$

откуда $u(x,\tau) = 0$ при $\tau \in [0; \frac{\nu}{4C}]$.

Рассмотрев теперь нашу задачу с начальными данными на $t = \frac{\nu}{4C}$, докажем, что $u(x,\tau) = 0$ при $\tau \in [\frac{\nu}{4C}, \frac{\nu}{2C}]$. Продолжив этот процесс, за конечное число шагов получим, что $u(x,t) = 0$ во всем цилиндре Q_T, следовательно, может существовать не более одного обобщенного решения задачи (1), (2), (8), (9).

Существование. Пусть $\{w_k(x)\}$ — произвольная система функций из $C^2[0,l]$, линейно независимая и полная в $W_2^1(0,l)$. Будем искать приближенное решение задачи (1), (2), (8), (9) в виде $u^m(x,t) = \sum\limits_{k=1}^m d_k(t)w_k(x)$ из соотношений

$$\int_0^l (u_{tt}^m w_j + a u_x^m w_j' + c u^m w_j) dx+$$
$$+ w_j(0)\big[\alpha_{11} u^m(0,t) + \alpha_{12} u^m(l,t) + \beta_{11} u_t^m(0,t) + \gamma_{11} u_{tt}(0,t)\big]+$$
$$+ w_j(0) \int_0^l H_1(x,t) u^m(x,t) dx-$$
$$- w_j(l)\big[\alpha_{21} u^m(0,t) + \alpha_{22} u^m(l,t) + \beta_{22} u_t^m(l,t) + \gamma_{22} u_{tt}^m(l,t)\big]-$$
$$- w_j(l) \int_0^l H_2(x,t) u^m(x,t) dx =$$
$$= \int_0^l f(x,t) w_j(x) dx + w_j(l) g_2(t) - w_j(0) g_1(t), \quad j = 1, \ldots, m, \tag{17}$$

которые представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=1}^m A_{kj} d_k''(t) + \sum_{k=1}^m C_{kj} d_k'(t) + \sum_{k=1}^m B_{kj} d_k(t) = G_j(t), \quad j = 1, \ldots, m. \tag{18}$$

Коэффициенты системы (18) имеют следующий вид:

$$A_{kj}(t) = \int_0^l w_k(x) w_j(x) dx + \gamma_{11}(t) w_k(0) w_j(0) - \gamma_{22}(t) w_k(l) w_j(l),$$
$$C_{kj}(t) = \beta_{11}(t) w_k(0) w_j(0) - \beta_{22}(t) w_k(l) w_j(l),$$
$$B_{kj}(t) = \int_0^l a(x,t) w_k'(x) w_j'(x) dx+$$
$$+\alpha_{11}(t) w_k(0) w_j(0) + \alpha_{12}(t) w_k(l) w_j(0) - \alpha_{21} w_k(0) w_j(l) - \alpha_{22}(t) w_k(l) w_j(l)+$$
$$+w_j(0) \int_0^l H_1(x,t) w_k(x) dx - w_j(l) \int_0^l H_2(x,t) w_k(x) dx,$$

а свободный член обозначен так:

$$G_j(t) = \int_0^l f(x,t) w_j(x) dx + w_j(l) g_2(t) - w_j(0) g_2(t).$$

Рассмотрим матрицу $\{A_{kj}\}$ коэффициентов при старших производных и покажем, что она положительно определена. Для этого образуем квадратичную форму $P = \sum\limits_{k,j=1}^m A_{kj} \xi_k \xi_j$, имеющую ту же матрицу, где $\xi = \sum\limits_{i=1}^m \xi_i w_i(x)$.

Подставив выражения коэффициентов A_{kj}, получим

$$P = \sum_{k,j=1}^m \left[\int_0^l w_k(x) w_j(x) \xi_k \xi_j dx + \gamma_{11} w_k(0) w_j(0) \xi_k \xi_j - \gamma_{22} w_k(l) w_j(l)\right] =$$
$$= \int_0^l |\xi|^2 dx + \gamma_{11} |\xi(0)|^2 - \gamma_{22} |\xi(l)|^2 \geqslant 0,$$

так как по условию 5 теоремы $\gamma_{11} > 0$, $\gamma_{22} < 0$, причем $P = 0$ только при $\xi = 0$.

Так как $\{w_j(x)\}$ линейно независима, $\xi = 0$ тогда и только тогда, когда $\xi_i = 0$ $\forall i$. Таким образом, матрица $\{A_{kj}\}$ положительно определена и, стало быть, система (18) разрешима относительно старших производных. Отметим, что в силу условий теоремы коэффициенты этой системы ограничены.

Присоединив к (18) начальные условия $d_k(0) = d_k'(0) = 0$, приходим к задаче Коши, которая разрешима. Следовательно, последовательность приближений построена, и мы можем перейти к следующему этапу доказательства.

Умножим каждое слагаемое равенства (17) на $d_j'(t)$, просуммируем по j от 1 до m, а затем проинтегрируем по $t \in (0, \tau)$:

$$\int_0^\tau \int_0^l (u_{tt}^m u_t^m + a u_x^m u_{xt}^m + c u^m u_t^m) dxdt +$$
$$+ \int_0^\tau u_t^m(0,t)\big(\alpha_{11} u^m(0,t) + \alpha_{12} u^m(l,t) + \beta_{11} u_t^m(0,t) + \gamma_{11} u_{tt}^m(0,t)\big) dt +$$
$$+ \int_0^\tau u_t^m(0,t) \int_0^l H_1(x,t) u^m(x,t) dxdt -$$
$$- \int_0^\tau u_t^m(l,t)\big(\alpha_{21} u^m(0,t) + \alpha_{22} u^m(l,t) + \beta_{22} u_t^m(l,t) + \gamma_{22} u_{tt}^m(l,t)\big) dt -$$
$$- \int_0^\tau u_t^m(l,t) \int_0^l H_2(x,t) u^m(x,t) dxdt =$$
$$= \int_0^\tau \int_0^l f(x,t) u_t^m(x,t) dxdt + \int_0^\tau u_t^m(l,t) g_2(t) dt - \int_0^\tau u_t^m(0,t) g_1(t) dt. \quad (19)$$

Учитывая, что $u^m(x,0) = u_t^m(x,0) = 0$, преобразуем (19) интегрированием по частям:

$$\int_0^l \Big[\big(u_t^m(x,\tau)\big)^2 + a\big(u_x^m(x,\tau)\big)^2\Big] dx - \int_0^\tau \int_0^l a_t (u_x^m)^2 dxdt +$$
$$+ 2\int_0^\tau \int_0^l c u^m u_t^m dxdt - \int_0^\tau \alpha_{11}' \big(u^m(0,t)\big)^2 dt -$$
$$- 2\int_0^\tau (\alpha_{12} + \alpha_{21}) u^m(0,t) u_t^m(l,t) dt + 2\int_0^\tau \beta_{11} \big(u_t^m(0,t)\big)^2 dt -$$
$$- \int_0^\tau \gamma_{11}' \big(u_t^m(0,t)\big)^2 dt + \int_0^\tau \alpha_{22}' \big(u^m(l,t)\big)^2 dt -$$
$$- 2\int_0^\tau \beta_{22} \big(u_t^m(l,t)\big)^2 dt + \int_0^\tau \gamma_{22}' \big(u_t^m(l,t)\big)^2 dt +$$
$$+ \alpha_{11}\big(u^m(0,\tau)\big)^2 + 2\alpha_{12} u^m(0,\tau) u^m(l,\tau) + \gamma_{11}\big(u_t^m(0,\tau)\big)^2 -$$
$$- \alpha_{22}\big(u^m(l,\tau)\big)^2 - \gamma_{22}\big(u_t^m(l,\tau)\big)^2 =$$
$$= \int_0^\tau \int_0^l f(x,t) u_t^m(x,t) dxdt + \int_0^\tau u_t^m(l,t) g_2(t) dt - \int_0^\tau u_t^m(0,t) g_1(t) dt.$$

Заметим, что из полученных выше формул $\beta_{11} = 2\gamma'_{11}$, $\beta_{22} = 2\gamma'_{22}$. Учтем условие 5 теоремы и запишем последнее равенство следующим образом:

$$\int_0^l \left[\left(u_t^m(x,\tau)\right)^2 + a\left(u_x^m(x,\tau)\right)^2\right]dx + \gamma_{11}\left(u_t^m(0,\tau)\right)^2 - \gamma_{22}\left(u_t^m(l,\tau)\right)^2 =$$
$$= 3\int_0^\tau \gamma'_{11}\left(u_t^m(0,t)\right)^2 dt + 3\int_0^\tau \gamma'_{22}\left(u_t^m(l,t)\right)^2 dt + \int_0^\tau\int_0^l a_t(u_x^m)^2 dxdt -$$
$$- 2\int_0^\tau\int_0^l c u^m u_t^m dxdt + \int_0^\tau \alpha'_{11}\left(u^m(0,t)\right)^2 dt +$$
$$+ 2\int_0^\tau (\alpha_{12}+\alpha_{21}) u^m(0,t) u_t^m(l,t) dt - \int_0^\tau \alpha'_{22}\left(u^m(l,t)\right)^2 dt - \alpha_{11}\left(u^m(l,\tau)\right)^2 +$$
$$+ 2\alpha_{12} u^m(0,\tau) u^m(l,\tau) + \alpha_{22}(u^m(l,\tau))^2 +$$
$$+ 2\int_0^\tau u_t^m(l,t)\int_0^l H_2(x,t)u^m(x,t)dxdt - 2\int_0^\tau u_t^m(l,t)\int_0^l H_1(x,t)u^m(x,t)dxdt +$$
$$+ 2\int_0^\tau\int_0^l f(x,t)u_t^m(x,t)dxdt + 2\int_0^\tau u_t^m(l,t)g_2(t)dt -$$
$$- 2\int_0^\tau u_t^m(0,t)g_1(t)dt. \quad (20)$$

Так как левая часть (20) неотрицательна, из (20) с учетом условия 6 теоремы вытекает неравенство

$$\int_0^l \left[\left(u_t^m(x,\tau)\right)^2 + a\left(u_x^m(x,\tau)\right)^2\right]dx + \gamma_{11}\left(u_t^m(0,\tau)\right)^2 - \gamma_{22}\left(u_t^m(l,\tau)\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^\tau\int_0^l |a_t|(u_x^m)^2 dxdt + 2\left|\int_0^\tau\int_0^l c u^m u_t^m dxdt\right| + \left|\int_0^\tau \alpha'_{11}\left(u^m(0,t)\right)^2 dt\right| +$$
$$+ 2\left|\int_0^\tau (\alpha_{12}+\alpha_{21}) u^m(0,t) u_t(l,t) dt\right| + \left|\int_0^\tau \alpha'_{22}(u^m(l,t))^2 dt\right| +$$
$$+ 2\left|\int_0^\tau u_t^m(l,t)\int_0^l H_2 u^m dxdt\right| + 2\left|\int_0^\tau u_t^m(0,t)\int_0^l H_1 u^m dxdt\right| +$$
$$+ 2\left|\int_0^\tau\int_0^l f u_t^m dxdt\right| + 2\left|\int_0^\tau u_t^m(l,t) g_2 dt\right| + 2\left|\int_0^\tau u_t^m(0,t) g_1 dt\right| +$$
$$+ 3\left|\int_0^\tau \gamma'_{22}\left(u_t^m(l,t)\right)^2 dt\right| + 3\left|\int_0^\tau \gamma'_{11}\left(u_t^m(0,t)\right)^2 dt\right|. \quad (21)$$

Для оценки следов функций в правой части (21) используются неравенства

$$\left(u^m(0,t)\right)^2 \leqslant \varepsilon\int_0^l (u_x^m)^2(x,t)dx + c(\varepsilon)\int_0^l (u^m)^2(x,t)dx,$$
$$\left(u^m(l,t)\right)^2 \leqslant \varepsilon\int_0^l (u_x^m)^2(x,t)dx + c(\varepsilon)\int_0^l (u^m)^{2(x,t)}dx,$$

каждое их которых является частным случаем неравенства (6.24) из [14, с. 77].

Теперь, применяя с некоторыми модификациями ту же технику, что и при выводе оценок для доказательства единственности, приходим к неравенству

$$\int_0^l \big[\big(u_t^m(x,\tau)\big)^2 + 2\nu\big(u_x^m(x,\tau)\big)^2\big]dx + \gamma_{11}\big(u_t^m(0,\tau)\big)^2 - \gamma_{22}\big(u_t^m(l,\tau)\big)^2 \leqslant$$
$$\leqslant K\bigg(\int_0^\tau\int_0^l \big[(u_t^m)^2 + (u_x^m)^2 + (u^m)^2\big]dxdt + \int_0^\tau (u_t^m)^2 dt + \int_0^\tau \big(u_t^m(l,t)\big)^2 dt\bigg) +$$
$$+ \int_0^\tau\int_0^l f^2(x,t)dxdt + \int_0^\tau g_1^2(t)dt + \int_0^\tau g_2^2(t)dt, \quad (22)$$

где $K > 0$ — постоянная, не зависящая от m. К обеим частям (22) прибавим неравенство

$$\int_0^l \big(u^m(x,\tau)\big)^2 dx \leqslant \tau\int_0^\tau\int_0^l (u_t^m)^2 dxdt.$$

Теперь из (22) при надлежащем обозначении постоянных следует

$$\int_0^l \big[\big(u^m(x,\tau)\big)^2 + \big(u_x^m(x,\tau)\big)^2 + \big(u_t^m(x,\tau)\big)^2\big]dx + \big(u_t^m(0,\tau)\big)^2 + \big(u_t^m(l,\tau)\big)^2 \leqslant$$
$$\leqslant N_1\bigg[\int_0^\tau\int_0^l \big((u^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2\big)dxdt + \int_0^\tau \big(u_t^m(0,t)\big)^2 dt + \int_0^\tau \big(u_t^m(l,t)\big)^2 dt\bigg] +$$
$$+ N_2\bigg[\int_0^T\int_0^l f^2(x,t)dxdt + \int_0^T \big(g_1^2(t) + g_2^2(t)\big)dt\bigg]. \quad (23)$$

К (23) можно применить лемму Гроноулла:

$$\int_0^l \big[\big(u^m(x,\tau)\big)^2 + \big(u_x^m(x,\tau)\big)^2 + \big(u_t^m(x,\tau)\big)^2\big]dx + \big(u_t^m(0,\tau)\big)^2 + \big(u_t^m(l,\tau)\big)^2 \leqslant$$
$$\leqslant e^{N\tau}\big(\|f\|^2_{L_2(Q_T)} + \|g_1\|^2_{L_2(0,T)} + \|g_2\|^2_{L_2(0,T)}\big),$$

откуда после интегрирования по t от 0 до T получается требуемая оценка:

$$\|u^m\|^2_{W(Q_T)} \leqslant P.$$

Следовательно, из построенной последовательности $\{u^m(x,t)\}$ можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к элементу из этого же пространства, то есть к $u \in W(Q_T)$.

Осталось показать, что этот предел и есть искомое обобщенное решение задачи (1), (2), (8), (9). Для этого мы проделаем процедуру, описанную в [14, с. 215], не останавливаясь на подробностях.

Умножим обе части (17) на $\eta_j(t)$ такую, что $\eta_j \in W_2^1(0,T)$, $\eta_j(T) = 0$. После интегрирования полученного равенства по t от 0 до T и суммирования по j от 1 до m получим равенство, переходя в котором к пределу, легко убеждаемся в том, что предел выделенной подпоследовательности действительно есть искомое обобщенное решение поставленной задачи. $\square$

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Благодарность. Мы выражаем свою благодарность рецензентам за внимательное прочтение рукописи статьи и сделанные замечания.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Cannon J. R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // *Quart. Appl. Math.*, 1963. vol. 21, no. 2. pp. 155–160. doi: 10.1090/qam/160437.
2. Камынин Л. И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1964. Т. 4, № 6. С. 1006–1024.
3. Bažant Z. P., Jirásek M. Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: Survey of progress // *Journal of Engineering Mechanics*, 2002. vol. 128, no. 11. pp. 1119–1149. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119).
4. Гордезиани Д. Г., Авалишвили Г. А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // *Матем. моделирование*, 2000. Т. 12, № 1. С. 94–103.
5. Ильин В. А., Моисеев Е. И. О единственности решения смешанной задачи для волнового уравнения с нелокальными граничными условиями // *Дифференц. уравнения*, 2000. Т. 36, № 5. С. 656–661.
6. Лажетич Н. Л. О классической разрешимости смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения второго порядка // *Дифференц. уравнения*, 2006. Т. 42, № 8. С. 1072–1077.
7. Пулькина Л. С. Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения // *Матем. заметки*, 2003. Т. 74, № 3. С. 435–445. doi: 10.4213/mzm277.
8. Пулькина Л. С. Начально-краевая задача с нелокальным граничным условием для многомерного гиперболического уравнения // *Дифференц. уравнения*, 2008. Т. 44, № 8. С. 1084–1089.
9. Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D. On integral nonlocal boundary value problems for some partial differential equations // *Bull. Georg. Natl. Acad. Sci.*, 2011. vol. 5, no. 1. pp. 31–37, https://pdfs.semanticscholar.org/1550/b5c86206fec72ec1eb7bc2c38962d8371327.pdf.
10. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // *Дифференц. уравнения*, 2006. Т. 42, № 9. С. 1166–1179.
11. Pulkina L. S. Nonlocal problems for hyperbolic equations with degenerate integral condition // *Electronic Journal of Differential Equations*, 2016. vol. 2016, no. 193. pp. 1–12, https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2016/193/pulkina.pdf.
12. Пулькина Л. С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода // *Изв. вузов. Матем.*, 2012. № 4. С. 74–83.
13. Пулькина Л. С. *Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений.* Самара: Самарский университет, 2012. 194 с.
14. Ладыженская О. А. *Краевые задачи математической физики.* М.: Наука, 1973. 407 с.
15. Пулькина Л. С. Задача с динамическим нелокальным условием для псевдогиперболического уравнения // *Изв. вузов. Матем.*, 2016. № 9. С. 42–50.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 2, pp. 229–245
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1707

MSC: 35L15, 35L99, 35D30

Solvability of a nonlocal problem for a hyperbolic equation with degenerate integral conditions

L. S. Pulkina, V. A. Kirichek

Samara National Research University,
34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Abstract

In this paper, we consider a nonlocal problem with integral conditions for hyperbolic equation. Close attention focuses on degenerate integral conditions, namely, on the second kind integral conditions which degenerate into the first kind conditions at some points. Such kind of nonlocal conditions inevitably involves some specific difficulties when we try to show solvability of the problem. These difficulties can be overcome by a method suggested in our paper. The essence of this method is the reduction of the problem with degenerate conditions to the problem with dynamical conditions. This technique enables to define effectively a generalized solution to the problem, to obtain a priori estimates and to prove the existence of a unique generalized solution to the problem.

Keywords: hyperbolic equation, nonlocal problem, 1st and 2d kind integral conditions,degenerate nonlocal conditions, dynamical boundary conditions, generalized solution, Sobolev space.

Received: 24th May, 2019 / Revised: 8th June, 2019 /
Accepted: 10th June, 2019 / First online: 23rd June, 2019

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Research Article

Please cite this article in press as:
Pulkina L. S., Kirichek V. A. Solvability of a nonlocal problem for a hyperbolic equation with degenerate integral conditions, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 2, pp. 229–245. doi: 10.14498/vsgtu1707 (In Russian).

Authors' Details:
Ludmila S. Pulkina https://orcid.org/0000-0000-0000-xxxx
Dr. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Differential Equations and Control Theory; e-mail: louise@samdiff.ru

Vitaliya A. Kirichek https://orcid.org/0000-0001-9817-863X
Postgraduate Student; Dept. of Differential Equations and Control Theory;
e-mail: Vitalya29@gmail.com

Acknowledgment. We are very grateful to the reviewers for the careful reading of our manuscript and for the detailed comments on our paper.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. Cannon J. R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy, *Quart. Appl. Math.*, 1963, vol. 21, no. 2, pp. 155–160. doi: 10.1090/qam/160437.
2. Kamynin L. I A boundary value problem in the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1964, vol. 4, no. 6, pp. 33–59. doi: 10.1016/0041-5553(64)90080-1.
3. Bažant Z. P., Jirásek M. Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: Survey of progress, *Journal of Engineering Mechanics*, 2002, vol. 128, no. 11, pp. 1119–1149. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119).
4. Gordeziani D. G., Avalishvili G. A. On the constructing of solutions of the nonlocal initial boundary value problems for one-dimensional medium oscillation equations, *Matem. Mod.*, 2000, vol. 12, no. 1, pp. 94–103 (In Russian).
5. Il'in V. A., Moiseev E. I. Uniqueness of the solution of a mixed problem for the wave equation with nonlocal boundary conditions, *Differ. Equ.*, 2000, vol. 36, no. 5, pp. 728–733. doi: 10.1007/BF02754231.
6. Lažetić N. L. On the classical solvability of the mixed problem for a second-order one-dimensional hyperbolic equation, *Differ. Equ.*, 2006, vol. 42, no. 8, pp. 1134–1139. doi: 10.1134/S0012266106080088.
7. Pulkina L. S. A mixed problem with integral condition for the hyperbolic equation, *Math. Notes*, 2003, vol. 74, no. 3, pp. 411–421. doi: 10.1023/A:1026167021195.
8. Pulkina L. S. Initial-boundary value problem with a nonlocal boundary condition for a multidimensional hyperbolic equation, *Differ. Equ.*, 2008, vol. 44, no. 8, pp. 1119–1125. doi: 10.1134/S0012266108080090.
9. Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D. On integral nonlocal boundary value problems for some partial differential equations, *Bull. Georg. Natl. Acad. Sci.*, 2011, vol. 5, no. 1, pp. 31–37, https://pdfs.semanticscholar.org/1550/b5c86206fec72ec1eb7bc2c38962d8371327.pdf.
10. KozhanovL A. I., Pulkina L. S. On the solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condition of integral form for multidimensional hyperbolic equations, *Differ. Equ.*, 2006, T. 42, № 9, C. 1233–1246. doi: 10.1134/S0012266106090023.
11. Pulkina L. S. Nonlocal problems for hyperbolic equations with degenerate integral condition, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2016, vol. 2016, no. 193, pp. 1–12, https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2016/193/pulkina.pdf.
12. Pulkina L. S. Boundary-value problems for a hyperbolic equation with nonlocal conditions of the I and II kind, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2012, vol. 56, no. 4, pp. 62–69. doi: 10.3103/S1066369X12040081.
13. Pulkina L. S. *Zadachi s neklassicheskimi usloviiami dlia giperbolicheskikh uravnenii* [Problems with nonclassical conditions for hyperbolic equatins]. Samara, Samara University, 2012, 194 pp. (In Russian)
14. Ladyzhenskaya O.A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* [Boundary problems of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1975, 407 pp. (In Russian)
15. Pulkina L. S. A problem with dynamic nonlocal condition for pseudohyperbolic equation, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2016, vol. 60, no. 9, pp. 38–45. doi: 10.3103/S1066369X16090048.