



УДК 539.372

Ползучесть и пластическое течение материала сферического вязкоупругопластического слоя при его нагрузке и разгрузке

К. Н. Галимзянова¹, Л. В. Ковтанюк¹, Г. Л. Панченко^{1,2}

¹ Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН,
Россия, 690041, Владивосток, ул. Радио, 5.

² Владивостокский государственный университет экономики и сервиса,
Россия, 690014, Владивосток, ул. Гоголя, 41.

Аннотация

Целью исследования является изучение процессов накопления необратимых деформаций посредством разных механизмов: ползучести и пластического течения. При росте напряжений в теле за счет механического воздействия на него первоначально необратимые деформации производятся за счет вязких свойств материала деформируемого тела в качестве деформаций ползучести, а при выходе напряженных состояний на поверхность нагружения механизм их производства меняется на пластический. При разгрузке последовательность, наоборот, меняется с быстрого пластического на медленный вязкий. Непрерывность в таком росте необратимых деформаций обеспечивается соответствующим заданием потенциалов ползучести и пластичности. Данные процессы рассматриваются в рамках математической теории малых деформаций на примере одномерной задачи о деформировании вязкоупругопластического полого шара под действием изменяющегося со временем всестороннего давления. Рассмотрены процессы ползучести и пластического течения при увеличивающемся давлении, пластическое течение при постоянном давлении, разгрузка среды при уменьшении давления и повторное пластическое течение при разгрузке. Установлены закономерности продвижения упругопластических границ в материале поло-

Научная статья

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Галимзянова К. Н., Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л. Ползучесть и пластическое течение материала сферического вязкоупругопластического слоя при его нагрузке и разгрузке // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 2. С. 270–283. doi: [10.14498/vsgtu1687](https://doi.org/10.14498/vsgtu1687).

Сведения об авторах

Ксения Наилевна Галимзянова  <https://orcid.org/0000-0003-2615-0333>
старший инженер-программист; лаб. механики необратимого деформирования;
e-mail: gal-ksyusha@ya.ru

Лариса Валентиновна Ковтанюк  <https://orcid.org/0000-0002-2349-4803>
доктор физико-математических наук; заведующий лабораторией; лаб. механики необратимого деформирования; e-mail: lk@iacp.dvo.ru

Галина Леонидовна Панченко  <https://orcid.org/0000-0002-6921-2971>
кандидат физико-математических наук; исполняющий обязанности старшего научного сотрудника; лаб. информационно-аналитических и управляющих систем и технологий¹; научный сотрудник; лаб. фундаментальной и прикладной физики²;
e-mail: panchenko.21@yandex.ru

го шара. Рассчитаны параметры напряженно-деформированного состояния среды, исследована релаксация напряжений после разгрузки.

Ключевые слова: упругость, ползучесть, пластичность, необратимые деформации.

Получение: 9 апреля 2019 г. / Исправление: 28 мая 2019 г. /

Принятие: 10 июня 2019 г. / Публикация онлайн: 25 июня 2019 г.

Введение. Исследование посвящено изучению процессов интенсивного деформирования материалов, когда накапливаемые ими необратимые деформации могут быть деформациями как ползучести, так и пластичности. Примером такого технологического процесса может служить холодная формовка [1] или обтяжка [2], когда необратимые деформации накапливаются за счет медленного процесса ползучести, однако это не исключает возникновения локальных областей пластического течения (обычно в местах контакта оснастки и деформируемого материала). Наличие таких областей приводит к значительному перераспределению полей напряжений и, следовательно, влияет на процесс ползучести. Таким образом, при моделировании таких процессов необходимо использовать теорию ползучести при одновременном учете возможностей возникновения и развития зон пластического течения. Учет же упругих деформаций позволяет при этом рассчитывать упругий отклик при разгрузке, в том числе остаточные напряжения и их релаксацию после полной разгрузки.

Разработан ряд теорий и методов решения краевых задач, учитывающих помимо упругих и пластических свойств материалов еще и реологические. Можно отметить, например, работы [3–6]. Заметим, однако, что решений краевых задач, когда накапливаемые материалом деформации могут быть деформациями и ползучести, и пластического течения, а также соответствующих задач о разгрузке работы [3–6] не содержат.

Опираясь на соотношения теории больших упругопластических деформаций [7, 8], авторы работы [9] предложили новый подход, предполагающий последовательное накопление необратимых деформаций ползучести и пластичности. Предлагается разделять приобретаемые телом деформации на деформации ползучести и пластические деформации в соответствии с механизмом их возникновения. Таким путем получаем общее уравнение изменения как деформаций ползучести, так и деформаций пластичности. В этом уравнении присутствует по-разному задаваемый источник необратимых деформаций. В первом случае — это скорости деформаций ползучести на стадии деформирования, предваряющей пластическое течение, или при разгрузке, а во втором — скорости пластических деформаций в условиях соответствия напряженных состояний поверхности нагружения. На упругопластических границах происходит смена механизма накопления необратимых деформаций с медленного вязкого на быстрый пластический, и наоборот. Чтобы на таких границах не было разрывов необратимых деформаций, законы ползучести и пластического течения нужно согласовать. В недавних работах [9–12] на примере задач теории больших деформаций о вискозиметрическом деформировании и прямолинейном движении материалов [13, 14] показаны разные подходы к такому согласованному выбору при использовании обобщения условий пластичности

Треска—Сен-Венана на случай вязкого сопротивления пластическому течению. В данной работе, используя предложенный новый подход, в рамках теории малых деформаций рассмотрим задачу о деформировании полого шара под действием всестороннего сжатия и укажем на ее примере согласование в законе ползучести Нортонa [15] и в условии идеальной пластичности Мизеса [16] как в условиях активного нагружения, так и при разгрузке, включая возможность повторного пластического течения.

1. Основные модельные соотношения. Будем использовать теорию малых деформаций, в которой тензор полных деформаций d_{ij} складывается из обратимой e_{ij} и необратимой p_{ij} составляющих

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (1)$$

В соотношениях (1) u_i — компоненты вектора перемещений в прямоугольной декартовой системе координат.

Напряжения в среде σ_{ij} связаны с упругими деформациями e_{ij} законом Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad (2)$$

в котором λ, μ — параметры Ламе, δ_{ij} — символ Кронекера.

Диссипативный механизм деформирования свяжем только с вязкими и пластическими свойствами материала. Считаем, что необратимые деформации накапливаются в материале непосредственно с начала процесса деформирования и первоначально связаны с явлением ползучести. В областях, где напряженное состояние еще не достигло поверхности текучести или где пластическое течение было, но прекратилось, диссипативный механизм деформирования зададим в форме закона ползучести Нортонa [15], в котором полагаем скорости необратимых деформаций γ_{ij} равными скоростям деформаций ползучести ε_{ij}^v :

$$\begin{aligned} V(\sigma_{ij}) &= B \Sigma^n (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \\ \Sigma &= \sqrt{\frac{3}{2}} ((\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \sigma &= \frac{1}{3} \sigma_{ii} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad \gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^v = \frac{\partial V}{\partial \sigma_{ij}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные значения тензора напряжений; B, n — заданные параметры ползучести материала.

При достижении напряженным состоянием поверхности текучести диссипативный механизм деформирования меняется и начинается пластическое течение. В качестве поверхности текучести выберем условие пластичности Мизеса [16]

$$f(\sigma_{ij}) = s_{ij} s_{ji} - \frac{8}{3} k^2, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}. \quad (4)$$

Здесь k — предел текучести материала. Не разделяя необратимые деформации, считаем, что накопленные к моменту начала пластического течения деформации ползучести являются начальными значениями для их дальнейшего роста в области течения.

2. Постановка и решение задачи до начала пластического течения. Пусть вязкоупругопластический материал занимает сферический слой, ограниченный поверхностями $r = r_0$ и $r = R$ ($r_0 < R$). К внешней границе слоя $r = R$ приложено всестороннее давление, в то время как его внутренняя граница свободна

$$\sigma_{rr}|_{r=R} = -p(t), \quad \sigma_{rr}|_{r=r_0} = 0. \quad (5)$$

В граничных условиях (5) $p(t)$ — известная возрастающая со временем функция, σ_{rr} — радиальная компонента тензора напряжений в используемой в дальнейшем сферической системе координат r, θ, φ .

В рассматриваемом случае сферической симметрии для отличных от нуля компонент тензора деформаций согласно соотношениям (1) имеем

$$d_{rr} = e_{rr} + p_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad d_{\theta\theta} = d_{\varphi\varphi} = e_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r}. \quad (6)$$

В зависимостях (6) $u = u_r$ — единственная отличная от нуля компонента вектора перемещений.

Напряжения в сферическом слое найдем из закона (2):

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)e_{rr} + 2\lambda e_{\varphi\varphi}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda e_{rr} + 2(\lambda + \mu)e_{\varphi\varphi}.$$

Используя квазистатический подход, запишем уравнение равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0. \quad (7)$$

Рассмотрим деформирование материала до начала пластического течения. В рассматриваемом случае сферической симметрии $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta}$ закон Нортон (3) принимает вид

$$\begin{aligned} V(\sigma_{ij}) &= 2^{-\frac{n}{2}} B \left((\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta})^2 \right)^{\frac{n}{2}}, \\ \varepsilon_{rr}^v &= \frac{\partial p_{rr}}{\partial t} = -2\varepsilon_{\varphi\varphi}^v = -2 \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial t} = B n (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^{n-1}, \\ \varepsilon_{rr}^v + 2\varepsilon_{\varphi\varphi}^v &= 0, \quad p_{rr} + 2p_{\varphi\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Для компонент перемещений, обратимых и необратимых деформаций в рассматриваемом случае имеем [17, 18]

$$\begin{aligned} e_{rr} &= \frac{(\lambda + \mu)\sigma_{rr} - \lambda\sigma_{\varphi\varphi}}{\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad e_{\varphi\varphi} = \frac{(\lambda + 2\mu)\sigma_{\varphi\varphi} - \lambda\sigma_{rr}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}, \\ u &= \frac{1}{r^2(3\lambda + 2\mu)} \int r^2(\sigma_{rr} + 2\sigma_{\varphi\varphi}) dr, \\ p_{rr} &= -\frac{\lambda + 2\mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) - \frac{2c(t)}{r^3(3\lambda + 2\mu)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Отметим, что соотношения (9) остаются справедливыми на протяжении всего процесса деформирования независимо от типа накапливаемой материалом необратимой деформации. Из уравнения равновесия (7) с учетом (9)

и краевых условий (5) найдем компоненты напряжений σ_{rr} и $\sigma_{\varphi\varphi}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} \int_{r_0}^r \frac{p_{rr}}{r} dr + \frac{4\mu c(t)}{3(\lambda + 2\mu)} \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r^3} \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \sigma_{rr} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \left((3\lambda + 2\mu)p_{rr} + \frac{2c(t)}{r^3} \right), \\ c(t) &= -\frac{3r_0^3 R^3}{2(R^3 - r_0^3)} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} p(t) + (3\lambda + 2\mu) \int_{r_0}^R \frac{p_{rr}}{r} dr \right).\end{aligned}\quad (10)$$

Из закона ползучести (8) и четвертой зависимости (9) получим интегро-дифференциальное уравнение для компоненты необратимых деформаций $p_{rr}(r, t) = -2p_{\varphi\varphi}$:

$$\frac{\partial p_{rr}}{\partial t} = Bn \left[-\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \left((3\lambda + 2\mu)p_{rr} + \frac{2c(t)}{r^3} \right) \right]^{n-1}. \quad (11)$$

Численное решение интегро-дифференциального уравнения (11) при начальном условии $p_{rr}(r, 0) = 0$ получено при помощи конечно-разностного метода и составной формулы трапеций, используемой для приближенного вычисления интегралов.

По известным значениям напряжений (10) из соотношений (9) найдены компоненты обратимых деформаций. Распределение перемещений по сферическому слою получается из второй зависимости (6).

3. Пластическое течение. Возрастающее давление $p(t)$ приводит к тому, что в некоторый момент времени $t = t_0$ на внутренней сферической поверхности $r = r_0$ выполнится условие пластичности (4), которое в нашем случае примет вид

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 2k. \quad (12)$$

С этого момента времени от поверхности $r = r_0$ развивается область пластического течения $r_0 \leq r \leq m(t)$, а область $m(t) \leq r \leq R$ остается вязкоупругой областью, в которой присутствуют упругие деформации и деформации ползучести. Таким образом, граница $r = m(t)$ является движущейся границей области пластического течения.

В области пластического течения $r_0 \leq r \leq m(t)$ интегрированием уравнения равновесия (7) с учетом условия пластичности (12) и второго условия (5) найдем компоненты напряжений

$$\sigma_{rr} = -4k \ln \frac{r}{r_0}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -2k \left(2 \ln \frac{r}{r_0} + 1 \right). \quad (13)$$

Для компоненты напряжения σ_{rr} в области вязкоупругого деформирования $m(t) \leq r \leq R$ из уравнения (7), четвертой зависимости (9) и первого условия (5) получим

$$\sigma_{rr} = -\frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} \int_r^R \frac{p_{rr}}{r} dr - \frac{4\mu c(t)}{3(\lambda + 2\mu)} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right) - p(t). \quad (14)$$

В области $m(t) \leq r \leq R$ по-прежнему выполняется интегро-дифференциальное уравнение (11), в котором с учетом непрерывности компонент напряжений σ_{rr} функция $c(t)$ на упругопластической границе $r = m(t)$ имеет вид

$$c(t) = -\frac{3m^3 R^3}{2(R^3 - m^3)} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} p(t) - \frac{2k(\lambda + 2\mu)}{\mu} \ln \frac{m}{r_0} + (3\lambda + 2\mu) \int_m^R \frac{p_{rr}}{r} dr \right).$$

Из четвертого соотношения (9) и условия пластического течения (12) найдем компоненту p_{rr} в области течения $r_0 \leq r \leq m(t)$:

$$p_{rr} = -\frac{2}{3\lambda + 2\mu} \left(\frac{c(t)}{r^3} + \frac{k(\lambda + 2\mu)}{\mu} \right). \quad (15)$$

Уравнение (15), в котором $r = m(t)$, и (11) образуют систему уравнений относительно неизвестных функций $p_{rr}(r, t)$ в области $m(t) \leq r \leq R$ и $m(t)$. Решение этой системы также получено при помощи конечно-разностного метода.

Для компоненты напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$ в области $m(t) \leq r \leq R$ продолжает выполняться второе соотношение (10). Компоненты упругих деформаций и перемещений вычисляются из зависимостей (9) и (6).

4. Пластическое течение при постоянном давлении и разгрузке среды. Пусть с момента времени $t = t_1 > t_0$ давление $p(t)$ становится постоянным. Такое изменение в режиме нагружения приводит к тому, что в области $r_0 \leq r \leq m_1(t)$ продолжается пластическое течение, в области $m_1(t) \leq r \leq m(t_1)$ начинается разгрузка, а в области $m(t_1) \leq r \leq R$ по-прежнему происходит вязкоупругое деформирование. Новая упругопластическая граница $r = m_1(t)$ отделяет уменьшающуюся область пластического течения $r_0 \leq r \leq m_1(t)$ от области $m_1(t) \leq r \leq m(t_1)$, в которой необратимые деформации теперь накапливаются за счет процесса ползучести. Скорость продвижения границы $r = m_1(t)$ по среде при этом близка к нулю.

В областях $m_1(t) \leq r \leq m(t_1)$ и $m(t_1) \leq r \leq R$ остается справедливым интегро-дифференциальное уравнение (11) с функцией

$$c(t) = -\frac{3m_1^3 R^3}{2(R^3 - m_1^3)} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} p(t) - \frac{2k(\lambda + 2\mu)}{\mu} \ln \frac{m_1}{r_0} + (3\lambda + 2\mu) \int_{m_1}^R \frac{p_{rr}}{r} dr \right). \quad (16)$$

Компонента необратимых деформаций p_{rr} в области $r_0 \leq r \leq m_1(t)$ вычисляется из соотношения (15). Как и ранее, неизвестные функции $p_{rr}(r, t)$ и $m_1(t)$ в областях $m_1(t) \leq r \leq m(t_1)$, $m(t_1) \leq r \leq R$ находятся из системы, которая состоит из уравнения (15), в котором $r = m_1(t)$, и уравнения (11), конечно-разностным методом.

Компоненты напряжений в областях $m_1(t) \leq r \leq m(t_1)$, $m(t_1) \leq r \leq R$ вычисляются из зависимости (14) и второго соотношения (10), а в области течения $r_0 \leq r \leq m_1(t)$ — из соотношений (13), в которых функция $c(t)$ имеет

вид (16). Упругие деформации и перемещения находятся по формулам (9) и (6) соответственно.

Положим далее, что с момента времени $t = t_2 > t_1$ давление $p(t)$ уменьшается. Это приводит к разгрузке сферического слоя. Таким образом, начиная с момента времени $t = t_2$ пластическое течение полностью прекращается и приращение необратимых деформаций во всем слое связано только с процессом ползучести. Дифференциальное уравнение в частных производных (11) для необратимых деформаций p_{rr} теперь выполняется во всем сферическом слое, в котором функция $c(t)$ определяется из третьего соотношения (10). Напряжения в каждой точке слоя вычисляются из первых двух зависимостей (10), обратимые деформации и перемещения — из (9) и (6).

В момент времени $t = t_3 > t_2$ разность напряжений на внутренней границе слоя $r = r_0$ обращается в нуль:

$$(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) \Big|_{r=r_0, t=t_3} = 0$$

и далее становится отрицательной, но при этом по абсолютной величине начинает возрастать. Теперь сферический слой можно разделить на две области, в которых разность напряжений имеет разные знаки. Поэтому из (3) и (8) имеем

$$\varepsilon_{rr}^v = \frac{\partial p_{rr}}{\partial t} = -2\varepsilon_{\varphi\varphi}^v = Bn|\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}|^{n-2}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}). \quad (17)$$

С учетом (17) уравнение (11) для p_{rr} примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{rr}}{\partial t} = & -\frac{Bn\mu^{n-1}}{(\lambda + 2\mu)^{n-1}} \left((3\lambda + 2\mu)p_{rr} + \frac{2c(t)}{r^3} \right) \times \\ & \times \left| (3\lambda + 2\mu)p_{rr} + \frac{2c(t)}{r^3} \right|^{n-2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Соотношения (9), (10) и (6) для обратимых деформаций, напряжений, функции $c(t)$ и перемещений выполняются и в данном случае.

5. Повторное пластическое течение при разгрузке. В процессе разгрузки напряженное состояние может снова достигать поверхности нагружения. В рассматриваемом случае это связано с выполнением условия

$$(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) \Big|_{r=r_0} = -2k$$

в момент времени $t = t_4 > t_3$. С этого момента времени при дальнейшем уменьшении функции $p(t)$ от внутренней границы $r = r_0$ развивается область повторного пластического течения $r_0 \leq r \leq m_2(t)$. В областях $m_2(t) \leq r \leq m_1(t_2)$, $m_1(t_2) \leq r \leq m(t_1)$ и $m(t_1) \leq r \leq R$ материал продолжает деформироваться вязкоупруго, т.е. граница $r = m_2(t)$ — движущаяся граница области повторного пластического течения.

Учитывая, что далее во всей области $r_0 \leq r \leq m_2(t)$ выполняется условие

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = -2k, \quad (19)$$

интегрированием уравнения равновесия при втором краевом условии (5) найдем компоненты напряжений

$$\sigma_{rr} = 4k \ln \frac{r}{r_0}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = 2k \left(2 \ln \frac{r}{r_0} + 1 \right).$$

Из четвертого соотношения (9) и условия пластичности (19) выразим компоненту необратимых деформаций p_{rr} в области $r_0 \leq r \leq m_2(t)$:

$$p_{rr} = -\frac{2}{3\lambda + 2\mu} \left(\frac{c(t)}{r^3} - \frac{k(\lambda + 2\mu)}{\mu} \right). \quad (20)$$

В областях $m_2(t) \leq r \leq m_1(t_2)$, $m_1(t_2) \leq r \leq m(t_1)$ и $m(t_1) \leq r \leq R$ продолжает выполняться интегро-дифференциальное уравнение (18), в котором

$$c(t) = -\frac{3m_2^3 R^3}{2(R^3 - m_2^3)} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} p(t) + \frac{2k(\lambda + 2\mu)}{\mu} \ln \frac{m_2}{r_0} + (3\lambda + 2\mu) \int_{m_2}^R \frac{p_{rr}}{r} dr \right).$$

Система уравнений (20) при $r = m_2(t)$ и (18) является системой относительно неизвестных функций $m_2(t)$ и $p_{rr}(r, t)$ в областях $m_2(t) \leq r \leq m_1(t_2)$, $m_1(t_2) \leq r \leq m(t_1)$ и $m(t_1) \leq r \leq R$. Положение упругопластической границы $r = m_2(t)$ однозначно связано с уменьшающимся внешним давлением. При полной разгрузке (внешнее давление $p(t)$ обращается в нуль при $t = t_k$) в соотношениях, задающих остаточные напряжения и деформации, функция $c(t)$ принимает форму

$$c(t) = -\frac{3m_2^3 R^3}{2(R^3 - m_2^3)} \left(\frac{2k(\lambda + 2\mu)}{\mu} \ln \frac{m_2}{r_0} + (3\lambda + 2\mu) \int_{m_2}^R \frac{p_{rr}}{r} dr \right).$$

С момента времени $t = t_k$ пластическое течение прекращается и дальнейшее изменение необратимых деформаций в любой точке сферического слоя связано с процессом ползучести.

Все расчеты проводились с линейной функцией давления

$$p(t) = \begin{cases} \alpha t, & 0 \leq t < t_1, \\ \alpha t_1, & t_1 \leq t < t_2, \\ \alpha t_1 - \beta(t - t_2), & t_2 \leq t \leq t_k = \frac{\alpha t_1}{\beta} + t_2 \end{cases}$$

и следующими значениями постоянных безразмерных параметров: $n = 3$, $Bn\mu^3/\alpha = 3.5$, $\lambda/\mu = 3.9$, $r_0/R = 0.1$, $k/\mu = 0.0026$, $\beta/\alpha = 0.5$.

Изменение от безразмерного времени $\tau = \alpha t/\mu$ упругопластических границ $\tilde{m} = m/R$ (в промежутке от $\tau_0 = 0.004$ до $\tau_1 = 0.02$), $\tilde{m} = m_1/R$ (от τ_1 до $\tau_2 = 0.04$) и $\tilde{m} = m_2/R$ (от $\tau_4 = 0.054$ до $\tau_k = 0.08$) представлено на рис. 1.

Компоненты остаточных напряжений $\tilde{\sigma}_{rr} = \sigma_{rr}/\mu$ и $\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi}/\mu$ в процессе их релаксации после снятия нагружающих усилий от τ_k (сплошные линии) до $\tau = 100$ (штриховые линии) показаны на рис. 2.

Кривые на рис. 3 иллюстрируют распределение перемещений $\tilde{u} = u/R$ в зависимости от радиуса $\tilde{r} = r/R$ в моменты времени $\tau = 0.012$ (сплошной линией), τ_1 (штриховой линией) и τ_k (пунктирной линией).

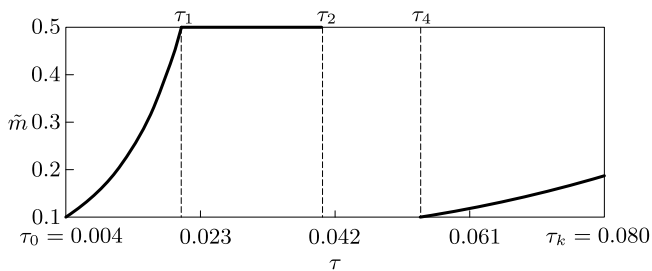


Рис. 1. Изменение упругопластических границ с течением времени
[Figure 1. Elastic-plastic boundaries evolution]

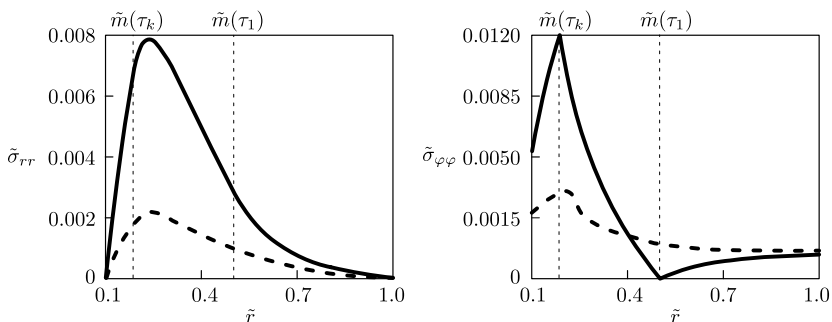


Рис. 2. Распределение компонент напряжений
[Figure 2. Distributions of stress tensor components]

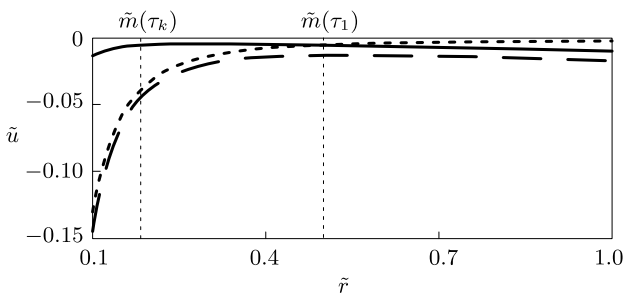


Рис. 3. Распределение перемещений в разные моменты времени
[Figure 3. Distributions of displacements at different times]

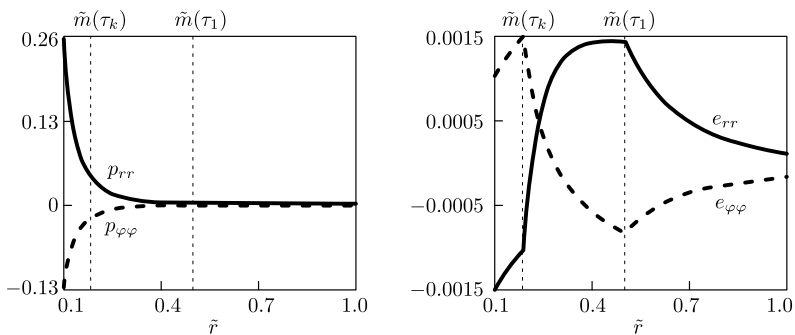


Рис. 4. Распределение необратимых и обратимых деформаций
[Figure 4. Distributions of irreversible and reversible deformations]

На рис. 4 изображены распределения необратимых p_{rr} и $p_{\varphi\varphi}$ сплошной и пунктирной линиями и обратимых деформаций e_{rr} и $e_{\varphi\varphi}$ сплошной и пунктирной линиями соответственно в момент времени τ_2 .

Заключение. В данной работе получено решение краевой задачи о пластическом течении материала сферического слоя с предварительно накопленными необратимыми деформациями ползучести, о разгрузке и о повторном пластическом течении материала. Получены зависимости упругопластических границ от времени, найдены распределения обратимых и необратимых деформаций, напряжений и перемещений по слою в разные моменты времени, вычислены остаточные напряжения и деформации.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект № 18-01-00038), Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках выполнения проекта № 3.7009.2017/8.9 базовой части государственного задания на выполнение работ в сфере научной деятельности.

Библиографический список

1. Олейников А. И., Пекарш А. И. *Интегрированное проектирование процессов изготовления монолитных панелей*. М.: Эком, 2009. 109 с.
2. Крупский Р. Ф., Кривенок А. А., Станкевич А. В., Феоктистов С. И., Белых С. В. Формообразование профильных заготовок с помощью листового обтяжного пресса // *Ученые записки КнАГТУ*, 2013. Т. 1, № 14 (Науки о природе и технике). С. 4–8. doi: [10.17084/2013.II-1\(14\).1](https://doi.org/10.17084/2013.II-1(14).1).
3. Хохлов А. В. Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: моделирование влияния температуры на кривые деформирования, ползучести и релаксации // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 1. С. 160–179. doi: [10.14498/vsgtu1524](https://doi.org/10.14498/vsgtu1524).
4. Аннин Б. Д., Олейников А. И., Бормотин К. С. Моделирование процессов формообразования панелей крыла самолета SSJ-100 // *ПМТФ*, 2010. Т. 51, № 4. С. 155–165.
5. Li H., Zhang B. A new viscoelastic model based on generalized method of cells for fiber-reinforced composites // *Int. J. Plast.*, 2015. vol. 65. pp. 22–32. doi: [10.1016/j.ijplas.2014.08.012](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2014.08.012).
6. Фирсов С. В. Необратимые деформации вращающегося цилиндра // *Известия Алтайского государственного университета*, 2018. № 4 (102). С. 114–117. doi: [10.14258/izvasu\(2018\)4-21](https://doi.org/10.14258/izvasu(2018)4-21).
7. Буренин А. А., Быковцев Г. И., Ковтанюк Л. В. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // *Докл. Академии наук*, 1996. Т. 347, № 2. С. 199–201.
8. Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. *Большие необратимые деформации и упругое последствие*. Владивосток: Дальнаука, 2013. 312 с.
9. Бегун А. С., Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. Большие необратимые деформации в условиях изменяющихся механизмов их производства и проблема задания пластических потенциалов // *Докл. Академии наук*, 2016. Т. 470, № 3. С. 275–278. doi: [10.7868/S0869565216270086](https://doi.org/10.7868/S0869565216270086).

10. Бегун А. С., Ковтанюк Л. В., Лемза А. О. Ползучесть и релаксация напряжений в материале цилиндрического слоя при его ротационном движении // *Вестн. ЧГПУ. Сер. мех. пред. сост.*, 2016. Т. 30, № 4. С. 3–11.
11. Бегун А. С., Ковтанюк Л. В., Лемза А. О. Смена механизмов накопления необратимых деформаций материалов на примере их вискозиметрического деформирования // *Изв. РАН. МТТ*, 2018. № 1. С. 103–112.
12. Begun A. S., Kovtanyuk L. V., Lemza A. O. On modelling of creep and plasticity in a problem of viscosimetric flow of a material // *Key Engineering Materials*, 2016. vol. 685. pp. 230–234. doi: [10.4028/www.scientific.net/KEM.685.230](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.685.230).
13. Белых С. В., Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Прокудин А. Н. Об учете вязких свойств материалов в теории больших упругопластических деформаций // *Чебышевский сб.*, 2017. Т. 18, № 3. С. 108–130. doi: [10.22405/2226-8383-2017-18-3-109-130](https://doi.org/10.22405/2226-8383-2017-18-3-109-130).
14. Prokudin A. N., Firsov S. V. Antiplane strain of hardening elastoviscoplastic medium // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2018. vol. 11, no. 4. pp. 399–410. doi: [10.17516/1997-1397-2018-11-4-399-410](https://doi.org/10.17516/1997-1397-2018-11-4-399-410).
15. Norton F. H. *The creep of steel at high temperatures*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1929; v+90 pp.
16. v. Mises R. Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand // *Gött. Nachr.*, 1913. vol. 1913. pp. 582–592 (In German), <http://www.digizeitschriften.de/dms/resolveppn/?PID=GDZPPN002503697>.
17. Буренин А. А., Галимзянова К. Н., Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л. О согласовании механизмов роста необратимых деформаций полого шара при всестороннем сжатии // *Докл. Академии наук*, 2018. Т. 482, № 4. С. 403–406. doi: [10.31857/S086956520003046-3](https://doi.org/10.31857/S086956520003046-3).
18. Галимзянова К. Н., Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л. Ползучесть и пластическое течение материала упругопластического сферического слоя в условиях всестороннего гидростатического сжатия // *Вестн. ЧГПУ. Сер. мех. пред. сост.*, 2017. Т. 32, № 2. С. 37–44.

MSC: 74C10

Creep and plastic flow of a spherical viscoelastic layer material at its loading and unloading

*K. N. Galimzyanova¹, L. V. Kovtanyuk¹, G. L. Panchenko^{1,2}*¹ Institute for Automation and Control Processes,
Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences,
5, Radio st., Vladivostok, 690041, Russian Federation.² Vladivostok State University of Economics and Service,
41, Gogolya st., Vladivostok, 690014, Russian Federation.

Abstract

The purpose of the research is to investigate the processes of accumulation of irreversible deformations through different mechanisms: creep and plastic flow. Initially irreversible deformations are produced due to the viscous properties of solid material as creep deformations. The mechanism of the production of irreversible deformations changes to plastic when stress state reach the yield surface. On the contrary, this mechanism changes from fast plastic to slow viscous during unloading. The continuity in such increase in irreversible deformations is provided by the corresponding set of creep and plasticity potentials. These processes are considered in the framework of the mathematical theory of small deformations on the example of a one-dimensional problem of the deforming of a viscoelastoplastic hollow sphere under the influence of volumetric pressure changing with time. The processes of creep and plastic flow under increasing pressure, plastic flow at constant pressure, the medium unloading at decreasing pressure and the repeated plastic flow at the unloading were considered. The regularities of the motion of elastic-plastic boundaries in the material of the hollow sphere were established. The parameters of the stress-strain state of the medium were calculated, stress relaxation after the unloading was investigated.

Keywords: elasticity, creep, plasticity, irreversible deformations.

Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Galimzyanova K. N., Kovtanyuk L. V., Panchenko G. L. Creep and plastic flow of a spherical viscoelastic layer material at its loading and unloading, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 2, pp. 270–283. doi: [10.14498/vsgtu1687](https://doi.org/10.14498/vsgtu1687) (In Russian).

Authors' Details:

Kseniya N. Galimzyanova  <https://orcid.org/0000-0003-2615-0333>

Senior Software Engineer; Lab. of Irreversible Deformation Mechanics;

e-mail: gal-ksyusha@ya.ru

Larisa V. Kovtanyuk  <https://orcid.org/0000-0002-2349-4803>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Head of Laboratory; Lab. of Irreversible Deformation Mechanics;

e-mail: lk@iacp.dvo.ru

Galina L. Panchenko  <https://orcid.org/0000-0002-6921-2971>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Acting Senior Researcher; Lab. of Information, Analytical and Control Systems and Technologies¹; Researcher; Lab. of Fundamental and Applied Physics²;

e-mail: panchenko.21@yandex.ru

Received: 9th April, 2019 / Revised: 28th May, 2019 /

Accepted: 10th June, 2019 / First online: 25th June, 2019

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interests with the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The work was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00038), the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the project no. 3.7009.2017/8.9 of the basic part of the state task to perform works in the field of scientific activity.

References

- Oleinikov A. I., Pekarsh A. I. *Integrirovannoe proektirovanie protsessov izgotovleniia monolitnykh panelei* [Integrated design of monolithic panel manufacturing processes]. Moscow, Ekom, 2009, 109 pp. (In Russian)
- Krupsky R. F., Krivenok A. A., Stankevitch A. V., Feoktistov S. I., Belykh S. V. Shaping profile blanks at a sheet stretch-forming press, *Scholarly Notes of Komsomolsk-na-Amure State Technical University*, 2013, vol. 1, no. 14 (Engineering and Natural Sciences), pp. 4–8 (In Russian). doi: [10.17084/2013.II-1\(14\).1](https://doi.org/10.17084/2013.II-1(14).1).
- Khokhlov A. V. The nonlinear Maxwell-type model for viscoelastoplastic materials: simulation of temperature influence on creep, relaxation and strain-stress curves, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 1, pp. 160–179 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu1524](https://doi.org/10.14498/vsgtu1524).
- Annin B. D., Oleinikov A. I., Bormotin K. S. Modeling of forming of wing panels of the SSJ-100 aircraft, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2010, vol. 51, no. 4, pp. 579–589. doi: [10.1007/s10808-010-0074-2](https://doi.org/10.1007/s10808-010-0074-2).
- Li H., Zhang B. A new viscoelastic model based on generalized method of cells for fiber-reinforced composites, *Int. J. Plast.*, 2015, vol. 65, pp. 22–32. doi: [10.1016/j.ijplas.2014.08.012](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2014.08.012).
- Firsov S. V. Irreversible deformations of a rotating cylinder, *Izvestiya of Altai State University*, 2018, no. 4 (102), pp. 114–117 (In Russian). doi: [10.14258/izvasu\(2018\)4-21](https://doi.org/10.14258/izvasu(2018)4-21).
- Burenin A. A., Bykovtsev G. I., Kovtanyuk L. V. A simple model of finite strain in an elastoplastic medium, *Doklady Physics*, 1996, vol. 41, no. 3, pp. 127–129.
- Burenin A. A., Kovtanyuk L. V. *Bol'shie neobratimye deformatsii i uprugoe posledeystvie* [Large irreversible deformations and elastic aftereffect]. Vladivostok, Dal'nauka, 2013, 312 pp. (In Russian)
- Begun A. S., Kovtanyuk L. V., Burenin A. A. Large irreversible deformations under conditions of changing mechanisms of their formation and the problem of definition of plastic potentials, *Doklady Physics*, 2016, vol. 61, no. 9, pp. 463–466. doi: [10.1134/S102833581609007X](https://doi.org/10.1134/S102833581609007X).
- Begun A. S., Kovtanyuk L. V., Lemza A. O. Creep and stress relaxation in the cylindrical layer of a material at its rotational motion, *Vestnik Chuvash. Gos. Ped. Univ. im I. Ya. Yakovleva. Ser. Mekh. Pred. Sost.*, 2016, vol. 30, no. 4, pp. 3–11.
- Begun A. S., Kovtanyuk L. V., Lemza A. O. Change of accumulation mechanisms of irreversible deformations of materials in an example of viscometric deformation, *Mech. Solids*, 2018, vol. 53, no. 1, pp. 85–92. doi: [10.3103/S0025654418010107](https://doi.org/10.3103/S0025654418010107).

12. Begun A. S., Kovtanyuk L. V., Lemza A. O. On modelling of creep and plasticity in a problem of viscosimetric flow of a material, *Key Engineering Materials*, 2016, vol. 685, pp. 230–234. doi: [10.4028/www.scientific.net/KEM.685.230](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.685.230).
13. Belykh S. V., Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Prokudin A. N. On account of viscous properties of materials in the theory of large elastoplastic strains, *Chebyshevskii Sb.*, 2017, vol. 18, no. 3, pp. 108–130 (In Russian). doi: [10.22405/2226-8383-2017-18-3-109-130](https://doi.org/10.22405/2226-8383-2017-18-3-109-130).
14. Prokudin A. N., Firsov S. V. Antiplane strain of hardening elastoviscoplastic medium, *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2018, vol. 11, no. 4, pp. 399–410. doi: [10.17516/1997-1397-2018-11-4-399-410](https://doi.org/10.17516/1997-1397-2018-11-4-399-410).
15. Norton F. H. *The creep of steel at high temperatures*. New York, McGraw-Hill Book Company, 1929; v+90 pp.
16. v. Mises R. Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand, *Gött. Nachr.*, 1913, vol. 1913, pp. 582–592 (In German), <http://www.digizeitschriften.de/dms/resolveppn/?PID=GDZPPN002503697>.
17. Burenin A. A., Galimzyanova K. N., Kovtanyuk L. V., Panchenko G. L. Matching growth mechanisms of irreversible deformation of a hollow sphere under uniform compression, *Doklady Physics*, 2018, vol. 63, no. 10, pp. 407–410. doi: [10.1134/S1028335818100026](https://doi.org/10.1134/S1028335818100026).
18. Galimzyanova K. N., Kovtanyuk L. V., Panchenko G. L. Creep and plastic flow of the material of an elastoplastic spherical layer under conditions of comprehensive hydrostatic compression, *Vestnik Chuvash. Gos. Ped. Univ. im I. Ya. Yakovleva. Ser. Mekh. Pred. Sost.*, 2017, vol. 32, no. 2, pp. 37–44 (In Russian).