



УДК 539.32:624.13

## Определение упругих констант горных пород

*М. А. Кулагина, Б. А. Рычков, Ю. Ю. Степанова*



Кыргызско-Российский Славянский университет им. Б. Н. Ельцина,  
Кыргызская Республика, 720000, Бишкек, ул. Киевская, 44.

### Аннотация

Рассмотрены экспериментальные данные А. Н. Ставрогина трехосного сжатия образцов песчаников при пропорциональном нагружении по схеме Т. Кармана. Песчаники обладают достаточно высокой пористостью в исходном состоянии, поэтому их деформация в пределах упругости имеет следующие особенности. При одноосном сжатии цилиндрического образца при малых начальных напряжениях (порядка  $0.05 \div 0.15$  от предела упругости) на диаграмме продольной деформации наблюдается нелинейный участок, что связывается с происходящим при этом уплотнением материала. Это обстоятельство вызывает определенное затруднение при определении модуля упругости. Предлагается уточнение способа определения упругих констант (модуля Юнга и коэффициента Пуассона) с учетом указанной особенности начальной диаграммы деформации.

Ранее А. Н. Ставрогин предложил рассмотреть на диаграмме продольной деформации линейный участок от указанного начального напряжения до условного предела упругости. Именно по этой части диаграммы определяется модуль упругости. Линейная экстраполяция данного участка до нулевого напряжения доставляет фактически новое начало координат для рассматриваемой продольной деформации. В настоящей работе показано, что при трехосном сжатии цилиндрического образца продольная деформация (удовлетворяющая закону Гука) может отсчитываться от того же нового начала координат, устанавливаемого при одноосном сжатии. При этом поперечная деформация образца рассматривается в том диапазоне изменения напряжений, при котором приращение осевого напряжения вызывает отрицательное приращение поперечной деформации. На основе скорректированных таким образом исходных экспериментальных значений продольной и поперечной деформации определен также условный предел упругости.

### Научная статья


  Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)


### Образец для цитирования

Кулагина М. А., Рычков Б. А., Степанова Ю. Ю. Определение упругих констант горных пород // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 2. С. 284–303. doi: [10.14498/vsgtu1595](https://doi.org/10.14498/vsgtu1595).

### Сведения об авторах

*Маргарита Алексеевна Кулагина*  <https://orcid.org/0000-0001-7979-7881>  
аспирант; e-mail: [kulagina\\_m.a@mail.ru](mailto:kulagina_m.a@mail.ru)

*Борис Александрович Рычков*  <https://orcid.org/0000-0001-7408-1657>  
доктор физико-математических наук, профессор; e-mail: [rychkovba@mail.ru](mailto:rychkovba@mail.ru)

*Юлия Юрьевна Степанова*  <https://orcid.org/0000-0001-5104-3383>  
магистрант; e-mail: [stepanova\\_yulya\\_1995@mail.ru](mailto:stepanova_yulya_1995@mail.ru)

**Ключевые слова:** песчаник, трехосное сжатие, уплотнение и деформационное упрочнение пористого материала, обобщенный закон Гука, нелинейный характер диаграммы деформации, тензор деформаций.

Получение: 22 декабря 2017 г. / Исправление: 25 марта 2019 г. /

Принятие: 10 июня 2019 г. / Публикация онлайн: 24 июня 2019 г.

**Введение.** При трехосном сжатии цилиндрических образцов горных пород вычисляются главные напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  и измеряются осевая  $\varepsilon_1(\sigma_1)$  и поперечная  $\varepsilon_2(\sigma_1)$  деформации, наблюдаемые при испытании по схеме Т. Кармана ( $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ ). На диаграмме для продольной (осевой) деформации ( $\sigma_1 \sim \varepsilon_1$ ) наблюдается (особенно) для песчаников начальный нелинейный участок [1, 2], после которого следует практически линейный участок этой диаграммы вплоть до условного предела упругости. До сих пор не существует единого мнения, как на этом участке использовать зависимость  $\varepsilon_1(\sigma_1)$  для определения соответствующей упругой константы материала [1, 3, 4].

Некоторые исследователи [3, 5] считают, что наклон такой кривой «напряжение – деформация» при осевом сжатии ( $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ) определяет модуль упругости Юнга. При этом подчеркивают, что численное значение модуля зависит от уровня напряжения, а при последовательном нагружении и разгрузении образца породы модуль зависит и от цикла испытания, так как указанные кривые при нагружении и разгрузке не совпадают между собой. Иначе говоря, утверждается, что на отмеченном нелинейном участке диаграммы происходит упругая деформация. Аналогичное утверждение относится и к определению коэффициента Пуассона. Другие экспериментаторы [1, 4] предлагают исключать из рассмотрения такой начальный участок, а упругие параметры породы определять при более высоких уровнях напряжения, когда зависимость «напряжение – деформация» становится близкой к линейной. Однако до сих пор нет общепринятой методики определения упругих констант пород даже при пропорциональном нагружении. В этом направлении проводятся многочисленные экспериментальные исследования и даются различные теоретические их интерпретации [6–10].

При экспериментальном определении (статического) модуля Юнга по диаграмме продольной деформации сжимаемого образца предпочтение отдается [11] немецкому стандарту [12]. В этом стандарте рассматривается именно линейный участок данной диаграммы, причем его установление регламентируется предварительным уплотнением структуры материала. Последнее достигается неоднократным нагружением и разгрузкой (в пределах упругости), после которых наблюдается стабильная обратимая во время испытания упругая деформация. Подобная процедура рекомендуется [13, 14] при лабораторном определении модуля Юнга. Однако при этом не рассматривается вопрос определения коэффициента Пуассона.

Некоторыми исследователями уплотнение моделируется закрытием трещин [15], имеющих в горных породах в исходном состоянии. При анализе представленной в этой статье диаграммы осевой деформации одноосного сжатия [15, Fig. 2] определяется напряжение  $\sigma_{cc}$  (crack closure stress), при котором заканчивается начальный нелинейный участок диаграммы и начинается (с ростом напряжения) ее линейный участок. Считается, что экстраполяция

этого линейного участка до нулевого значения напряжения доставляет деформацию закрытия трещины  $\varepsilon_{cc}$  (crack closure strain), которая соответствует напряжению закрытия трещины  $\sigma_{cc}$ . Модуль Юнга определяется по установленному таким образом упругому участку диаграммы. Вводится допущение, что разгрузка с заданного напряжения на нелинейном участке происходит по тому же самому упругому закону Гука. Однако при этом не учитывается появление петли гистерезиса, всегда возникающей при промежуточных разгрузках. При превышении (условного) предела упругости рассматривается влияние на деформацию вновь возникающих (инициируемых) трещин.

Уплотнение структуры происходит также, если образец вначале нагружается гидростатическим сжатием, а затем производится догрузка осевым давлением при неизменном достигнутом равномерном боковом давлении. При таком сложном нагружении в опытах, результаты которых представлены, например, в [16], достоверно фиксируется только приращение осевой деформации  $\Delta\varepsilon_1$ , вызываемое приращением осевого напряжения  $\Delta\sigma_1$ . Это объясняется тем обстоятельством, что, как указано в [4], измерение поперечной деформации в таком опыте возможно только в одном поперечном сечении образца, при этом погрешность измерения данной деформации может достигать 50%. Как трактовать и теоретически (в пределах упругости) отображать зависимость  $\Delta\varepsilon_1(\Delta\sigma_1)$ , полученную в опытах [16], подробно представлено в [17].

Изложенное относится к проблеме определения деформационных характеристик материалов, изотропных в исходном состоянии. Для анизотропных материалов подобная проблема усложняется: для таких материалов обширный обзор подлежащих решению вопросов содержится в [18]. Для ортотропных материалов возможная методика определения упругих констант пластичных и полухрупких (к которым относят горные породы) материалов представлена в [19, 20].

В настоящей работе сделана попытка устранить указанное выше противоречие в трактовке упругих констант горных пород и разработать методику определения упругих параметров песчаников (выбросоопасного (dangerous for rock emissions sandstone) — № 1, не опасного по выбросам (not dangerous for rock emissions sandstone) — № 2, песчаника П-026 (P-026 sandstone) — № 3) на основе имеющихся экспериментальных данных [1].

**1. Анализ криволинейного участка продольной деформации.** Вид напряженного состояния характеризуется параметром  $C = \sigma_2/\sigma_1$ . Начиная с определенного уровня осевого напряжения  $\sigma_{1н}$  (характерного для каждого  $C$ ) можно выделить линейный участок диаграммы деформирования в координатах  $\sigma_1 - \varepsilon_1$  вплоть до условного предела упругости  $\sigma_{1у}$ ; причем  $\sigma_{1н} = (0.05 \div 0.15)\sigma_{1у}$  согласно [1].

На рис. 1 представлены диаграммы продольной и поперечной деформации песчаника № 1 до напряжений  $\sigma_{1у}$ , установленных в опытах [1], для всех осуществленных видов напряженного состояния.

Как следует из экспериментальных исследований [6, 7], при промежуточной разгрузке с линейного участка квазиупругой деформации возникает остаточная деформация. Эту деформацию необходимо исключать при определении упругих констант, что можно осуществить следующим образом.

Рассмотрим, например, диаграмму продольной деформации песчаника № 1 при одноосном сжатии. Аппроксимация с помощью линии тренда (линейной

зависимостью  $\sigma_1 = 32\,979.76 \cdot \varepsilon_1 - 42.17$ ) установившегося (линейного) участка деформации и продолжение этой линии тренда до нулевого напряжения доставляет новое начало координат (точка  $\varepsilon_1^0$  на рис. 2) для отсчета упру-

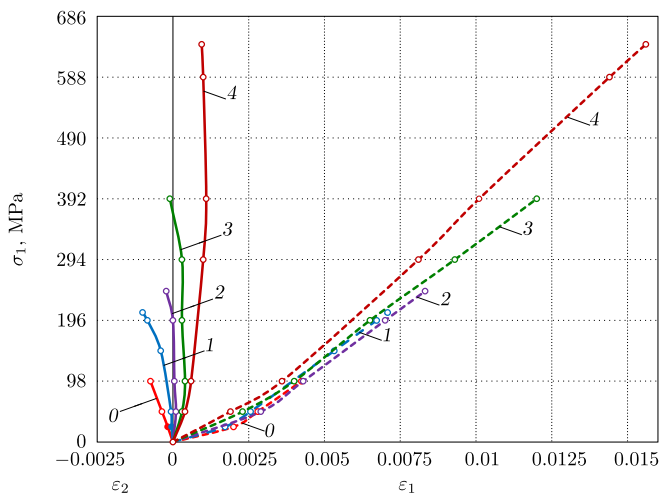


Рис. 1. Диаграммы деформирования  $\sigma_1 - \varepsilon_1$  (штриховые линии) и  $\sigma_1 - \varepsilon_2$  (сплошные линии) для выбросоопасного песчаника (№ 1) при различных значениях отношения  $C = \sigma_2/\sigma_1$ :  $0 - C = 0$ ,  $1 - C = 0.069$ ,  $2 - C = 0.116$ ,  $3 - C = 0.178$ ,  $4 - C = 0.227$

[Figure 1. The stress-strain diagrams (longitudinal strain – dashed lines, lateral strain – solid lines) for the dangerous for rock emissions sandstone (1st type sandstone) under different values of the parameter  $C = \sigma_2/\sigma_1$ :  $0 - C = 0$ ,  $1 - C = 0.069$ ,  $2 - C = 0.116$ ,  $3 - C = 0.178$ ,  $4 - C = 0.227$ ]

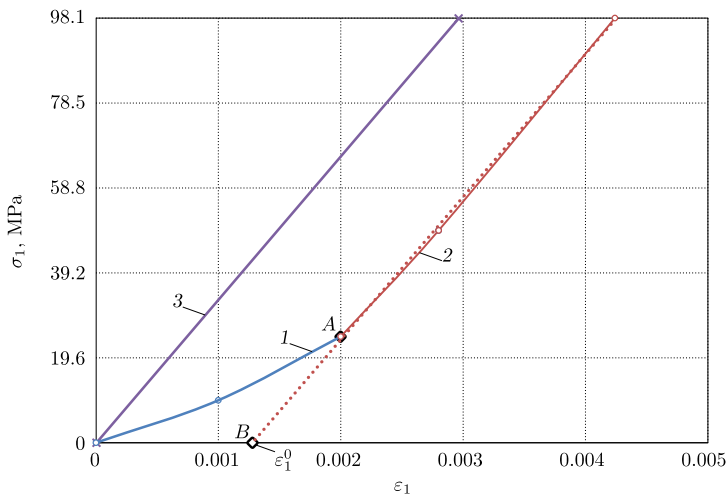


Рис. 2. Диаграмма упругого деформирования  $\sigma_1 - \varepsilon_1$  для песчаника № 1 при одноосном сжатии (определение модуля Юнга по схеме А. Н. Ставрогина): линия 1 – нелинейный участок; линия 2 – линейный участок; точками нанесена линия тренда для линейного участка; линия 3 – расчетная продольная деформация без учета переноса начала координат

[Figure 2. The elastic stress-strain diagram (longitudinal strain) for the 1st type sandstone under uniaxial compression (the Young's modulus definition by the A. N. Stavrogin's scheme): line 1 – non-linear section; line 2 – linear section; dotted line – trend line; line 3 – calculated longitudinal strain without taking into account the transfer of the origin of coordinates]

гой деформации вплоть до предела упругости (достоверность аппроксимации  $R^2 = 0.9993$ ).

Установлено, что определяемое таким образом это начало координат оказывается практически одним и тем же для всех рассматриваемых видов напряженного состояния данной горной породы. Среднее значение  $(\varepsilon_1^0)_{\text{ср}} = 1.36 \cdot 10^{-3}$ . Отклонение от этого значения при разных видах напряженного состояния определялось по формуле

$$\Delta\varepsilon_1^0 = \frac{\varepsilon_1^0 - (\varepsilon_1^0)_{\text{ср}}}{(\varepsilon_1^0)_{\text{ср}}} \cdot 100\%$$

и представлено в табл. 1.

Таблица 1

Расчетное смещение начала координат на диаграмме продольной деформации  
[The calculated displacement of origin of coordinates on the stress-strain diagram  
(longitudinal strain)]

$C$	$\varepsilon_1^0$	$\Delta\varepsilon_1^0, \%$
0	$1.28 \cdot 10^{-3}$	5.8
0.069	$1.17 \cdot 10^{-3}$	13.8
0.116	$1.58 \cdot 10^{-3}$	-16.6
0.178	$1.25 \cdot 10^{-3}$	8.1
0.227	$1.51 \cdot 10^{-3}$	-11.15

Разброс значений  $\Delta\varepsilon_1^0$  объясняется следующим обстоятельством. Если с ростом значения параметра  $C$  при одном и том же уровне напряжения в пределах упругости продольная деформация уменьшается, то такое поведение рассматриваемой породы отвечает (как будет показано ниже) обобщенному закону Гука. Это правило нарушается, как видно из рис. 1, при сравнении диаграмм при  $C = 0.116$  и  $C = 0.178$  (линии 2 и 3). А это, в свою очередь, влияет на установление нового начала координат. Подобная ситуация выявлена также еще для двух горных пород:

- для песчаника, не опасного по выбросам  $(\varepsilon_1^0)_{\text{ср}} = 1.52 \cdot 10^{-3}$ , отклонение  $\Delta\varepsilon_1^0$  принимает значения от  $-10\%$  до  $11.2\%$ ;
- для песчаника П-026  $(\varepsilon_1^0)_{\text{ср}} = 0.37 \cdot 10^{-3}$  отклонение  $\Delta\varepsilon_1^0$  лежит в пределах  $\pm 17.8\%$ .

ПРИМЕЧАНИЕ. При выявлении нового начала координат диаграмм продольной деформации песчаника П-026 использованы только две из них, а именно при  $C = 0.178$  и  $C = 0.232$ , из-за малости деформации начального криволинейного участка диаграммы при других значениях  $C$ .

Таким образом, при определении модуля Юнга устраняется из рассмотрения начальная нелинейная деформация, наблюдаемая при нагружении цилиндрических образцов песчаников из исходного состояния. Эта начальная деформация не является чисто упругой деформацией [2, 6], а содержит также деформацию уплотнения (как правило, пористость таких песчаников составляет 6–7% [1]).

На рис. 2 приведена расчетная диаграмма продольной деформации (линия 3), которая построена по значению модуля Юнга, определенного авторами эксперимента по указанной выше схеме [1]. На самом деле эта диаграмма

должна выходить не из исходного начала координат, а из точки  $A$  (точка на пересечении исходного криволинейного и расчетного линейного участка диаграммы), а затем продолжаться до точки  $B$ . Этой оговорки в [1] сделано не было, кроме того, не указано, как сравнивать расчетные и экспериментальные данные при других видах напряженного состояния. Эта неопределенность исключается, если во всех случаях трехосного сжатия использовать установленное нами новое начало координат (точка  $B$  на рис. 2).

**2. Пример обработки диаграммы поперечной деформации.** В этом пункте рассматривается выбросоопасный песчаник (песчаник № 1).

Для поперечной деформации при тех же напряженных состояниях (при которых наблюдается установившийся участок продольной деформации) происходит некоторое запаздывание установившегося участка этой деформации. Если на диаграмме для поперечной деформации выделить участок, на котором с ростом уровня осевого сжимающего напряжения каждое последующее значение деформации по модулю больше предыдущего, то аппроксимация этого участка линейной зависимостью (с привязкой к установленному новому началу координат) также происходит с достаточной достоверностью. Исключение составляет диаграмма поперечной деформации при одноосном сжатии: эта диаграмма является практически линейной вплоть до условного предела упругости (рис. 3).

Поэтому выделенный (при  $C = 0$ ) по схеме А. Н. Ставрогина линейный участок (т.е.  $\varepsilon_{2y} - \varepsilon_{2н}$ ) сохраняет ту же самую разность отсчитываемых деформаций, если весь участок поперечной деформации перенести в новое установленное начало координат параллельно его исходному состоянию.

Аналогичная картина имеет меньшую, но достаточно приемлемую точность и при пропорциональном нагружении для  $C = 0.069$ , начиная с участка устойчивого роста по модулю значения приращения поперечной деформации.

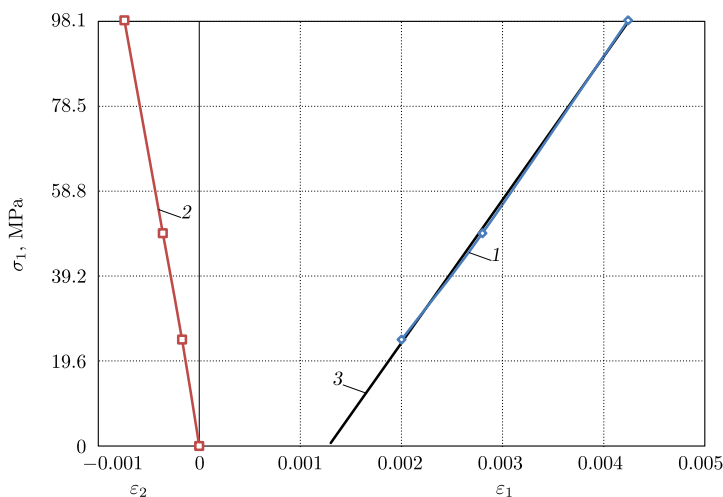


Рис. 3. Аппроксимация диаграмм деформирования песчаника № 1 при одноосном сжатии: линия 1 — продольная деформация; линия 2 — поперечная деформация; линия 3 — линия тренда

[Figure 3. Approximation of the elastic stress-strain diagrams for the 1st type sandstone under uniaxial compression: line 1 — longitudinal strain; line 2 — lateral strain; line 3 — trend line]

Таким способом (с учетом изложенного выше) устраняется неопределенность выделения установившегося упругого участка как продольной, так и поперечной деформации при произвольном виде напряженного состояния (рис. 4).

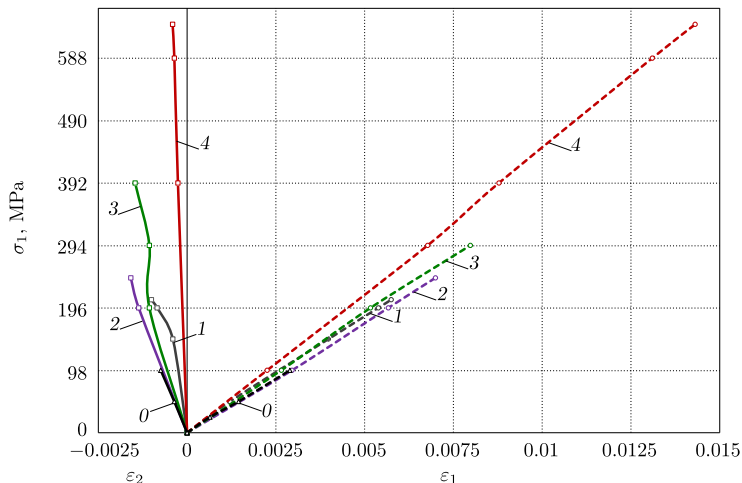


Рис. 4. Диаграммы упругого деформирования  $\sigma_1 - \varepsilon_1$  (штриховые линии) и  $\sigma_1 - \varepsilon_2$  (сплошные линии) для песчаника № 1 при различных значениях параметра  $C$ : 0 —  $C = 0$ , 1 —  $C = 0.069$ , 2 —  $C = 0.116$ , 3 —  $C = 0.178$ , 4 —  $C = 0.227$

[Figure 4. The stress-strain diagrams (longitudinal strain — dashed lines, lateral strain — solid lines) for the 1st type sandstone under different values of the parameter  $C$ : 0 —  $C = 0$ , 1 —  $C = 0.069$ , 2 —  $C = 0.116$ , 3 —  $C = 0.178$ , 4 —  $C = 0.227$ ]

### 3. Определение упругих констант на основе преобразованных диаграмм деформирования. Запишем обобщенный закон Гука в виде

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}(1 - 2C\nu), \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_1}{E}(C - \nu(1 + C)), \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_2,$$

где  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $C = \sigma_2/\sigma_1$ .

По аппроксимированным (вышеуказанным образом) участкам поперечной и продольной деформации были определены упругие константы. В качестве первого приближения (первый способ определения  $E$  и  $\nu$ ) были использованы диаграммы деформаций при  $C = 0.178$ . В результате были получены следующие значения:  $E = 33\,342.61$  МПа,  $\nu = 0.25$ .

Упругие константы можно также определить вторым способом: сначала получить их независимо при трех видах напряженного состояния (т.е. при трех значениях параметра  $C$ ), а затем усреднить. В результате были получены следующие значения:  $E = 34\,323.28$  МПа,  $\nu = 0.3$ . Отклонение от среднего значения для коэффициента  $\nu$  составило от +8% до -16%, а для величины  $E$  отклонение от среднего значения составило от +10% до -7%.

Скорректированные диаграммы деформирования (с учетом переноса начала координат) и их аппроксимация линиями тренда для всех значений  $C$  представлены на рис. 5.

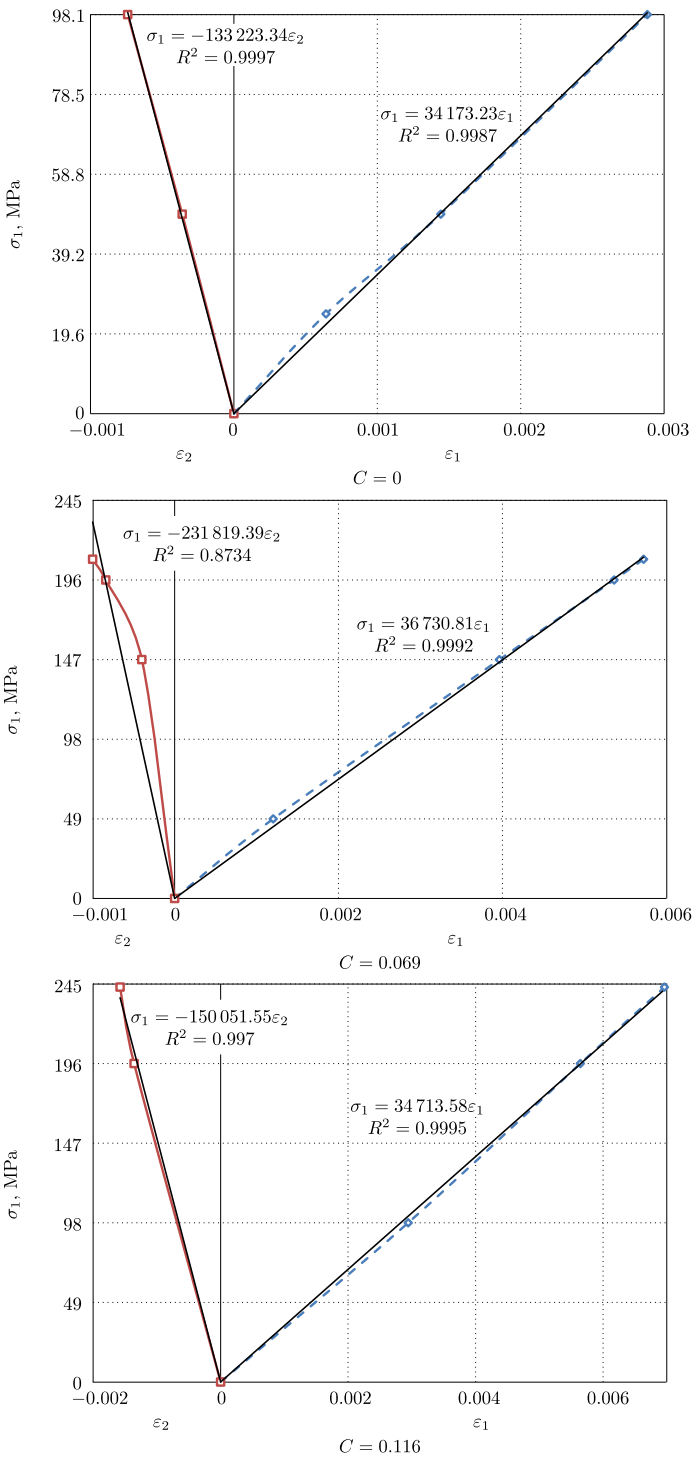
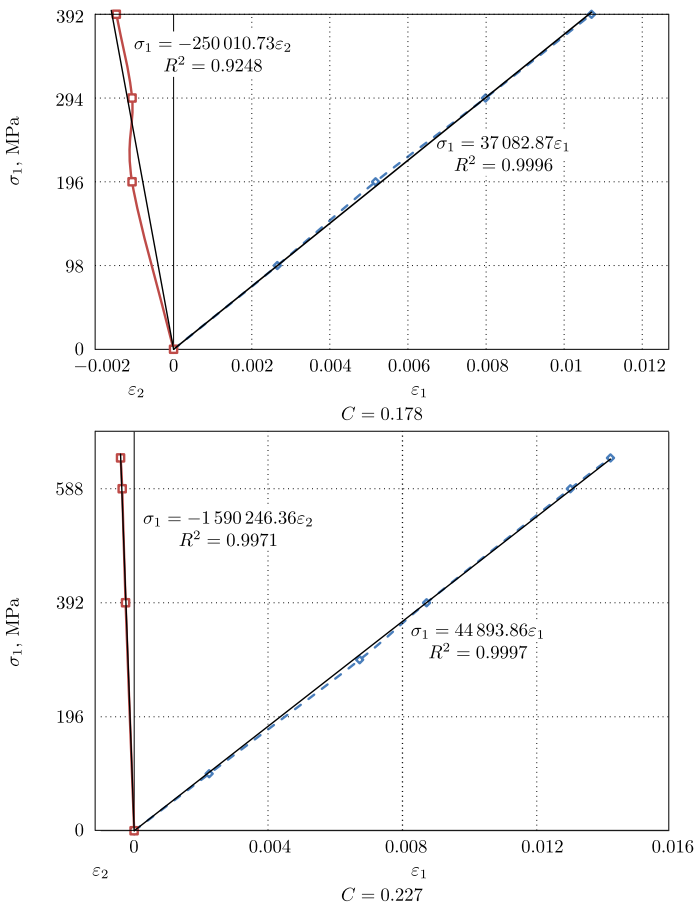


Рис. 5. Скорректированные (с учетом переноса начала координат) диаграммы упругого деформирования  $\sigma_1 - \epsilon_1$  (штриховые линии) и  $\sigma_1 - \epsilon_2$  (сплошные линии) и линии тренда для песчаника № 1 при различных значениях параметра  $C$

[Figure 5. The corrected stress-strain diagrams according to the shift of the origin of coordinates (longitudinal strain — dashed lines, lateral strain — solid lines) and the trend lines for the 1st type sandstone under different values of the parameter  $C$ ]





Окончание рис. 5 [The end of the Figure 5]

**4. Анализ методики определения упругой и остаточной деформации [1, 21].** В [1, прил. 2] даны значения остаточной продольной деформации  $\varepsilon_1^n$  после достижения предела прочности и коэффициент остаточной поперечной деформации  $\mu_n$ , а также приведены значения предельных накопленных продольной ( $\varepsilon_1^k$ ) и поперечной ( $\varepsilon_2^k$ ) деформаций [1, прил. 1]. Эти исходные данные для песчаника № 1 и расчетное значение остаточной поперечной деформации ( $\varepsilon_2^n = -\mu_n \varepsilon_1^n$ ) для двух значений параметра  $C$  приведены в табл. 2.

Таблица 2

Остаточные деформации на пределе прочности  
 [Residual strains at tensile strength]

$C$	$\varepsilon_1^k \cdot 10^3$	$\varepsilon_2^k \cdot 10^3$	$\varepsilon_1^n \cdot 10^3$	$\mu_n$	$\varepsilon_2 \cdot 10^3$
0.178	19.9	-3.1	2.2	1.76	-3.872
0.227	25.4	-1.3	3.0	0.667	-2.001

$\varepsilon_1^k$  — ultimate accumulated longitudinal strain;  
 $\varepsilon_2^k$  — ultimate accumulated lateral strain;  
 $\varepsilon_1^n$  — residual longitudinal strain;  
 $\varepsilon_2^n$  — residual lateral strain

По этим исходным данным на рис. 6 представлена полная картина упругой и остаточной деформации при  $C = 0.178$ . Здесь криволинейные диаграммы для продольной и поперечной деформации соответствуют активному нагружению до предела прочности; прямые линии, исходящие из начала координат до напряжения 392.26 МПа (до предела упругости), отвечают расчетным значениям этих деформаций, вычисленных по закону Гука при найденных авторами эксперимента константах  $E = 31\,381.28$  МПа,  $\nu = 0.24$  [21]. Линия разгрузки осевой деформации фактически является эмпирической, поскольку она параллельна установившемуся линейному упругому участку.

Это обстоятельство вытекает из сравнения расчетного значения остаточной деформации  $\varepsilon_1^{np}$  и ее значения  $\varepsilon_1^n$ , приведенного в табл. 2:

$$\varepsilon_1^{np} = \varepsilon_1^k - \varepsilon_1^{yk}, \quad \varepsilon_1^{yk} = \frac{\sigma_1^n}{E}(1 - 2C\nu). \quad (1)$$

Согласно (1), имеем  $\varepsilon_1^{np} = 2.4 \cdot 10^{-3}$ . Таким образом,  $\varepsilon_1^{np} > \varepsilon_1^n$ . Это означает, что величина  $\varepsilon_1^n$  авторами эксперимента определялась графически по указанному выше способу.

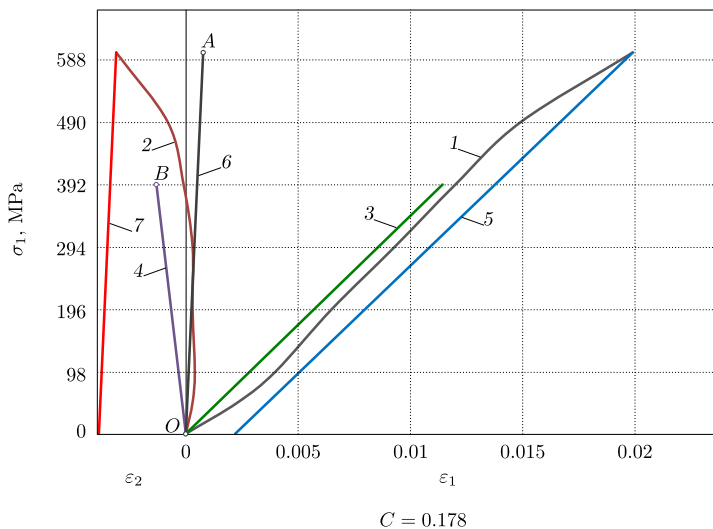


Рис. 6. Активное нагружение и разгрузка по схеме А. Н. Ставрогина: 1 — экспериментальная диаграмма продольной деформации; 2 — экспериментальная диаграмма поперечной деформации; 3 — расчетная продольная деформация по упругим константам из [21]; 4 — расчетная поперечная деформация по упругим константам из [21]; 5 — линия разгрузки продольной деформации, параллельная исходной расчетной упругой линии; 6 — эмпирическая упругая линия, касательная к экспериментальной диаграмме поперечной деформации; 7 — линия разгрузки поперечной деформации, параллельная эмпирической линии упругой поперечной деформации

[Figure 6. Loading and unloading curves by the A. N. Stavrogin's scheme: 1 — experimental stress-strain diagram (longitudinal strain); 2 — experimental stress-strain diagram (lateral strain); 3 — calculated stress-strain diagram (longitudinal strain) by elastic constants from [21]; 4 — calculated stress-strain diagram (lateral strain) by elastic constants from [21]; 5 — unloading curve for longitudinal strain parallel to the original elastic diagram; 6 — empirical elastic diagram tangent to the experimental lateral strain diagram; 7 — unloading curve for lateral strain parallel to the original elastic diagram]

Величина расчетной упругой поперечной деформации (определяемой по закону Гука), как видно из рис. 6 (линия  $OB$ ), не соответствует экспериментальной диаграмме. Поэтому, очевидно, измеряемая в опыте поперечная деформация до предела упругости была аппроксимирована линейной зависимостью (линия  $OA$ ), которая была использована для определения коэффициента остаточной поперечной деформации  $\mu_n$ . Если построить соответствующую линию разгрузки поперечной деформации (параллельно линии  $OA$ ) после достижения предела прочности, то получим, что при полной разгрузке значение поперечной деформации по модулю увеличивается по сравнению с ее значением, достигнутым на пределе прочности (поскольку  $\varepsilon_2^n$  больше по модулю, чем  $\varepsilon_2^k$ ). Такого парадокса не будет, если поперечную деформацию отсчитывать от нового начала координат, соответствующего установившемуся упругому характеру деформирования, как предложено в п. 3.

**5. Разделение на шаровую и девиаторную составляющие тензоров напряжений и тензоров деформаций.** Определение упругих констант материала можно производить также (3 способ) при рассмотрении диаграмм шаровых и девиаторных составляющих тензоров напряжений и деформаций.

Среднее напряжение  $p$  и среднюю деформацию  $\theta$  с учетом равенств  $\sigma_2 = \sigma_3$  и  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$  представим в виде

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{1}{3}\sigma_1(1 + 2C), \quad \theta = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_3).$$

Выразим компоненту девиатора деформации  $\varepsilon_1^d$  и компоненту девиатора напряжений  $\sigma_1^d$  через компоненты тензоров деформаций и напряжений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^d &= \varepsilon_1 - \theta = \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} = \frac{2}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3), \\ \sigma_1^d &= \sigma_1 - p = \sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{2}{3}(\sigma_1 - \sigma_3). \end{aligned}$$

Зависимости  $\varepsilon_1^d(\sigma_1^d)$  и  $\theta(p)$  для всех значений  $C$  (точки на графиках) приведены на рис. 7 и 8. Аппроксимация шаровой и девиаторной составляющих тензоров напряжений и деформаций линией тренда дает следующие соотношения:

$$\varepsilon_1^d = 3,365 \cdot 10^{-5} \sigma_1^d, \quad \theta = 1.428 \cdot 10^{-5} p.$$

Как видно из рис. 8, объемная деформация при всех видах напряженно-го состояния с достаточной достоверностью отражается линейной зависимостью. Это в нашем случае свидетельствует о правильности отражения как продольной, так и поперечной деформации, в том числе и при одноосном сжатии (которое выделено нами в отдельное рассмотрение при определении нового начала координат для анализа упругой деформации данной горной породы).

При сопоставлении девиаторной и шаровой составляющих тензора деформаций при одном и том же уровне напряжения  $\sigma_1$  определим модуль Юнга и коэффициента Пуассона:  $E = 36\,774.93$  МПа,  $\nu = 0.237$ . В табл. 3 приведены константы  $E$  и  $\nu$ , которые определены по трем вышеизложенным способам,

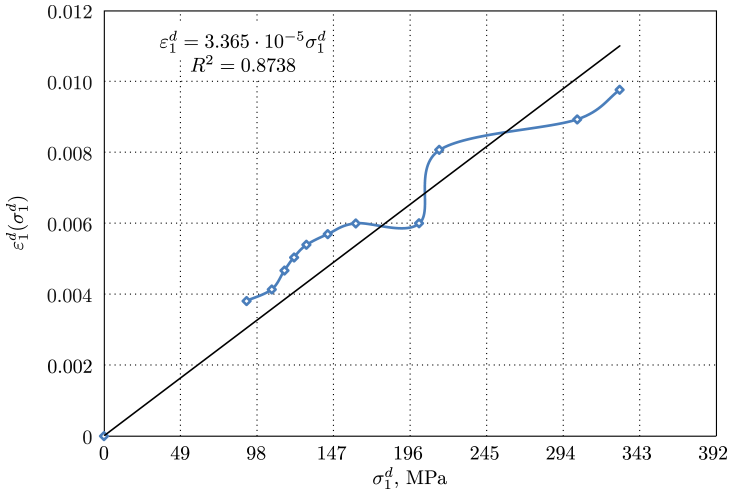


Рис. 7. Зависимость  $\varepsilon_1^d(\sigma_1^d)$  [Figure 7. The plot of dependence  $\varepsilon_1^d(\sigma_1^d)$ ]

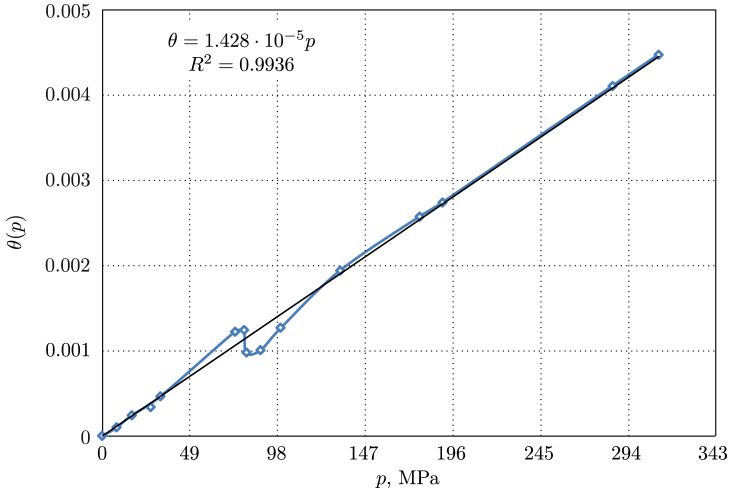


Рис. 8. Зависимость  $\theta(p)$  [Figure 8. The plot of dependence  $\theta(p)$ ]

Таблица 3

Расчетные значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона  
[Calculated values of Young's modulus and Poisson's ratio]

Methods of determining elastic constants	$E$ , МПа	$\nu$	Deviations from the mean for $E$ in percents	Deviations from the mean for $\nu$ in percents
the first method	33 342.61	0.25	-4.23	-4.7
the second method	34 323.28	0.30	-1.41	14.36
the third method	36 774.94	0.237	5.63	-9.66
the average value	34 813.61	0.262	—	—

и дано их среднее значение, использованное для окончательного сравнения расчетных диаграмм  $\sigma_1 - \varepsilon_1$  и  $\sigma_1 - \varepsilon_2$  с экспериментальными данными.

Достаточно удовлетворительное соответствие теоретических и скорректированных экспериментальных данных достигается при использовании значений упругих констант, усредненных по всем трем способам их определения. Это отражено на рис. 9.

Как предложено в [1], зависимость  $\theta(p)$  целесообразно использовать для уточнения значения предела упругости, которое, в первом приближении, находится по диаграмме  $\sigma_1 - \varepsilon_1$ . Отклонение скорректированной экспериментальной зависимости  $\theta(p)$  при различных значениях  $C$  от расчетной линии гидростатического сжатия указывает на возникновение неупругой деформации, т.е. на достижение предела упругости. Это обстоятельство продемонстрировано на рис. 10. Здесь значения пределов упругости  $\sigma_{1y}$ , представлен-

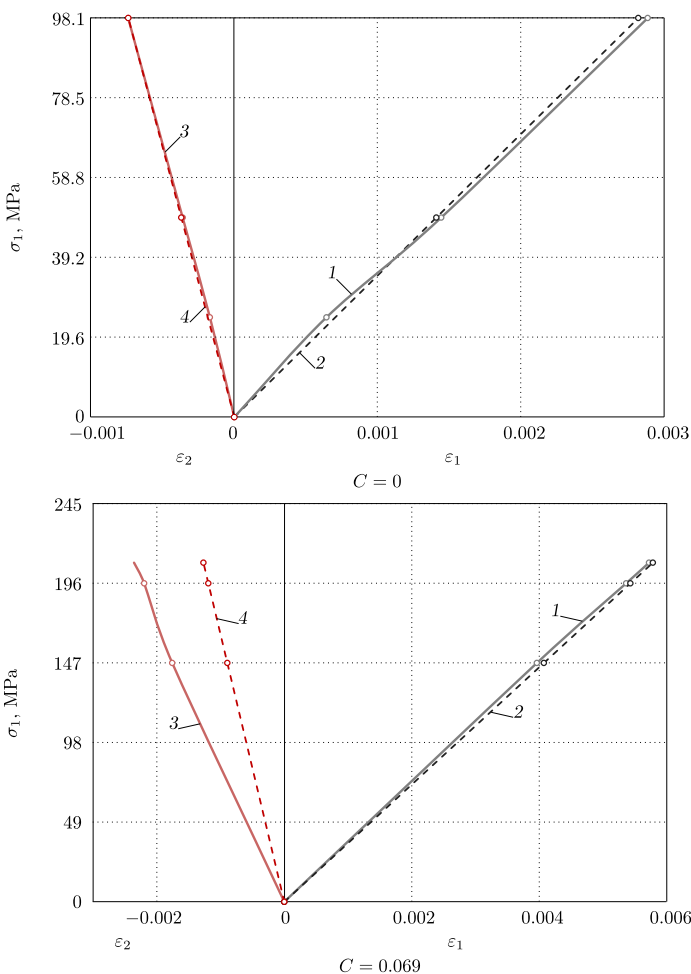
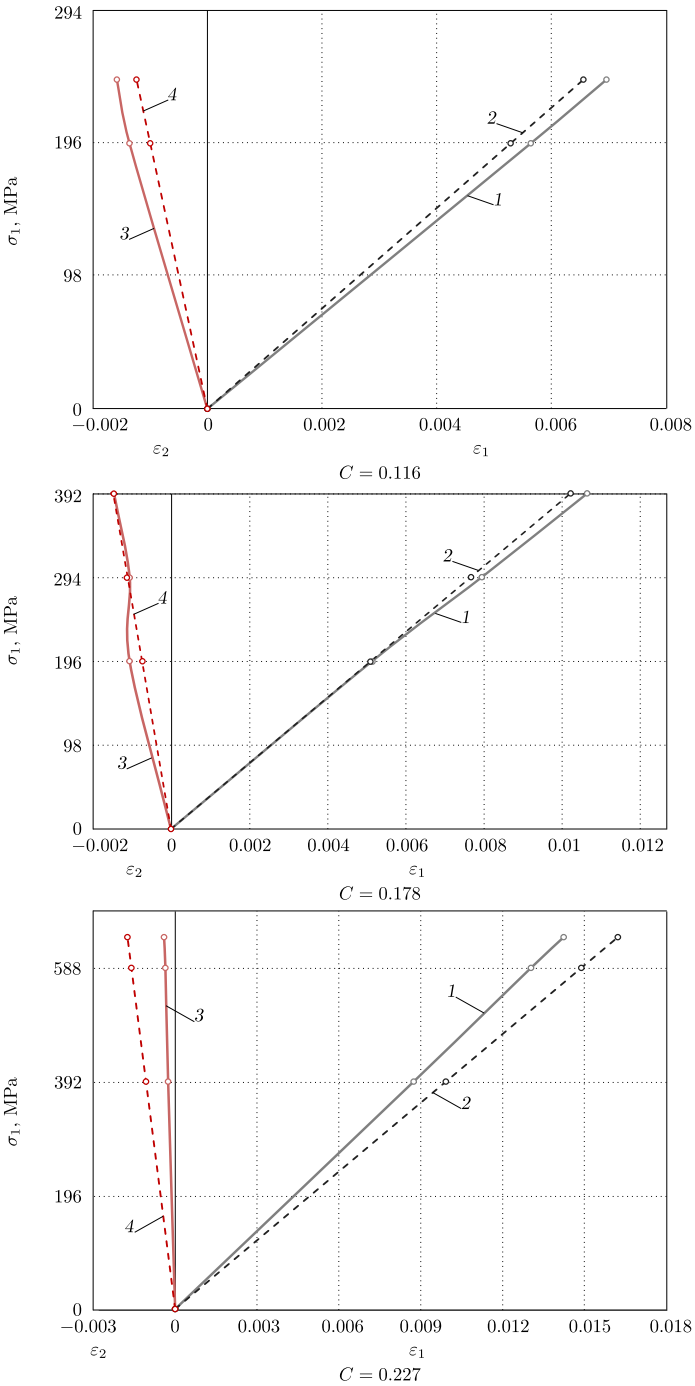


Рис. 9. Сопоставление теоретических и скорректированных экспериментальных диаграмм деформации: 1 — продольная скорректированная деформация; 2 — поперечная скорректированная деформация; 3 — расчетная продольная деформация; 4 — расчетная поперечная деформация

[Figure 9. Comparison of theoretical and corrected experimental elastic stress-strain diagrams: 1 — corrected longitudinal strain; 2 — corrected lateral strain; 3 — calculated longitudinal strain; 4 — calculated lateral strain]



Окончание рис. 9 [The end of the Figure 9]

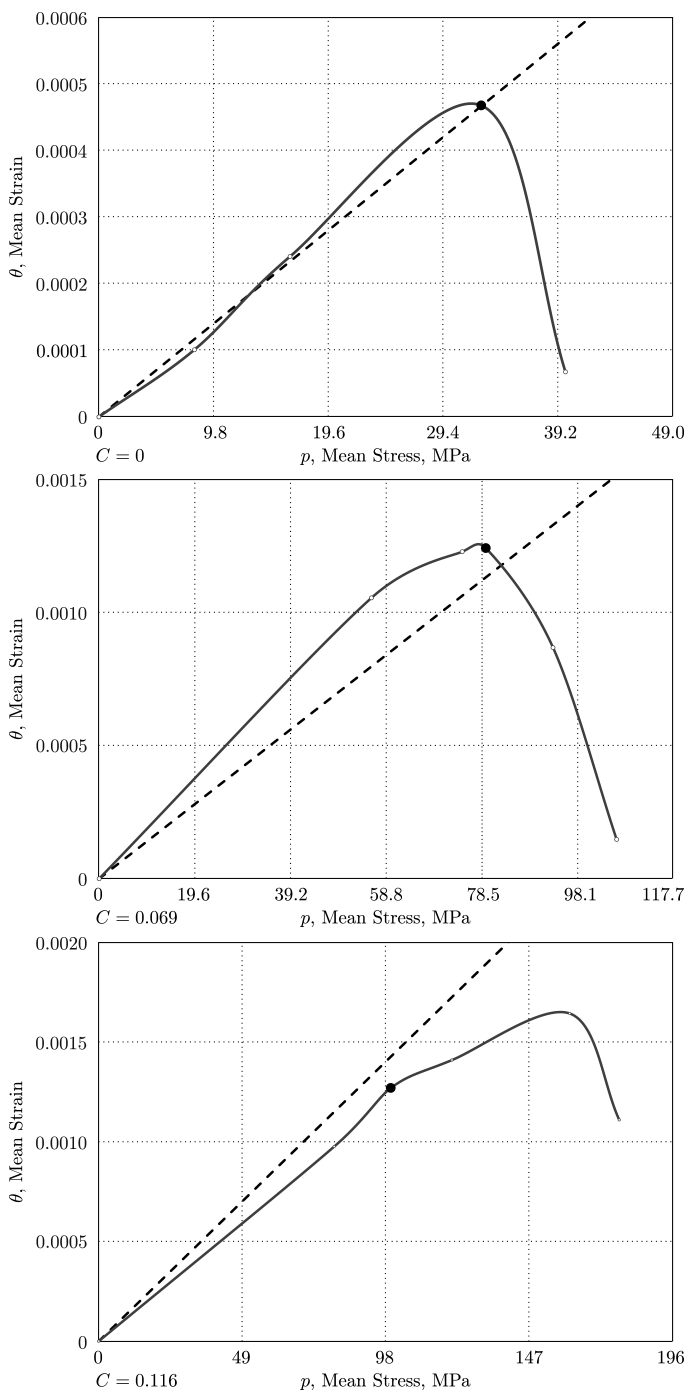
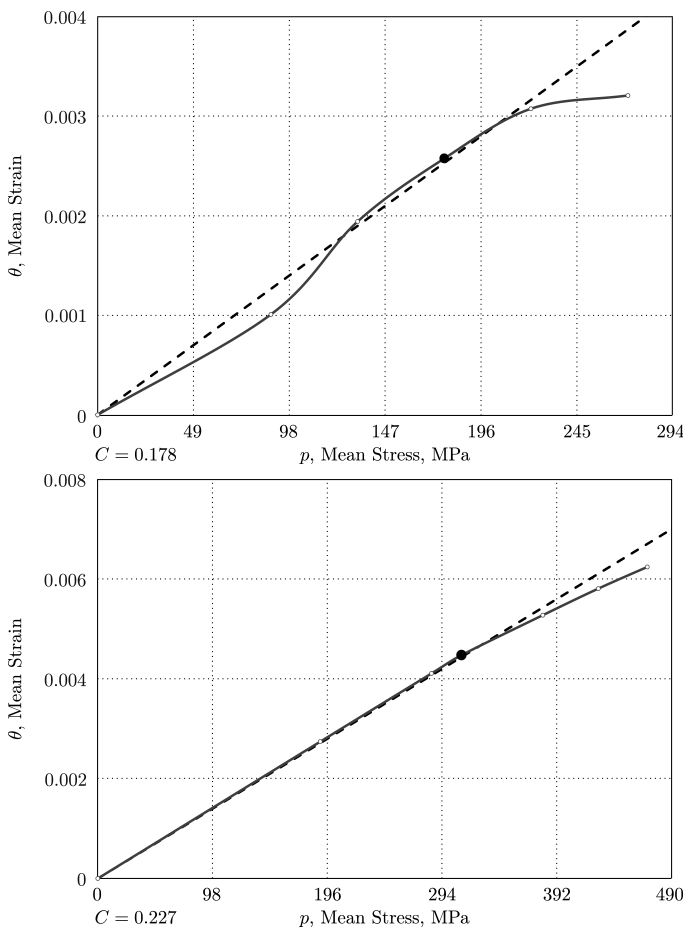


Рис. 10. Сопоставление теоретических и скорректированных экспериментальных диаграмм деформации (сплошная линия — скорректированная экспериментальная диаграмма; пунктирная линия — теоретическая диаграмма, точка — предел упругости)

[Figure 10. Comparison of theoretical and corrected experimental stress-strain diagrams (solid line — corrected experimental diagram; dashed line — theoretical diagram; “bullet point” — point of elastic limit)]



Окончание рис. 10 [The end of the Figure 10]

ные в [1, прил. 2] показаны отдельными точками. Из приведенных данных видно, что величины  $\sigma_{1y}$  (с учетом разброса экспериментальных данных) действительно соответствуют данному способу их определения.

Отметим, что аналогичные результаты получены и при обработке экспериментальных данных для песчаника П-026 и песчаника, не опасного по выбросам.

**Заключение.** Представленный метод определения упругих констант горных пород применительно к песчаникам достаточно хорошо соответствует экспериментальным данным в пределах их разброса и устраняет существующую неопределенность при выделении упругого начального участка диаграммы деформации при трехосном сжатии цилиндрических образцов.

**Конкурирующие интересы.** Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

**Авторский вклад и ответственность.** Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

**Финансирование.** Исследование выполнялось без финансирования.



## Библиографический список

1. Ставрогин А. Н., Протосеня А. Г. *Пластичность горных пород*. М.: Недра, 1979. 305 с.
2. Карташев Ю. М., Матвеев Б. В., Михеев Г. В., Фадеев А. Б. *Прочность и деформируемость горных пород*. М.: Недра, 1979. 262 с.
3. *An introduction to rock mechanics* / ed. H. Bock. Townsville, Q.: Dept. of Civil and Systems Engineering, James Cook University of North Queensland, 1978. 342 pp.
4. Ставрогин А. Н., Протосеня А. Г. *Прочность горных пород и устойчивость выработок на больших глубинах*. М.: Недра, 1985. 271 с.
5. Стефанов Ю. П. Численное моделирование деформирования разрушения горных пород на примере расчета поведения образцов песчаника // *Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых*, 2008. № 1. С. 73–83.
6. Paterson M. S., Wong T. *Experimental Rock Deformation-The Brittle Field*. Berlin: Springer, 2005. x+348 pp. doi: [10.1007/b137431](https://doi.org/10.1007/b137431).
7. Kachanov M. On the Effective Elastic Properties of Cracked Solids – Editor’s Comments // *Int. J. Fract.*, 2007. vol. 146, no. 4. pp. 295–299. doi: [10.1007/s10704-007-9170-6](https://doi.org/10.1007/s10704-007-9170-6).
8. Китаева Д. А., Пазылов Ш. Т., Рудаев Я. И. О применении методов нелинейной динамики в механике материалов // *Вестник Пермского государственного технического университета. Математическое моделирование систем и процессов*, 2007. № 15. С. 46–70.
9. Шваб А. А. Экспериментально-аналитический метод определения характеристик квазиоднородного материала по упругопластическому анализу экспериментальных данных // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. № 2(27). С. 65–71. doi: [10.14498/vsgtu973](https://doi.org/10.14498/vsgtu973).
10. Zhang J. C., Zhou S. H., Xu S. H., Fang L. G. Evolution of the elastic properties of a bedded argillite damaged in cyclic triaxial tests // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2013. vol. 58. pp. 103–110. doi: [10.1016/j.ijrmmms.2012.09.008](https://doi.org/10.1016/j.ijrmmms.2012.09.008).
11. Сукнёв С. В., Фёдоров С. П. Методы определения упругих свойств горных пород // *Наука и образование*, 2014. № 1(73). С. 18–24.
12. DIN EN 14580:2005–07. *Prüfverfahren für Naturstein — Bestimmung des statischen Elastizitätsmoduls* [Natural stone test methods — Determination of static elastic modulus]. Berlin: Deutsches Institut für Normung, 2005. 15 pp. (In German)
13. Сукнёв С. В. Определение модуля упругости горных пород при сжатии // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*, 2017. Т. 83, № 12. С. 52–57. doi: [10.26896/1028-6861-2017-83-12-52-57](https://doi.org/10.26896/1028-6861-2017-83-12-52-57).
14. Małkowski P., Ostrowski L. The Methodology for the Young Modulus Derivation for Rocks and Its Value // *Procedia Engineering*, 2017. vol. 191. pp. 134–141. doi: [10.1016/j.proeng.2017.05.164](https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.05.164).
15. Peng J., Cai M, Liu D., He M., Zhou Ch. A Phenomenological Model of Brittle Rocks under Uniaxial Compression // *International Journal of Georesources and Environment*, 2015. vol. 1, no. 2. pp. 53–62. doi: [10.15273/ijge.2015.02.007](https://doi.org/10.15273/ijge.2015.02.007).
16. Mogi K. *Experimental rock mechanics*. London: CRC Press, 2007. 375 pp. doi: [10.1201/9780203964446](https://doi.org/10.1201/9780203964446).
17. Комарцов Н. М., Кулагина М. А., Рычков Б. А. О трактовке модуля упругости горных пород // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 3. С. 487–503. doi: [10.14498/vsgtu1604](https://doi.org/10.14498/vsgtu1604).
18. Аннин Б. Д., Остробаблин Н. И. Анизотропия упругих свойств материалов // *Прикладная механика и техническая физика*, 2008. Т. 49, № 6. С. 131–151.
19. Рычков Б. А. Концепция скольжения и механика ортотропного материала // *Изв. РАН. МТТ*, 1996. № 1. С. 70–79.
20. Рычков Б. А. О деформационном упрочнении горных пород // *Изв. РАН. МТТ*, 1999. № 2. С. 115–124.
21. Ставрогин А. Н., Георгиевский В. С. *Каталог механических свойств горных пород*. Л.: ВНИМИ, 1972. 267 с.

MSC: 74L10

## Determination of elastic constants of rocks

*M. A. Kulagina, B. A. Rychkov, Yu. Yu. Stepanova*Kyrgyz-Russian Slavic University named after B. N. Eltsin,  
44, Kievskaya st., Bishkek, 720000 Kyrgyz Republic.


### Abstract

The A. N. Stavrogin's experimental data are observed during triaxial compression of sandstone samples under proportional loading according to T. Karman's scheme. Sandstones have a sufficiently high porosity in the initial state, so their deformation within elasticity has the following peculiar properties. When the cylindrical sample is uniaxially compressed at small initial stresses (of the order of  $0.05 \div 0.15$  of the elastic limit), a nonlinear part is observed on the longitudinal strain diagram, which is associated with the material densification occurring on this section. This circumstance causes a certain difficulty in determining the modulus of elasticity. An elaboration of the method for determination the elastic constants (Young's modulus and Poisson's ratio) are proposed taking into account the initial deformation diagram's special feature, which was mentioned.

Earlier A. N. Stavrogin proposed to consider on the longitudinal strain diagram a linear part from the indicated initial stress to the conditional elastic limit. The elastic modulus is determined by this part of the diagram. Linear extrapolation of this segment to zero stress level provides a virtually new point of origin for the longitudinal strain under consideration. In this paper, it is shown that under triaxial compression of a cylindrical specimen, the longitudinal strain (satisfying Hooke's law) can be measured from the same new point of origin, which is established under uniaxial compression. In this case, the lateral strain of the sample is considered in the such range of stress variation, at which the increment of the axial stress causes a negative increment in the lateral strain. Based on the initial experimental values of longitudinal and lateral strain, which were adjusted by this method, the conditional elastic limit was determined.

**Keywords:** sandstone, triaxial compression, compaction and strain hardening of porous material, generalized Hooke's law, nonlinear nature of the stress-strain diagram, strain tensor.


## Research Article


 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)


### Please cite this article in press as:

Kulagina M. A., Rychkov B. A., Stepanova Yu. Yu. Determination of elastic constants of rocks, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 2, pp. 284–303. doi: [10.14498/vsgtu1595](https://doi.org/10.14498/vsgtu1595) (In Russian).

### Authors' Details:

*Margarita A. Kulagina*  <https://orcid.org/0000-0001-7979-7881>  
Postgraduate Student; e-mail: [kulagina\\_m.a@mail.ru](mailto:kulagina_m.a@mail.ru)

*Boris A. Rychkov*  <https://orcid.org/0000-0001-7408-1657>  
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; e-mail: [rychkovba@mail.ru](mailto:rychkovba@mail.ru)

*Yulya Yu. Stepanova*  <https://orcid.org/0000-0001-5104-3383>  
Master Student; e-mail: [stepanova\\_yulya\\_1995@mail.ru](mailto:stepanova_yulya_1995@mail.ru)

Received: 22<sup>nd</sup> December, 2017 / Revised: 25<sup>th</sup> March, 2019 /

Accepted: 10<sup>th</sup> June, 2019 / First online: 24<sup>th</sup> June, 2019

---

**Competing interests.** We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

**Authors' contributions and responsibilities.** Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

**Funding.** This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

## References

1. Stavrogin A. N., Protosenya A. G. *Plastichnost' gornykh porod* [Plasticity of rocks]. Moscow, Nedra, 1979, 305 pp. (In Russian)
2. Kartashev Yu. M., Matveev B. V., Mikheev G. V., Fadeev A. B. *Prochnost' i deformiruyemost' gornykh porod* [Strength and deformability of rock]. Moscow, Nedra, 1979, 262 pp. (In Russian)
3. *An introduction to rock mechanics*, ed. H. Bock. Townsville, Q., Dept. of Civil and Systems Engineering, James Cook University of North Queensland, 1978, 342 pp.
4. Stavrogin A. N., Protosenya A. G. *Prochnost' gornykh porod i ustoychivost' vyrabotok na bol'shikh glubinakh* [The strength of rocks and the stability of workings at great depths]. Moscow, Nedra, 1985, 271 pp. (In Russian)
5. Stefanov Yu. P. Numerical modeling of deformation and failure of sandstone specimens, *J. Min. Sci.*, 2008, vol. 44, no. 1, pp. 64–72. doi: [10.1007/s10913-008-0006-1](https://doi.org/10.1007/s10913-008-0006-1).
6. Paterson M. S., Wong T. *Experimental Rock Deformation-The Brittle Field*. Berlin, Springer, 2005, x+348 pp. doi: [10.1007/b137431](https://doi.org/10.1007/b137431).
7. Kachanov M. On the Effective Elastic Properties of Cracked Solids – Editor's Comments, *Int. J. Fract.*, 2007, vol. 146, no. 4, pp. 295–299. doi: [10.1007/s10704-007-9170-6](https://doi.org/10.1007/s10704-007-9170-6).
8. Kitaeva D. A., Pazylov Sh. T., Rudaev Ya. I On applications of nonlinear dynamics methods for mechanics of materials, *Vestn. Perm. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Matem. Model. Sistem Protessov*, 2007, no. 15, pp. 46–70 (In Russian).
9. Schwab A. A. Experimental analytical method for quasi-homogeneous material characteristics determination based on elasto-plastic analysis of experimental data, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2012, no. 2(27), pp. 65–71 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu973](https://doi.org/10.14498/vsgtu973).
10. Zhang J. C., Zhou S. H., Xu S. H., Fang L. G. Evolution of the elastic properties of a bedded argillite damaged in cyclic triaxial tests, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2013, vol. 58, pp. 103–110. doi: [10.1016/j.ijrmms.2012.09.008](https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2012.09.008).
11. Suknev S. V., Fedorov S. P. Methods of determination of rock elastic properties, *Nauka i obrazovanie*, 2014, no. 1(73), pp. 18–24 (In Russian).
12. DIN EN 14580:2005–07. *Prüfverfahren für Naturstein — Bestimmung des statischen Elastizitätsmoduls* [Natural stone test methods — Determination of static elastic modulus]. Berlin, Deutsches Institut für Normung, 2005, 15 pp. (In German)
13. Suknev S. V. Determination of the modulus of elasticity of rocks upon compression, *Industrial Laboratory. Diagnostics of Materials*, 2017, vol. 83, no. 12, pp. 52–57 (In Russian). doi: [10.26896/1028-6861-2017-83-12-52-57](https://doi.org/10.26896/1028-6861-2017-83-12-52-57).
14. Małkowski P., Ostrowski Ł. The Methodology for the Young Modulus Derivation for Rocks and Its Value, *Procedia Engineering*, 2017, vol. 191, pp. 134–141. doi: [10.1016/j.proeng.2017.05.164](https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.05.164).

15. Peng J., Cai M., Liu D., He M., Zhou Ch. A Phenomenological Model of Brittle Rocks under Uniaxial Compression, *International Journal of Georesources and Environment*, 2015, vol. 1, no. 2, pp. 53–62. doi: [10.15273/ijge.2015.02.007](https://doi.org/10.15273/ijge.2015.02.007).
16. Mogi K. *Experimental rock mechanics*. London, CRC Press, 2007, 375 pp. doi: [10.1201/9780203964446](https://doi.org/10.1201/9780203964446).
17. Komartsov N. M., Kulagina M. A., Rychkov B. A. On the interpretation of rocks elasticity modulus, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 3, pp. 487–503 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu1604](https://doi.org/10.14498/vsgtu1604).
18. Annin B. D., Ostrosablin N. I. Anisotropy of elastic properties of materials, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2008, vol. 49, no. 6, pp. 998–1014. doi: [10.1007/s10808-008-0124-1](https://doi.org/10.1007/s10808-008-0124-1).
19. Rychkov B. A. The concept of slipping and mechanics of orthotropic material, *Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk. Mechanics of Solids*, 1996, no. 1, pp. 70–79 (In Russian).
20. Rychkov B. A. On strain hardening of rock materials, *Mechanics of Solids*, 1999, vol. 34, no. 2, pp. 97–104.
21. Stavrogin A. N., Georgievskii V. S. *Katalog mekhanicheskikh svoistv gornykh porod* [Catalog of mechanical properties of rocks]. Leningrad, VNIMI, 1972, 267 pp. (In Russian)