



УДК 539.37

## Анализ возможностей описания влияния гидростатического давления на кривые ползучести и коэффициент поперечной деформации реономных материалов в рамках линейной теории вязкоупругости

*А. В. Хохлов*



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,  
Научно-исследовательский институт механики,  
Россия, 119192, Москва, Мичуринский проспект, 1.

### Аннотация

Исследуются арсенал возможностей и индикаторы границы области применимости линейного интегрального определяющего соотношения вязкоупругости Больцмана–Вольтерры с двумя произвольными материальными функциями (сдвиговой и объемной ползучести) для изотропных реономных материалов, пренебрегающего влиянием шаровой и девиаторной частей тензоров напряжений и деформаций друг на друга и влиянием их третьих инвариантов. Аналитически изучены общие свойства семейств кривых объемной, продольной и поперечной ползучести и коэффициента поперечной деформации («коэффициента Пуассона»), порождаемых этим соотношением при одноосном нагружении постоянной нагрузкой в сочетании с постоянным гидростатическим давлением, и их зависимость от качественных характеристик функций ползучести и уровней осевого напряжения и давления.

Показано, что объемная ползучесть и давление могут существенно изменить качественное поведение кривых осевой и поперечной ползучести и коэффициента Пуассона. Доказано, что линейная теория вязкоупругости способна моделировать немонотонное изменение и знакопеременность поперечной деформации и коэффициента Пуассона даже при нулевом давлении, а осевой деформации — при достаточно большом давлении; исследованы условия наличия у них точек экстремума и перегиба. Исследованы выражения для коэффициента Пуассона и параметра вида деформированного состояния через отношение функций ползучести, время и отношение давления к осевому напряжению. Получены общие точные оценки для диапазона изменения коэффициента Пуассона, условия его монотонности и немонотонности в зависимости от времени и критерий его отрицательности.

### Научная статья

  Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

### Образец для цитирования

Хохлов А. В. Анализ возможностей описания влияния гидростатического давления на кривые ползучести и коэффициент поперечной деформации реономных материалов в рамках линейной теории вязкоупругости // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 2. С. 304–340. doi: [10.14498/vsgtu1654](https://doi.org/10.14498/vsgtu1654).

### Сведения об авторе

*Андрей Владимирович Хохлов*  <https://orcid.org/0000-0002-9212-2579>

кандидат технических наук; ведущий научный сотрудник; лаб. упругости и пластичности; e-mail: [andrey-khokhlov@ya.ru](mailto:andrey-khokhlov@ya.ru)

В результате анализа обнаружен ряд характерных общих свойств семейств кривых ползучести и зависимости коэффициента Пуассона от времени и относительной величины давления, которые удобно проверять в испытаниях материалов и использовать как индикаторы границы области линейного поведения (индикаторы неприменимости линейной теории вязкоупругости) по данным серии испытаний материала на ползучесть при совместном действии растягивающей силы и гидростатического давления. Исследованы специфические свойства кривых ползучести, порождаемых линейной теорией вязкоупругости в сочетании с предположением об упругом изменении объема, и соответствующие индикаторы неприменимости подобной модели (с одной материальной функцией).

**Ключевые слова:** наследственность, объемная ползучесть, сдвиговая и объемная функции ползучести, кривые осевой и поперечной ползучести, коэффициент поперечной деформации, влияние среднего напряжения, параметр вида деформированного состояния, отрицательность и немонотонность коэффициента Пуассона, индикаторы границы области линейности, идентификация.

Получение: 13 октября 2018 г. / Исправление: 12 мая 2019 г. /

Принятие: 10 июня 2019 г. / Публикация онлайн: 8 июля 2019 г.

---

**Введение.** Анализ большого объема данных механических испытаний, микроскопии и рентгенографии разнообразных (даже изначально изотропных) материалов показывает, что изменение объема при нагружении, объемная ползучесть и релаксация, вид напряженно-деформированного состояния и его эволюция, влияние среднего напряжения и его истории на осевые и сдвиговые деформации и связанные с ними термомеханические эффекты весьма существенны при описании деформирования и прочности многих реономных материалов [1–54], а наложение высокого всестороннего (гидростатического) давления оказывает сильное воздействие на физические и механические свойства большинства материалов, а также на их структуру и фазовый состав (подробнее см. обзоры в [1–6, 55]). На макроуровне они заметно влияют на проявление свойств материалов в одноосных испытаниях, на кривые релаксации и ползучести при растяжении-сжатии и сдвиге, кривые длительной прочности, кривые нагружения с постоянной скоростью и циклического нагружения. У подавляющего большинства материалов с ростом давления возрастают пластичность (предельная деформация при разрушении и длина площадки текучести при деформировании с постоянной скоростью), касательный модуль (жесткость), предел текучести, предел прочности на растяжение, длительная прочность, коэффициент поперечной деформации («коэффициент Пуассона»), модуль релаксации, времена релаксации и вязкость, уменьшаются скорости ползучести и релаксации и податливость при ползучести. Регистрация и адекватный учет подобных эффектов (или пренебрежение ими) влияют на результаты обработки и интерпретации данных испытаний, достоверность определения механических свойств материалов, оценку скорости накопления повреждений и долговечности элементов конструкций. К материалам, у которых эти эффекты влияния среднего напряжения, сжимаемости и объемной ползучести ярко выражены (даже при малых деформациях),

относятся, прежде всего, многие полимеры (полиэтилены, полипропилены, фторопласты и т.п.), дисперсно наполненные полимеры (твердые топлива, асфальтобетоны, ударопрочный полистирол, АБС-пластики), прессованные порошковые композиты, сплавы, металлические и полимерные пены, льды, грунты, горные породы и т.п. [1–11, 16–29, 31, 35, 36, 38–54]. Для них стандартные гипотезы (сильно упрощающие решения краевых задач и расчеты элементов конструкций) об объемной несжимаемости или упругой связи объемной деформации со средним напряжением (об отсутствии объемной ползучести), о независимости этой связи от второго (и третьего) инварианта тензора напряжения и вида напряженного состояния, о постоянстве коэффициента Пуассона оказываются непригодными [2–6, 11, 18–24, 26, 27, 31, 37, 40, 41, 44], для таких материалов особенно сложно найти (маркировать) границу области линейного поведения.

Коэффициент поперечной деформации (КПД)  $\nu = -\varepsilon_{\perp}/\varepsilon_{\parallel}$  реономных материалов при одноосном нагружении не постоянен, а зависит от времени (от продольной деформации  $\varepsilon_{\parallel}(t)$ ) и программы нагружения. Зависимости поперечной и объемной деформаций ( $\varepsilon_{\perp}$  и  $\theta$ ) от времени и осевой деформации, поведение и диапазоны значений КПД для упомянутых классов (изотропных) реономных материалов весьма разнообразны даже в испытаниях на ползучесть при постоянной нагрузке или на релаксацию [1–54]. У большинства металлов, многих стекол, полимеров (например полиэтиленов высокой плотности, эпоксидных смол, ПММА и т.п.) и порошковых композитов наблюдается монотонное возрастание  $\nu$  с ростом  $\varepsilon_{\parallel}(t)$  [12, 13, 25, 33, 38, 39] (и порой — убывание объемной деформации при растяжении). У многих реономных материалов, как достаточно хрупких, так и высокоэластичных (твердое топливо, асфальтобетон, АБС-пластики, чугун и т.п.), наблюдается убывание  $\nu(t)$ , связываемое обычно с необратимым изменением объема при растяжении или сжатии [2, 5, 6, 24, 31, 37, 40, 41, 44]. В последние три десятилетия обнаружены, активно конструируются и исследуются новые материалы (как правило, упругие) с отрицательным КПД (auxetics) [45–54]. У некоторых материалов объемная деформация и КПД меняются немонотонно и меняют знак [5, 6, 19, 42, 43, 49].

Объемную ползучесть, изменение КПД и вида напряженного или деформированного состояния и типичные механические эффекты, связанные с ними, следует учитывать при обработке и интерпретации кривых испытаний наследственных материалов (в частности методами индентирования) и при выборе и идентификации определяющего соотношения (ОС) для моделирования их поведения. Для выбора того или иного ОС для описания поведения некоторого материала (и дальнейшего совершенствования и обобщения ОС) важно знать, какие механические эффекты оно способно моделировать и при каких требованиях к материальным функциям, в частности, какие из упомянутых эффектов, связанных с объемной и поперечной деформациями и влиянием всестороннего давления. Для этого необходимо системное *аналитическое* исследование общих свойств кривых релаксации, ползучести и деформирования, которые порождает применяемое ОС с произвольными материальными функциями при разных типовых программах нагружения, и их зависимости от параметров программ нагружения и характеристик материальных функций. В частности, системное исследование арсенала возможностей интеграль-

ного ОС Больцмана—Вольтерры с произвольными функциями ползучести (круга моделируемых и немоделируемых эффектов, сфер влияния материальных функций и т.п.) и удобных для проверки по данным тех или иных испытаний материалов индикаторов его (не)применимости. Ведь оно играет роль своеобразного «окуляра», «эталонной» сетки реперных точек, отсчетной базы для сопоставления, по отношению к которой естественно изучать эффекты нелинейного поведения материалов (отклонения от предсказаний линейной модели как начального приближения), наблюдаемые в испытаниях материалов и описываемые различными нелинейными ОС (но не описываемые линейными). Нередко случается, что нелинейности поведения материала приписывают эффекты [56–63], адекватно описываемые в рамках линейной теории [64–67], вытекающие лишь из наличия наследственности и присущие *всем* (почти *всем*) линейно вязкоупругим материалам (при достаточно малых деформациях и скоростях). Точное знание арсенала возможностей и границ области применимости линейной теории вязкоупругости и имманентных свойств порождаемых ею базовых теоретических кривых, вытекающих из постулатов наследственности, линейности и инвариантности относительно сдвигов по времени интегральных операторов, связывающих истории напряжений и деформаций, необходимо для грамотного моделирования, выбора или построения более сложных и точных моделей поведения реономных материалов, использующих линейную теорию наследственности и обобщающих ее в определенных аспектах, для их идентификации, аттестации и сопоставления и, в целом, для совершенствования расчетных схем и методов расчета конструкций.

Данная статья продолжает цикл работ [64–71, 55] (и др.) по системному исследованию комплекса моделируемых реологических эффектов и границ области применимости линейного определяющего соотношения (ОС) вязкоупругости Больцмана—Вольтерры:

$$\varepsilon_{ij}(t) = e_{ij} + \varepsilon_0 \delta_{ij}, \quad e_{ij}(t) = 1.5 \Pi s_{ij}(t), \quad \theta = \Pi_0 \sigma_0, \quad (1)$$

$$\sigma_0(t) = \sigma_{ii}(t)/3, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}, \quad \theta(t) = 3\varepsilon_0 = \varepsilon_{ii}(t),$$

$$\Pi y = \int_0^t \Pi(t - \tau) dy(\tau), \quad \Pi_0 y = \int_0^t \Pi_0(t - \tau) dy(\tau), \quad t > 0, \quad (2)$$

с двумя произвольными материальными функциями  $\Pi(t)$  и  $\Pi_0(t)$  (функциями сдвиговой и объемной ползучести) [2, 72–87] и физически нелинейного ОС

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{3}{2} \Phi(L(t)) \sigma(t)^{-1} [\sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}] + \frac{1}{3} \Phi_0(L_0(t)) \delta_{ij}, \quad (3)$$

$$L(t) = \Pi \sigma, \quad L_0(t) = \Pi_0 \sigma_0,$$

с четырьмя произвольными материальными функциями  $\Pi(t)$ ,  $\Phi(x)$ ,  $\Pi_0(t)$ ,  $\Phi_0(x)$ . ОС (3) — один из вариантов распространения на трехосный случай [88, 90] нелинейного уравнения наследственности

$$\varphi(\varepsilon(t)) = \int_0^t \Pi(t - \tau) d\sigma(\tau),$$

предложенного Ю. Н. Работновым [89, 90] в качестве обобщения одноосного линейного ОС (1) путем введения второй материальной функции  $\varphi(u)$  (подробную библиографию по этим темам см. в работах [65–71]).

ОС (1) и (3) описывают процессы изотермического деформирования нестареющих изотропных вязкоупругих сред; они связывают истории изменения тензоров (малых) деформаций  $\varepsilon(t)$  и напряжений  $\sigma(t)$  в произвольной точке тела в предположении отсутствия взаимного влияния шаровых и девиаторных частей тензоров  $\mathbf{e} = \varepsilon - \varepsilon_0 \mathbf{I}$  и  $\mathbf{s} = \sigma - \sigma_0 \mathbf{I}$  (т.е. независимости объемной деформации  $\theta(t)$  от касательных напряжений, а сдвиговых деформаций — от среднего напряжения  $\sigma_0(t)$ ) и пренебрегая влиянием третьих инвариантов тензоров (или их параметров Лоде) [2, 73–76]. Функции ползучести (ФП)  $\Pi(t)$ ,  $\Pi_0(t)$  в ОС (1) предполагаются положительными, дифференцируемыми и возрастающими на  $(0; \infty)$  [72, 73, 75–79, 86, 87] и выпуклыми вверх [2, 74, 64–67], входные процессы  $\sigma(t)$  — кусочно-гладкими при  $t > 0$ , а время и компоненты тензора напряжений — безразмерными. Множитель  $3/2$  вынесен из ФП  $\Pi(t)$  в (1) для удобства сравнения с результатами анализа нелинейного ОС (3) [55].

Конкретные задачи данной статьи — анализ общих качественных свойств семейств кривых объемной, осевой и поперечной ползучести и КПД («коэффициента Пуассона»), которые порождает ОС (1) с произвольными ФП  $\Pi(t)$ ,  $\Pi_0(t)$  при одноосном нагружении постоянной нагрузкой и одновременном приложении постоянного всестороннего давления:

$$\sigma_{11}(t) = \bar{\sigma}h(t), \quad p(t) = \bar{p}h(t), \quad \bar{\sigma} > 0, \quad \bar{p} \geq 0, \quad (4)$$

где  $h(t)$  — функция Хевисайда,  $\bar{\sigma}$  и  $\bar{p}$  — уровни осевого напряжения и давления, а также их сопоставление со свойствами кривых ползучести при одноосном нагружении (при  $\bar{p} = 0$ ) и с типичными свойствами экспериментальных кривых реономных материалов и поиск индикаторов неприменимости ОС (1) (индикаторов границы области линейности).

**1. Ограничения на материальные функции линейного ОС (1).** Обращение ОС (1), как известно [2, 72–87], имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_0 = \mathbf{R}_0 \theta, \quad s_{ij}(t) = \frac{2}{3} \mathbf{R} e_{ij}, \quad \mathbf{R} y := \int_0^t R(t - \tau) dy(\tau), \\ \mathbf{R}_0 y := \int_0^t R_0(t - \tau) dy(\tau), \quad t > 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где функции релаксации  $R(t)$  и  $R_0(t)$  связаны с ФП  $\Pi$  и  $\Pi_0$  интегральными уравнениями

$$\int_0^t R(t - \tau) \Pi(\tau) d\tau = t, \quad \int_0^t R_0(t - \tau) \Pi_0(\tau) d\tau = t, \quad t > 0,$$

выражающими условия взаимной обратности операторов:  $\mathbf{P}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{P} = \mathbf{I}$  и  $\mathbf{P}_0\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_0\mathbf{P}_0 = \mathbf{I}$ . Функции ползучести и релаксации  $\Pi(t)$ ,  $\Pi_0(t)$ ,  $R(t)$ ,  $R_0(t)$  в ОС (1), (5) предполагаются положительными и дифференцируемыми на  $(0; \infty)$ , функции  $\Pi$  и  $\Pi_0$  — возрастающими и выпуклыми вверх [2, 74, 64–67], а  $R$  и  $R_0$  — убывающими и выпуклыми вниз на  $(0; \infty)$ ,  $R$  и  $R_0$  могут иметь интегрируемую особенность или  $\delta$  — сингулярность в точке  $t = 0$  (слагаемое  $\eta\delta(t)$ , где  $\eta > 0$ ,  $\delta(t)$  — дельта-функция). Из этих условий следует, в частности, существование пределов  $R(+\infty) = \inf R(t) \geq 0$ ,  $R(0) = \sup R(t) > 0$

( $y(0) := y(0+)$  — обозначение для предела функции  $y(t)$  справа в точке  $t = 0$ ;  $R(0) = +\infty$ , если  $R(t)$  не ограничена сверху) и  $\Pi(0) = \inf \Pi(t) \geq 0$ . Если  $\Pi(0) \neq 0$  и  $\Pi_0(0) \neq 0$  (такие модели будем называть регулярными), то  $R(0) = 1/\Pi(0) < \infty$  и  $R_0(0) = 1/\Pi_0(0) < \infty$  (т.е. мгновенный модуль сдвига  $2G = \frac{2}{3}R(0)$  и объемный модуль  $K = R_0(0)$  диаграмм деформирования с постоянной скоростью конечны) и на линейном пространстве *непрерывных* кусочно гладких при  $t \geq 0$  функций операторы ОС (2) и (5) представимы в виде операторов Вольтерры *второго* рода:

$$\mathbf{P}y = \Pi(0)y(t) + \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau)y(\tau)d\tau, \quad \mathbf{R}y = R(0)y(t) + \int_0^t \dot{R}(t-\tau)y(\tau)d\tau, \quad t \geq 0.$$

Все структурные модели, собранные из линейных пружин и демпферов посредством последовательных и параллельных соединений, описываются ОС (1). Любая такая модель задается уравнением вида  $\mathbf{P}[d]\sigma = \mathbf{Q}[d]\varepsilon$  с двумя дифференциальными операторами с постоянными коэффициентами, где порядки операторов  $p = \deg \mathbf{P}$ ,  $p \geq 0$ , и  $q = \deg \mathbf{Q}$  либо равны, либо  $q = p + 1$ , а характеристические корни вещественны, различны и неотрицательны. Поэтому ФП любой реологической модели — сумма экспонент с отрицательными показателями и коэффициентами, и, возможно, функции  $\alpha t + \beta$ ,  $\alpha, \beta \geq 0$ , а функция релаксации — сумма экспонент с отрицательными показателями и положительными коэффициентами и, возможно, постоянной  $\beta \geq 0$  и сингулярности  $\eta\delta(t)$ ,  $\eta \geq 0$ . Например, семейство функций

$$\Pi(t) = \alpha t + \beta - \gamma e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad \gamma \in [0, \beta], \quad (6)$$

удовлетворяет всем требованиям к ФП и в случае  $\gamma \in (0; \beta)$ ,  $\alpha, \beta > 0$ , порождает все четыре структурно различные (но эквивалентные [65]) четырехзвенные модели из двух пружин и двух демпферов (они регулярны,  $R = E_1 e^{-\mu_1 t} + E_2 e^{-\mu_2 t}$  и  $R(+\infty) = 0$ ), а при  $\alpha = 0$  — трехзвенные модели Кельвина и Пойнтинга—Томпсона с одним демпфером (они регулярны и эквивалентны,  $R = E e^{-\mu t} + r$  и  $R(+\infty) = r > 0$ ). Так как  $\Pi(0) = \beta - \gamma$ , семейство (6) порождает нерегулярные модели лишь в случае  $\gamma = \beta$ :

- при  $\lambda\beta = 0$  — ньютоновскую жидкость ( $R = \eta\delta(t)$ );
- при  $\alpha = 0$  — модель Фойгта ( $R = \eta\delta(t) + r$ );
- при  $\alpha > 0$  — обе трехзвенные модели с одной пружиной и двумя демпферами ( $R = \eta\delta(t) + E e^{-\mu t}$ ,  $R(+\infty) = 0$ ).

При  $\gamma = 0$  выражение (6) дает модель Максвелла ( $R = E e^{-\mu t}$ ). Если  $\gamma < 0$ , то нарушается ограничение  $\ddot{\Pi}(t) \leq 0$  и порождаемые ОС (1) кривые обратной ползучести возрастают (что противоречит данным испытаний материалов) [65].

## 2. Кривые ползучести ОС (1) при одноосном растяжении.

Рассмотрим мгновенное одноосное нагружение  $\sigma_{11}(t) = \bar{\sigma}h(t)$ , где  $h(t)$  — функция Хевисайда (ее в дальнейшем будем опускать, полагая, что  $t > 0$ ), т.е.  $\sigma_{11}(t) = \bar{\sigma} = \text{const}$ , а остальные компоненты тензора напряжений равны нулю. Тогда  $\sigma_0 = \frac{1}{3}\bar{\sigma}h(t)$ , девиатор напряжений — диагональный тензор  $\mathbf{s} = \frac{1}{3}\bar{\sigma}h(t) \mathbf{diag}(2, -1, -1)$ , а из (1) следует, что девиатор деформаций тоже диагонален в любой момент времени:  $\mathbf{e} = \frac{1}{2}\bar{\sigma}\Pi(t) \mathbf{diag}(2, -1, -1)$  и

$$\theta(t; \bar{\sigma}) = \frac{1}{3}\bar{\sigma}\Pi_0(t), \quad t > 0. \quad (7)$$

У тензора деформаций  $\varepsilon = \mathbf{e} + \frac{1}{3}\theta\mathbf{I}$  тоже отличны от нуля лишь диагональные компоненты:

$$\varepsilon_{11}(t; \bar{\sigma}) = \bar{\sigma}\Pi(t) + \frac{1}{9}\bar{\sigma}\Pi_0(t) = \frac{1}{9}\bar{\sigma}(9\Pi(t) + \Pi_0(t)), \quad t > 0, \quad (8)$$

$$\varepsilon_{22}(t; \bar{\sigma}) = \varepsilon_{33}(t; \bar{\sigma}) = -\frac{1}{2}\bar{\sigma}\Pi(t) + \frac{1}{9}\bar{\sigma}\Pi_0(t) = \frac{1}{18}\bar{\sigma}(-9\Pi(t) + 2\Pi_0(t)). \quad (9)$$

Уравнения (7)–(9) задают семейства кривых ползучести (КП): объемной, осевой и поперечной. Из ограничений, наложенных на ФП  $\Pi(t)$  и  $\Pi_0(t)$ , следует, что для любого  $\bar{\sigma} > 0$  (будем для определенности рассматривать случай растяжения)  $\varepsilon(t)$ ,  $\theta(t)$  и  $\varepsilon_{11}(t)$  *положительны, монотонно возрастают и выпуклы вверх, а с ростом  $\bar{\sigma}$  смещаются вверх по оси деформации*. Поперечная деформация  $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{22}(t)$  не обязана быть ни монотонной, ни выпуклой вверх функцией: она может убывать или возрастать на всем интервале  $t > 0$ , может иметь точки экстремума и перегиба и менять знак. Поскольку из (9)

$$\dot{\varepsilon}_{\perp}(t) = -\frac{1}{2}\bar{\sigma}\dot{\Pi}(t) + \frac{1}{9}\bar{\sigma}\dot{\Pi}_0(t), \quad \ddot{\varepsilon}_{\perp}(t) = -\frac{1}{2}\bar{\sigma}\ddot{\Pi}(t) + \frac{1}{9}\bar{\sigma}\ddot{\Pi}_0(t),$$

при  $\bar{\sigma} > 0$  критерии (нестромого) возрастания и выпуклости вниз  $\varepsilon_{\perp}(t)$  на некотором интервале времени имеют вид  $\dot{\Pi}_0(t) \geq \frac{9}{2}\dot{\Pi}(t)$  или  $\ddot{\Pi}_0(t) \geq \frac{9}{2}\ddot{\Pi}(t)$ , а уравнения для точек экстремума и перегиба:

$$\dot{\Pi}_0(t) = \frac{9}{2}\dot{\Pi}(t) \quad \text{или} \quad \ddot{\Pi}_0(t) = \frac{9}{2}\ddot{\Pi}(t).$$

Если функция  $\Pi_0(t)$  ограничена (например, ФП (6) с  $\alpha = 0$ ), то  $\theta(\infty) = \frac{1}{9}\bar{\sigma}\Pi_0(\infty) < \infty$ . Если обе ФП ограничены, то обе КП (8), (9) имеют при  $t \rightarrow \infty$  горизонтальные асимптоты:

$$\varepsilon_{11}(\infty) = \bar{\sigma}\left(\Pi(\infty) + \frac{1}{9}\Pi_0(\infty)\right), \quad \varepsilon_{\perp}(\infty) = \bar{\sigma}\left(-\frac{1}{2}\Pi(\infty) + \frac{1}{9}\Pi_0(\infty)\right).$$

**ПРИМЕР 1.** Рассмотрим модель (1) с (ограниченными) ФП классической модели Кельвина:

$$\Pi = \beta - \gamma e^{-\lambda t}, \quad \Pi_0 = \beta_0 - \gamma_0 e^{-\lambda_0 t}, \quad \lambda, \beta, \lambda_0, \beta_0 > 0, \quad \gamma \in (0; \beta), \quad \gamma_0 \in (0; \beta_0), \quad (10)$$

( $\tau = 1/\lambda$  и  $\tau_0 = 1/\lambda_0$  – времена ретардации при сдвиге и изменении объема,

$$G = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \Pi(0)^{-1} = \frac{1}{3}(\beta - \gamma)^{-1}, \quad G_{\infty} = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \Pi(\infty)^{-1} = \frac{1}{3}\beta^{-1},$$

$$K = 1/\Pi_0(0) = 1/(\beta_0 - \gamma_0), \quad K_{\infty} = 1/\Pi_0(\infty) = 1/\beta_0$$

– мгновенный и длительный модули сдвига и объемные модули). По (8) и (9)

$$\varepsilon_{11}(t; \bar{\sigma}) = \frac{1}{9}\bar{\sigma}(9\beta + \beta_0 - 9\gamma e^{-\lambda t} - \gamma_0 e^{-\lambda_0 t}),$$

$$\varepsilon_{\perp}(t; \bar{\sigma}) = \frac{1}{18}\bar{\sigma}(-9\beta + 2\beta_0 + 9\gamma e^{-\lambda t} - 2\gamma_0 e^{-\lambda_0 t}).$$

При  $t \rightarrow \infty$  поперечная деформация  $\varepsilon_{\perp}(t)$  стремится к горизонтальной асимптоте  $\varepsilon_{\perp} = \frac{1}{18}\bar{\sigma}(2\beta_0 - 9\beta)$ , не зависящей от  $\lambda$  и  $\lambda_0$ . Скорость ползучести  $\dot{\varepsilon}_{\perp}(t) = \frac{1}{18}\bar{\sigma}(-9\gamma\lambda e^{-\lambda t} + 2\gamma_0\lambda_0 e^{-\lambda_0 t})$  может менять знак; из условия экстремума  $9\gamma\lambda e^{-\lambda t} = 2\gamma_0\lambda_0 e^{-\lambda_0 t}$  при  $\lambda \neq \lambda_0$  находится (единственная) точка экстремума  $t_m = (\ln \mu)/(\lambda_0 - \lambda)$ ,  $\mu = 4.5\gamma_0\lambda_0/(\gamma\lambda)$ , если  $t_m > 0$  (т.е.  $\lambda_0 > \lambda$  &  $\mu > 1$  или  $\lambda_0 < \lambda$  &  $\mu < 1$ ). Так как  $\varepsilon_{\perp}(t_m) = \frac{1}{18}\bar{\sigma}[2\beta_0 - 9\beta + 9\gamma(1 - \lambda\lambda_0^{-1})e^{-\lambda t_m}]$ , точка  $t_m$  — точка минимума при  $\lambda_0 < \lambda$  (когда  $\varepsilon_{\perp}(t_m) < \varepsilon_{\perp}(\infty)$ ) и точка максимума при  $\lambda_0 > \lambda$  (когда  $\varepsilon_{\perp}(t_m) > \varepsilon_{\perp}(\infty)$ ). При  $\lambda = \lambda_0$  поперечная деформация  $\varepsilon_{\perp}(t)$  всегда монотонна на луче  $t \geq 0$ : она возрастает, если  $9\gamma > 2\gamma_0$ , и убывает, если  $2\gamma_0 > 9\gamma$ .

В случае, когда  $\gamma_0 = 0$  ( $\Pi_0(t) = \beta_0$ ), поперечная деформация  $\varepsilon_{\perp}(t) = \frac{1}{18}\bar{\sigma}(-9\Pi(t) + 2\beta_0)$  монотонно убывает (и меняет знак, если  $\frac{9}{2}\Pi(0) < \beta_0 < \frac{9}{2}\Pi(\infty)$ , т.е.  $\frac{9}{2}(\beta - \gamma) < \beta_0 < \frac{9}{2}\beta$ ). При  $\lambda_0 \rightarrow \infty$  (т.е.  $\tau_0 \rightarrow 0$ ) все семейства КП модели (10) сходятся (снизу, равномерно на любом луче  $t \geq t_0 > 0$ ) к КП модели с  $\gamma_0 = 0$ .

На рис. 1, а приведены КП  $\varepsilon_{11}(t)$  (кривые 1–3),  $\theta(t)/3$  (кривые 4–6) и  $\varepsilon_{\perp}(t) = \varepsilon_{22}$  (кривые 7–9) для  $\bar{\sigma} = 1$ , порожденные тремя моделями вида (10) с одинаковыми сдвиговыми ФП  $\Pi(t)$  ( $\lambda = 0.1$ ,  $\beta = 0.010$ ,  $\gamma = 0.008$  и  $\tau = 1/\lambda = 10$ ) и разными  $\Pi_0(t)$  (с разными временами объемной ретардации  $\tau_0 = 1/\lambda_0$ ):

- 1) с  $\lambda_0 = 0.01 < \lambda$  — КП 1, 4, 7;
- 2) с  $\lambda_0 = \lambda = 0.1$  — штриховые КП 2, 5, 8;
- 3) с  $\lambda_0 = 1 > \lambda$  — КП 3, 6, 9.

Значения  $\beta_0 = 0.020$  и  $\gamma_0 = 0.015$  одинаковы у всех моделей. КП всех трех моделей стремятся к одной и той же горизонтальной асимптоте:  $\theta(\infty) = \frac{1}{3}\bar{\sigma}\beta_0$ ,  $\varepsilon_{11}(\infty) = \frac{1}{9}\bar{\sigma}(9\Pi(\infty) + \Pi_0(\infty)) = \frac{1}{9}\bar{\sigma}(9\beta + \beta_0) = \frac{11}{9}$ ,  $\varepsilon_{\perp}(\infty) = \frac{1}{18}\bar{\sigma}(2\beta_0 - 9\beta) = -\frac{5}{18}$  (штриховые прямые 10, 11).

Примечательны немонотонность и смена знака поперечной деформации: КП  $\varepsilon_{\perp}(t)$  модели с  $\lambda_0 = 0.01 < \lambda$  имеет точку минимума и далее стремится к асимптоте снизу, а КП с  $\lambda_0 = 1 > \lambda$  имеет точку максимума, дважды меняет знак и приближается к асимптоте сверху.

**ПРИМЕР 2.** Рассмотрим фрактальную модель Максвелла со степенными ФП:

$$\Pi = B + At^u, \quad \Pi_0 = B_0 + A_0t^w, \quad u, w \in (0; 1), \quad B, B_0 \geq 0, \quad A, A_0 > 0, \quad (11)$$

(и непрерывными спектрами ретардации и релаксации). Ее мгновенный и длительные модули следующие:

$$G = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{1}{\Pi(0)} = \frac{1}{3} B^{-1}, \quad G_{\infty} = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{1}{\Pi(\infty)} = 0,$$

$$K = 1/\Pi_0(0) = B_0^{-1}, \quad K_{\infty} = 1/\Pi_0(\infty) = 0.$$

Выпишем поперечную деформацию (9) и ее производные:

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{1}{18}\bar{\sigma}(2B_0 - 9B + 2A_0t^w - 9At^u), \quad \dot{\varepsilon}_{\perp} = \frac{1}{18}\bar{\sigma}t^{u-1}(2A_0wt^{w-u} - 9Au),$$

$$\ddot{\varepsilon}_{\perp} = \frac{1}{18}\bar{\sigma}t^{u-2}[2A_0(w^2 - w)t^{w-u} - 9A(u^2 - u)].$$



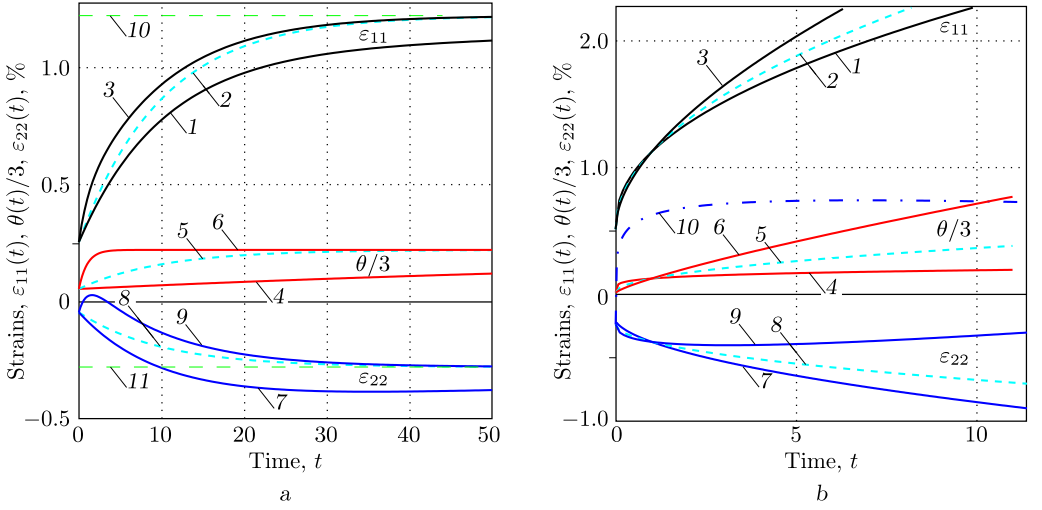


Рис. 1. Кривые ползучести (7)–(9) для моделей вида (10) (a) и моделей вида (11) (b) (онлайн в цвете)

[Figure 1 (color online). Fig. (a) shows the creep curves  $\varepsilon_{11}(t)$  (curves 1–3),  $\theta(t)/3$  (curves 4–6), and  $\varepsilon_{\perp}(t) = \varepsilon_{22}$  (curves 7–9) for  $\bar{\sigma} = 1$  generated by three models of the form (10) with identical shear creep functions  $\Pi(t)$  ( $\lambda = 0.1$ ,  $\beta = 0.010$ ,  $\gamma = 0.008$ , and  $\tau = 1/\lambda = 10$ ), and various creep functions  $\Pi_0(t)$  with different times of volume retardation  $\tau_0 = 1/\lambda_0$ : creep curves 1, 4, 7 correspond to  $\lambda_0 = 0.01 < \lambda$ ; dashed creep curves 2, 5, 8 correspond to  $\lambda_0 = \lambda = 0.1$ ; creep curves 3, 6, 9 correspond to  $\lambda_0 = 1 > \lambda$ . The values  $\beta_0 = 0.020$  and  $\gamma_0 = 0.015$  are the same for all curves. All creep curves tend to horizontal asymptotes: the creep curves  $\varepsilon_{11}(t)$  tend to  $\varepsilon_{11}(\infty) = \frac{1}{9}\bar{\sigma}(9\beta + \beta_0) = \frac{11}{9}$  (dashed line 10); the creep curves  $\theta(t)/3$  tend to  $\theta(\infty) = \frac{1}{3}\bar{\sigma}\beta_0$ ; the creep curves  $\varepsilon_{\perp}(t) = \varepsilon_{22}$  tend to  $\varepsilon_{\perp}(\infty) = \frac{1}{18}\bar{\sigma}(2\beta_0 - 9\beta) = -\frac{5}{18}$  (dashed line 11). Fig. (b) shows the creep curves  $\varepsilon_{11}(t)$  (curves 1–3),  $\theta(t)/3$  (curves 4–6), and  $\varepsilon_{\perp}(t) = \varepsilon_{22}$  (curves 7–9) for  $\bar{\sigma} = 1$  generated by three models of the form (11) with identical shear creep functions  $\Pi(t)$  ( $u = 0.5$ ,  $A = 0.005$ ,  $B = 0.005$ ), and various volumetric creep functions  $\Pi_0(t)$ : creep curves 1, 4, 7 correspond to  $w = 0.2 < u$ ; dashed creep curves 2, 5, 8 correspond to  $w = u = 0.5$ ; creep curves 3, 6, 9 correspond to  $w = 0.8 > u$ . Parameters  $A_0, B_0$  are fixed constants:  $A_0 = 0.01$ ,  $B_0 = 0.001$ .]

При  $w \neq u$  КП  $\varepsilon_{\perp}(t)$  всегда имеет единственную точку экстремума и точку перегиба:

$$\hat{t} = [9Au/(2A_0w)]^{1/(w-u)}, \quad \tilde{t} = [9Au(u-1)/(2A_0w(w-1))]^{1/(w-u)}.$$

В этом случае, очевидно,  $\varepsilon_{\perp}(\hat{t}) = \frac{1}{18}\bar{\sigma} [2B_0 - 9B + 9A(uw^{-1} - 1)\hat{t}^u]$ .

Если  $w < u$ , то имеем  $\dot{\varepsilon}_{\perp}(0+) = +\infty$ ,  $\dot{\varepsilon}_{\perp}(\infty) = -\infty$ ,  $\hat{t}$  – точка максимума и  $\varepsilon_{\perp}(\infty) = -\infty$ .

Если  $w > u$ , то имеем  $\dot{\varepsilon}_{\perp}(0+) = 0-$ ,  $\dot{\varepsilon}_{\perp}(\infty) = +\infty$ ,  $\hat{t}$  – точка минимума и  $\varepsilon_{\perp}(\infty) = +\infty$ .

В обоих случаях поперечная деформация  $\varepsilon_{\perp}(t)$  может менять знак (даже дважды – в зависимости от знаков  $\varepsilon_{\perp}(\hat{t})$  и  $\varepsilon_{\perp}(0) = \frac{1}{18}\bar{\sigma}(2B_0 - 9B)$ ).

Если  $w = u$ , то  $\varepsilon_{\perp} = \frac{1}{18}\bar{\sigma}(2B_0 - 9B + (2A_0 - 9A)t^u)$  – монотонная функция на полуоси  $t > 0$ : она убывающая при  $2A_0 - 9A < 0$  и возрастающая при  $2A_0 - 9A > 0$ .

На рис. 1, b приведены КП  $\varepsilon_{11}(t)$  (кривые 1–3),  $\theta(t)/3$  (кривые 4–6) и  $\varepsilon_{\perp}(t) = \varepsilon_{22}$  (кривые 7–9) для  $\bar{\sigma} = 1$ , порожденные тремя моделями вида

(11) с одинаковыми сдвиговыми ФП  $\Pi(t)$  ( $c u = 0.5$ ,  $A = 0.005$ ,  $B = 0.005$ ) и разными объемными ФП  $\Pi_0(t)$ :

- 1) с  $w = 0.2 < u$  (кривые 1, 4, 7);
- 2) с  $w = u = 0.5$  (штриховые кривые 2, 5, 8);
- 3) с  $w = 0.8 > u$  (кривые 3, 6, 9).

Параметры  $A_0 = 0.01$ ,  $B_0 = 0.001$  фиксированы. Все три модели дают одинаковое начальное значение каждой деформации  $\varepsilon_{11}(0)$ ,  $\varepsilon_{\perp}(0)$ ,  $\theta(0)$ :  $\varepsilon_{11}(0) = \frac{1}{9}\bar{\sigma}(9B + B_0)$ ,  $\varepsilon_{\perp}(0) = \frac{1}{18}\bar{\sigma}(-9B + 2B_0)$ ,  $\theta(0) = \frac{1}{3}\bar{\sigma}B_0$ . Поперечная деформация  $\varepsilon_{\perp}(t)$  модели с  $w = 0.8 > u$  (КП 9) имеет точку минимума и становится положительной при достаточно больших  $t$ . Максимум КП  $\varepsilon_{\perp}(t)$  с  $w = 0.2 < u$  (КП 7) неразличим, т.к. абсцисса точки максимума  $\hat{t} = [9Au/(2A_0w)]^{1/(w-u)} = (45/8)^{-10/3} = (8/45)^{10/3}$  очень мала. Сделать максимум более выраженным можно, увеличив  $A_0$  или уменьшив  $A$ . Кривая 10 — КП  $\varepsilon_{\perp}(t)$  модели с  $w = 0.2$  и значением  $A_0 = 0.1$ : на ней заметны перемена знака при  $t = t_1 \approx 0.01$  и максимум при  $\hat{t} = [45/8]^{-1/0.3} = 80/45^{10/3} \approx 7.5$ , а в дальнейшем  $\varepsilon_{\perp}(t)$  убывает и меняет знак при  $t = t_2 \approx 107$  (КПД отрицателен при  $t \in (t_1, t_2)$ ).

Отметим, что обезразмеривание напряжений можно производить их делением на величину  $cE$ , где  $E$  — мгновенный или длительный модуль («упругости») материала, а масштабный множитель  $c$ , как правило, лучше выбирать в диапазоне от  $10^{-4}$  до  $10^{-3}$ , или делением на другое характерное напряжение материала (пределы ползучести, прочности или текучести при некоторой температуре и характерной для испытаний материала или решаемой краевой задачи скорости деформирования). В силу линейности ОС (1) изучаемые качественные свойства кривых не зависят от способа масштабирования напряжений и времени.

**3. Свойства коэффициента поперечной деформации при ползучести.** Из уравнений кривых ползучести (8), (9) найдем КПД:

$$\nu(t) = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{11}} = \frac{1}{2} \frac{9\Pi(t) - 2\Pi_0(t)}{9\Pi(t) + \Pi_0(t)} = \frac{1}{2} - \frac{3\Pi_0(t)}{18\Pi(t) + 2\Pi_0(t)}, \quad (12)$$

или

$$\nu(t) = \frac{1}{2} - \frac{3z\xi}{6 + 2z\xi} = -1 + \frac{9}{6 + 2z\xi}, \quad (13)$$

$$\xi(t) := 3 \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} = \frac{\theta}{\varepsilon} = \frac{1}{3} \frac{\bar{\sigma}\Pi_0(t)}{|\bar{\sigma}|\Pi(t)} = \frac{1}{3} z \frac{\Pi_0(t)}{\Pi(t)}$$

— параметр вида деформированного состояния,  $z = \operatorname{sgn} \bar{\sigma} = \pm 1$ ,

$$\varepsilon = \left( \frac{2}{3} e_{ij} e_{ij} \right)^{1/2} = |\bar{\sigma}|\Pi(t)$$

— интенсивность деформаций. Существенное отличие линейного ОС от нелинейных ОС вязкоупругости — независимость КПД от уровня напряжения и от его знака. *Это свойство*, если оно не выполняется в испытаниях некоторого материала на ползучесть с разными  $\bar{\sigma}$ , *можно использовать как индикатор нелинейности его поведения и неприменимости линейного ОС (1).*

Так как  $\Pi(t) > 0$  и  $\Pi_0(t) > 0$  при  $t > 0$ , имеем  $\theta \geq 0$ ,  $\xi \geq 0$  и  $\nu(t) \leq 0.5$  в случае  $\bar{\sigma} > 0$ . Из возрастания  $\Pi(t)$  следуют неравенство  $\Pi(t) > \Pi(0)$  и оценка  $\nu(t) > 0.5 - 3\Pi_0(t)(18\Pi(0) + 2\Pi_0(t))^{-1}$  для КПД (учитывающая специфику ФП); а из  $\Pi(t) > 0$  следует универсальная (но более грубая) оценка  $\nu(t) > -1$  при  $t > 0$ , справедливая для любых ФП. Для моделей с  $\Pi_0(0) = 0$  (объемно нерегулярных) и  $\Pi(0) \neq 0$  формула (12) дает в пределе при  $t \rightarrow 0+$   $\nu(0+) = 0.5$  для любого  $\bar{\sigma} > 0$ , а для моделей с  $\Pi(0) = 0$  и  $\Pi_0(0) \neq 0$  —  $\nu(0+) = -1$ . Таким образом, для любых ФП в ОС (1) при ползучести верна оценка  $-1 < \nu(t) < 0.5$ , и эта оценка точна (не улучшаема).

КПД (12) может быть отрицательным, поскольку возможно  $\varepsilon_{\perp}(t) > 0$ . Критерий отрицательности  $\nu(t)$  на некотором интервале времени при растяжении имеет вид

$$\Pi_0(t) > \frac{9}{2}\Pi(t). \quad (14)$$

Из (12) следует, что кривые ползучести в продольном и поперечном направлениях, вообще говоря, неподобны, т.е. КПД  $\nu(t)$  непостоянен. Критерий постоянства  $\nu(t)$  при одноосном растяжении (т.е. постоянства  $\xi(t) = k$ ,  $k > 0$ , в силу (13)) налагает связь на ФП ОС (1), управляющие сдвиговыми и объемными деформациями:

$$\Pi_0(t) = 3k\Pi(t), \quad t > 0. \quad (15)$$

$k = 3(0.5 - \nu)/(1 + \nu) > 0$ . В частности, тождество (15) выполняется для несжимаемого материала (с  $\Pi_0(t) \equiv 0$ ), когда  $\nu(t) \equiv 0.5$  по (12), но никогда не выполняется при всех  $t > 0$  для реономного материала с упругим изменением объема ( $\Pi_0(t) = c > 0$ ,  $\Pi(t) \neq \text{const}$ ).

КПД (12) не обязан быть монотонной функцией. Поскольку из (13)

$$\dot{\nu}(t) = -3 \frac{\dot{\xi}(t)(6 + 2\xi(t)) - 2\dot{\xi}(t)\xi(t)}{(6 + 2\xi(t))^2} = -\frac{18\dot{\xi}(t)}{(6 + 2\xi(t))^2}, \quad (16)$$

знаки  $\dot{\nu}(t)$  и  $-\dot{\xi}(t)$  одинаковы, и потому совпадают интервалы монотонности  $\nu(t)$  и  $-\xi(t)$ . Продифференцируем выражение для  $\xi(t)$ :

$$\dot{\xi}(t) = \frac{1}{3}\Pi(t)^{-2}y(t), \quad y(t) := \dot{\Pi}_0(t)\Pi(t) - \Pi_0(t)\dot{\Pi}(t). \quad (17)$$

Так как  $\Pi_0(t)/\Pi(t) > 0$  при всех  $t > 0$ , критерий возрастания КПД (убывания  $\xi(t)$ ) на некотором интервале времени имеет вид  $\dot{\Pi}_0(t)/\Pi_0(t) \leq \dot{\Pi}(t)/\Pi(t)$ , а необходимое условие экстремума — вид  $y(t) = 0$ , т.е.

$$\dot{\Pi}_0(t)/\Pi_0(t) = \dot{\Pi}(t)/\Pi(t). \quad (18)$$

**ПРИМЕР 3.** Для ОС (1) с (ограниченными) ФП классической модели Кельвина (10) имеем

$$\xi(0) = \frac{\beta_0 - \gamma_0}{3(\beta - \gamma)}, \quad \nu(0) = -1 + \frac{27(\beta - \gamma)}{18(\beta - \gamma) + 2(\beta_0 - \gamma_0)},$$

$$\xi(\infty) = \frac{\beta_0}{3\beta}, \quad \nu(\infty) = -1 + \frac{27\beta}{18\beta + 2\beta_0}$$

(т.е. при  $t \rightarrow \infty$  функции  $\xi(t)$  и  $\nu(t)$  имеют горизонтальные асимптоты, не зависящие от  $\lambda$  и  $\lambda_0$ ). По (17)

$$\begin{aligned} y(t) &= \gamma_0 \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} (\beta - \gamma e^{-\lambda t}) - \gamma \lambda e^{-\lambda t} (\beta_0 - \gamma_0 e^{-\lambda t}) = \\ &= \gamma_0 \gamma (\lambda - \lambda_0) e^{-\lambda_0 t} e^{-\lambda t} + \gamma_0 \lambda_0 \beta e^{-\lambda_0 t} - \gamma \lambda \beta_0 e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

При  $\lambda = \lambda_0$  (когда времена сдвиговой и объемной ретардации совпадают)  $y(t) = \lambda(\gamma_0 \beta - \gamma \beta_0) e^{-\lambda t}$ , т.е. при  $\gamma_0 \beta > \gamma \beta_0$   $y(t) > 0$  и КПД убывает на всем луче  $t > 0$ , а при  $\gamma_0 \beta < \gamma \beta_0$  имеем  $y(t) < 0$  и КПД возрастает на луче  $t > 0$ . Условие наличия отрицательных значений КПД (14) имеет вид  $\beta_0 - \gamma_0 e^{-\lambda t} > \frac{9}{2}(\beta - \gamma e^{-\lambda t})$  или  $\beta_0 - \frac{9}{2}\beta > (\gamma_0 - \frac{9}{2}\gamma) e^{-\lambda t}$ . При  $\lambda \neq \lambda_0$  функция  $y(t)$  может менять знак, и потому  $\xi(t)$  и  $\nu(t)$  могут иметь точки максимума и минимума.

На рис. 2, а приведены графики КПД  $\nu(t)$  трех моделей вида (10) с одинаковыми сдвиговыми ФП  $\Pi(t)$  ( $\lambda = 0.1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0.5$  и  $\tau = 1/\lambda = 10$ ) и разными  $\Pi_0(t)$ : с  $\lambda_0 = \lambda = 0.1$  (голубые кривые 1–6), с  $\lambda_0 = 1 > \lambda$  (черные кривые 1–6) и с  $\lambda_0 = 0.01 < \lambda$  (штриховые кривые 1–6). Значение  $\gamma_0 = 0.9$  фиксировано, а номера кривых соответствуют шести значениям  $\beta_0$  для каждой из трех моделей с разными временами объемной ретардации  $\tau_0 = 1/\lambda_0$ :  $\beta_0 = 1; 2; 3; 4; 5; 6$ . С ростом  $\beta_0$ , т.е. с убыванием объемных модулей  $K_\infty = 1/\beta_0$  и  $K = 1/(\beta_0 - \gamma_0)$ , график функции  $\nu(t)$  смещается вниз и появляется интервал отрицательности КПД. Функции  $\nu(t)$  всех трех моделей с одинаковым  $\beta_0$  имеют одинаковые начальные значения  $\nu(0)$  и асимптоты  $\nu = \nu(\infty)$  (они не зависят от  $\lambda$  и  $\lambda_0$ ) и могут менять знак, но в остальном ведут себя по-разному:

- при достаточно малом отношении  $\tau_0/\tau < 1$   $\nu(t)$  быстро убывают в окрестности нуля, а затем возрастают (черные кривые 1–6 с  $\tau_0/\tau = 0.1$ );
- при достаточно большом  $\tau_0/\tau > 1$   $\nu(t)$  медленно возрастают в окрестности нуля, а затем убывают к асимптоте (штриховые кривые 1–6 с  $\tau_0/\tau = 10$ );
- при  $\tau_0 = \tau$   $\nu(t)$  не имеют точек экстремума: убывают при малых  $\beta_0 < \beta_*$ ,  $\beta_* = \beta \gamma_0 / \gamma$  (голубая кривая 1) и возрастает при  $\beta_0 > \beta_*$  (а при  $\beta_0 = \beta_*$   $\xi(t) = \frac{1}{3} \gamma_0 / \gamma = \text{const}$  и  $\nu(t) = \text{const}$ ).

Таким образом, уже на примере простейшей модели с шестью параметрами и одноточечными спектрами (сдвиговой и объемной) релаксации и ретардации можно увидеть, сколь разнообразным может быть поведение КПД  $\nu(t)$  и параметра  $\xi(t)$  при ползучести, описываемое линейным ОС (1).

**ПРИМЕР 4.** Для фрактальной модели (11) имеем  $\xi(0) = \frac{1}{3} B_0 / B$ ,  $\nu(0) = -1 + 27[18 + 2B_0/B]^{-1}$ , а при  $t \rightarrow \infty$  графики  $\nu(t)$  обладают горизонтальными асимптотами:  $\xi(\infty) = 0$ ,  $\nu(\infty) = 0.5$  при  $u > w$ ,  $\xi(\infty) = +\infty$ ,  $\nu(\infty) = -1$  при  $u < w$  и  $\xi(\infty) = \frac{1}{3} A_0 / A$ ,  $\nu(\infty) = -1 + 27[18 + 2A_0/A]^{-1}$  при  $u = w$  (в первых двух случаях асимптоты не зависят от параметров модели, и при больших временах моделируемый материал ведет себя как несжимаемый или как не меняющий форму). В силу (17)

$$y(t) = AA_0(w - u)t^{u+w-1} + A_0Bwt^{w-1} - AB_0ut^{u-1},$$

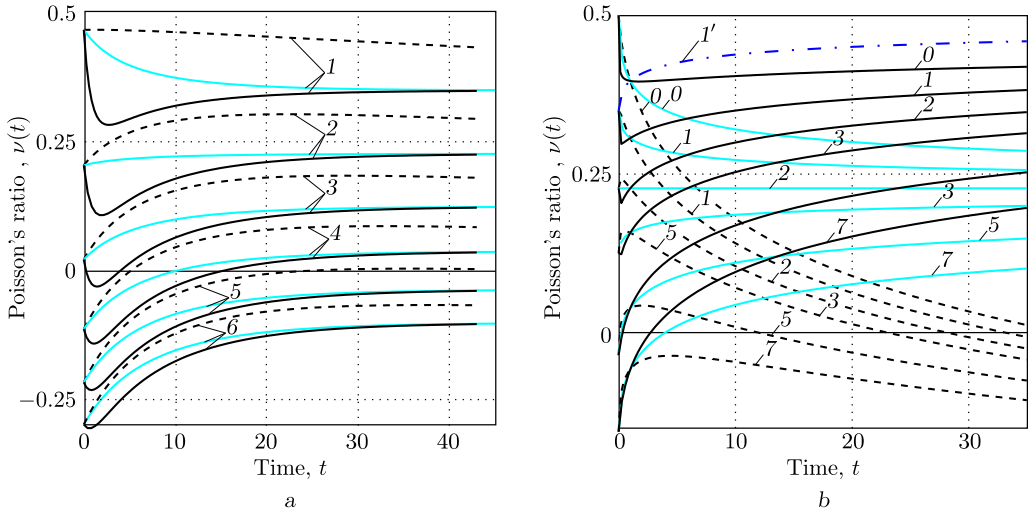


Рис. 2. Графики КПД моделей семейства (10) с одинаковыми сдвиговыми ФП  $\Pi(t)$  и разными  $\lambda_0 = 0.01; 0.1; 1$  и  $\beta_0 = 1; 2; 3; 4; 5; 6$  (a) и моделей (11) с одинаковыми  $\Pi(t)$  и разными  $w$  и  $B_0$  (b) (онлайн в цвете)

[Figure 2 (color online). Fig. (a) shows the Poisson's ratio  $\nu(t)$  for three models of the form (10) with identical shear creep functions  $\Pi(t)$  ( $\lambda = 0.1, \beta = 1, \gamma = 0.5$ , and  $\tau = 1/\lambda = 10$ ), and various volumetric creep functions  $\Pi_0(t)$ : with  $\lambda_0 = \lambda = 0.1$  (light blue curves 1–6), with  $\lambda_0 = 1 > \lambda$  (black curves 1–6), and with  $\lambda_0 = 0.01 < \lambda$  (dashed curves 1–6). The parameter  $\gamma_0$  is constant:  $\gamma_0 = 0.9$ . The curve numbers correspond to six values of the parameter  $\beta_0$  for each case with different times of volume retardation  $\tau_0 = 1/\lambda_0$ :  $\beta_0 = 1; 2; 3; 4; 5; 6$ .

Fig. (b) shows the Poisson's ratio  $\nu(t)$  for three models of the form (11) with identical shear creep functions  $\Pi(t)$  ( $u = 0.5, A = 0.5$ , and  $B = 1$ ), and various volumetric creep functions  $\Pi_0(t)$ : with  $w = u = 0.5$  (light blue curves 0, 1, 2, 3, 5, 7), with  $w = 0.2 < u$  (black curves 0, 1, 2, 3, 5, 7), and with  $w = 0.8 > u$  (dashed curves 0, 1, 2, 3, 5, 7). The parameter  $A_0$  is constant:  $A_0 = 1$ . The curve numbers correspond to different values of the parameter  $B_0 = 0; 1; 2; 3; 5; 7$ .]

и  $\dot{\nu}(t)$  может менять знак, если  $w \neq u$ . При  $w = u$   $y(t) = (A_0B - AB_0)ut^{u-1}$ , и потому КПД – монотонная функция: при  $A_0B > AB_0$   $y(t) > 0$  и КПД убывает на всем луче  $t > 0$ , при  $A_0B < AB_0$   $y(t) < 0$  и КПД возрастает на луче  $t > 0$ , а при  $A_0B = AB_0$   $\nu(t) = \text{const}$ . Если  $A_0 = 0$ , то  $\Pi_0(t) = B_0 = \text{const}$  (такая функция ползучести моделирует линейно-упругое изменение объема),  $y(t) < 0, \nu(t) = 0.5 - 3B_0[18(B + At^u) + 2B_0]^{-1}$  возрастает на всем луче  $t > 0$  и  $\nu(\infty) = 0.5$ .

На рис. 2, b приведены графики КПД  $\nu(t)$  трех моделей семейства (11) с одинаковыми сдвиговыми ФП  $\Pi(t)$  ( $u = 0.5, A = 0.5, B = 1$ ) и разными объемными ФП  $\Pi_0(t)$ :

- 1) с  $w = u = 0.5$  (голубые кривые 0, 1, 2, 3, 5, 7);
- 2) с  $w = 0.2 < u$  (черные кривые 0, 1, 2, 3, 5, 7);
- 3) с  $w = 0.8 > u$  (штриховые кривые 0, 1, 2, 3, 5, 7).

Параметр  $A_0 = 1$  фиксирован, а номера кривых соответствуют разным значениям параметра  $B_0 = 0; 1; 2; 3; 5; 7$  для каждой из трех моделей (с ростом  $B_0$ , т.е. с уменьшением мгновенного объемного модуля  $K = 1/B_0$ , график  $\nu(t)$  смещается вниз). При каждом  $B_0$  начальные значения  $\nu(0)$  одинаковы у всех трех моделей (и убывают с ростом  $B_0$ ), а горизонтальные асимптоты при  $t \rightarrow \infty$  различны (и не зависят от  $B_0$ ):  $\nu(\infty) = 0.5$  у всех моделей с  $w < u$ ,

$\nu(\infty) = -1$  у всех моделей с  $w > u$  и  $\nu(\infty) = -1 + 27[18 + 2A_0/A]^{-1} = 5/22$  при  $w = u$ . Асимптота голубых кривых 0–7  $\nu = 5/22$  совпадает с кривой (прямой) 2, поскольку при  $w = u$  и  $B_0 = 2$  будет  $A_0B = AB_0$  и  $\nu(t) = \text{const}$ . Примечательны перемены знака и немонотонность  $\nu(t)$  (у штриховой кривой 5 – даже две перемены знака). Для сравнения приведен график  $\nu(t)$  модели с линейно-упругим изменением объема, т.е. с  $A_0 = 0$  (штрих-пунктирная кривая 1'): он монотонно возрастает и  $\nu(\infty) = 0.5$ .

Примеры 3 и 4 (рис. 2) показывают, в частности, что убывание КПД не обязательно связано с необратимыми объемными деформациями (как принято считать [5, 6, 24, 31, 37, 40, 41, 44]): все модели семейств (10) или (11) после снятия нагрузки обеспечивают полное восстановление объемных деформаций до нуля при  $t \rightarrow \infty$  и обладают свойством затухания памяти, т.к.  $\Pi_0(\infty) = 0$  [66, 68, 70].

#### 4. Влияние всестороннего давления на кривые ползучести ОС (1).

Рассмотрим испытания цилиндрического образца на растяжение постоянной нагрузкой в сочетании со всесторонним давлением, т.е. нагружение вида (4) в точке рабочей части образца. Очевидно, девиатор (и интенсивность) напряжений не меняются при наложении давления на одноосное нагружение:  $\mathbf{s} = \frac{1}{3}\bar{\sigma}h(t)\mathbf{diag}(2, -1, -1)$  и  $\sigma = |\bar{\sigma}|h(t)$ . В силу ОС (1) не изменится и девиатор деформаций  $\mathbf{e} = 0.5\bar{\sigma}\Pi(t)\mathbf{diag}(2, -1, -1)$ . Изменятся только шаровая часть тензора  $\sigma$  (среднее напряжение  $\sigma_0 = (\bar{\sigma}/3 - p)h(t) = \bar{\sigma}qh(t)$ , где  $p$  – краткое обозначение уровня давления  $\bar{p}$ , а  $q := \frac{1}{3} - p/\bar{\sigma}$  – параметр нагружения (4),  $q \in (-\infty; \frac{1}{3})$ ) и объемная деформация

$$\theta(t; \bar{\sigma}, p) = \Pi_0\sigma_0 = \left(\frac{1}{3}\bar{\sigma} - p\right)\Pi_0(t) = \bar{\sigma}q\Pi_0(t). \quad (19)$$

У тензора деформаций  $\varepsilon = \mathbf{e} + \varepsilon_0\mathbf{I}$  отличны от нуля только диагональные компоненты:

$$\varepsilon_{11}(t; \bar{\sigma}, p) = \bar{\sigma}\Pi(t) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\bar{\sigma} - p\right)\Pi_0(t) = \bar{\sigma}\left[\Pi(t) + \frac{1}{3}q\Pi_0(t)\right], \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22}(t; \bar{\sigma}, p) = \varepsilon_{33}(t; \bar{\sigma}, p) &= -\frac{1}{2}\bar{\sigma}\Pi(t) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\bar{\sigma} - p\right)\Pi_0(t) = \\ &= \bar{\sigma}\left[-\frac{1}{2}\Pi(t) + \frac{1}{3}q\Pi_0(t)\right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Так как  $\Pi_0(t) > 0$ , с ростом  $p$  все кривые ползучести (19)–(21) (объемной, осевой и поперечной) смещаются вниз вдоль оси деформации (семейства (19)–(21) неограниченно убывают по параметру  $p$  при любых  $t$  и  $\bar{\sigma}$ ), в частности, давление тормозит осевую и объемную ползучесть по сравнению с одноосным растяжением и ускоряет при сжатии. Этот эффект наблюдается в испытаниях «всех» стабильных материалов по программе (4) [2–6, 40].

Для любых  $\bar{\sigma} > 0$  (в дальнейшем будем для определенности рассматривать случай  $\bar{\sigma} > 0$ ) и  $q > 0$ , т.е. при  $0 \leq p \leq \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  объемная и осевая деформации положительны, КП (19) и (20) монотонно возрастают по  $t$  на полуоси  $t > 0$  и выпуклы вверх (как и в случае  $p = 0$ ), т.к.

$$\dot{\varepsilon}_{11} = \bar{\sigma}\left(\dot{\Pi}(t) + \frac{1}{3}q\dot{\Pi}_0(t)\right), \quad \ddot{\varepsilon}_{11} = \bar{\sigma}\left(\ddot{\Pi}(t) + \frac{1}{3}q\ddot{\Pi}_0(t)\right),$$

$$\dot{\Pi} > 0, \quad \dot{\Pi}_0 > 0, \quad \ddot{\Pi} \leq 0, \quad \ddot{\Pi}_0 \leq 0.$$

Если  $p = \frac{1}{3}\bar{\sigma}$ , то  $\theta(t) \equiv 0$ ,  $\varepsilon_{11}(t) = \bar{\sigma}\Pi(t)$  возрастает и выпукла вверх, а поперечная деформация  $\varepsilon_{\perp}(t) := \varepsilon_{22} = -\frac{1}{2}\bar{\sigma}\Pi(t) = -0.5\varepsilon_{11}(t)$  отрицательна и убывает при  $t > 0$ .

Если же  $p > \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  (т.е.  $q < 0$ ), то  $\theta(t; \bar{\sigma}, p)$  и второе слагаемое в (20) отрицательны и убывают по  $t$ , и потому возможны как отрицательность  $\varepsilon_{11}(t)$  на некоторых интервалах времени (в частности, в окрестности начального момента  $t = 0$ , если выполнено неравенство  $-q\Pi_0(0) > 3\Pi(0)$ ), так и нарушение монотонности  $\varepsilon_{11}(t)$ . Скорость осевой ползучести  $\dot{\varepsilon}_{11}$  может стать отрицательной при большом давлении (необходимо  $q < 0$ ), если только  $\Pi_0(t) \neq \text{const}$  (если объемные деформации не упруги). Условие наличия точки экстремума у КП (20) — существование решения уравнения  $\dot{\varepsilon}_{11}(t) = 0$ , т.е.

$$h(t) = -3/q, \quad h := \dot{\Pi}_0(t)/\dot{\Pi}(t). \quad (22)$$

В зависимости от соотношения между сдвиговой и объемной ФП и величины параметра нагружения  $q$  корень уравнения (22)  $t_*(q)$  может быть точкой максимума КП (20) (в случае возрастания  $\varepsilon_{11}(t)$  в правой окрестности  $t = 0$ ) или минимума (например, когда  $\dot{\varepsilon}_{11}(0) = \bar{\sigma}(\dot{\Pi}(0) + \frac{1}{3}q\dot{\Pi}_0(0)) < 0$ , но  $\dot{\varepsilon}_{11}(\infty) = \bar{\sigma}(\dot{\Pi}(\infty) + \frac{1}{3}q\dot{\Pi}_0(\infty)) > 0$ ). КП (20) может иметь и более одной точки экстремума, если (непрерывная) функция  $h(t)$  немонотонна на полуоси  $t > 0$  (пример можно построить, выбрав обе ФП из семейства (6) с  $\alpha \neq 0$ ,  $\lambda_0 \neq \lambda$ ) и, следовательно, уравнение (22) имеет несколько корней, когда  $q$  лежит в интервале многозначности обратного к  $h$  отображения. Так как  $\dot{\Pi}(t) > 0$ ,  $\dot{\Pi}_0(t) > 0$  и непрерывны, то для любых фиксированных ФП и любого момента времени  $t_*$  можно выбрать величину  $p > \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  (т.е.  $q \in (-\infty; 0)$ ) так, чтобы корень уравнения (22) существовал и совпал с  $t_*$ . При  $q < 0$  КП (20) может не быть выпуклой вверх:  $\ddot{\varepsilon}_{11} > 0$ , если  $q\ddot{\Pi}_0(t) > -3\ddot{\Pi}(t)$ , точка перегиба КП — решение уравнения  $-q\ddot{\Pi}_0(t) = 3\ddot{\Pi}(t)$ .

Поперечная деформация (21), наоборот, убывает, выпукла вниз и отрицательна на всем интервале  $t > 0$  в случае  $p > \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  для любых ФП. А в случае  $0 \leq p \leq \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  деформация  $\varepsilon_{\perp}(t)$  не обязана быть монотонной и выпуклой функцией: она может убывать на всем интервале  $t > 0$ , может иметь точки экстремума и перегиба и может менять знак. Поскольку из (21)  $\dot{\varepsilon}_{\perp} = -\frac{1}{2}\bar{\sigma}(\dot{\Pi}(t) - \frac{2}{3}q\dot{\Pi}_0(t))$ , при  $\bar{\sigma} > 0$  условие убывания  $\varepsilon_{\perp}(t)$  на некотором интервале имеет вид  $q\dot{\Pi}_0(t) \leq \frac{3}{2}\dot{\Pi}(t)$ , т.е.  $h(t) \leq \frac{3}{2}q^{-1}$ . Точки экстремума и перегиба  $\varepsilon_{\perp}(t)$  — корни уравнений

$$h(t) = \frac{3}{2}q^{-1}, \quad q\ddot{\Pi}_0(t) = \frac{3}{2}\ddot{\Pi}(t). \quad (23)$$

Если  $\Pi_0(t)$  ограничена, то объемная деформация ограничена:  $\theta(\infty) = \bar{\sigma}q\Pi_0(\infty)$ . Если обе ФП ограничены, то обе КП (20), (21) имеют при  $t \rightarrow \infty$  горизонтальные асимптоты:

$$\varepsilon_{11}(\infty) = \bar{\sigma}\left(\Pi(\infty) + \frac{1}{3}q\Pi_0(\infty)\right), \quad \varepsilon_{\perp}(\infty) = \bar{\sigma}\left(-\frac{1}{2}\Pi(\infty) + \frac{1}{3}q\Pi_0(\infty)\right). \quad (24)$$

На рис. 3, а приведены КП (19)–(21), порожденные моделью (10) с  $\lambda = 0.1$ ,  $\lambda_0 = 0.1$ ,  $\beta = 0.01$ ,  $\beta_0 = 0.005$ ,  $\gamma = 0.005$ ,  $\gamma_0 = 0.004$  (времена объемной и сдвиговой ретардации совпадают:  $\tau = 1/\lambda = 10$ , мгновенный и длительный модули сдвига  $-G = \frac{1}{3}(\beta - \gamma)^{-1} = \frac{200}{3}$  и  $G_\infty = \frac{1}{3}\beta^{-1} = \frac{100}{3}$ , а объемные модули  $-K = 1/(\beta_0 - \gamma_0) = 1000$  и  $K_\infty = 1/\beta_0 = 200$ ) при  $\bar{\sigma} = 1$  и разных давлениях  $p$ :  $p/\bar{\sigma} = 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; 2; 3; 4; 5$ , т.е.  $q = \frac{1}{3}; 0; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{5}{3}; -\frac{8}{3}; -\frac{11}{3}; -\frac{14}{3}$  (КП 0, 1–7):

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \bar{\sigma} \left[ \beta - \gamma e^{-\lambda t} + \frac{1}{3} q (\beta_0 - \gamma_0 e^{-\lambda_0 t}) \right], \\ \varepsilon_{\perp} &= \bar{\sigma} \left[ -\frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \gamma e^{-\lambda t} + \frac{1}{3} q (\beta_0 - \gamma_0 e^{-\lambda_0 t}) \right].\end{aligned}$$

КП  $\varepsilon_{11}(t)$  расположены выше оси времени, КП  $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{22}$  – ниже (синие КП), а объемные КП  $\theta(t)/3$  показаны штриховыми линиями; деформации измеряются в процентах. С ростом параметра  $p$  (с убыванием  $q$ ) все КП смещаются вниз вдоль оси деформации. Так как  $\Pi(\infty) = \beta < \infty$  и  $\Pi_0(\infty) = \beta_0 < \infty$ , при  $t \rightarrow \infty$  любая КП обладает горизонтальной асимптотой (24) (зависящей от  $\bar{\sigma}$  и  $p$ , но не зависящей от  $\lambda$  и  $\lambda_0$ ):

$$\theta(\infty) = \bar{\sigma} q \beta_0, \quad \varepsilon_{11}(\infty) = \bar{\sigma} \left( \beta + \frac{1}{3} q \beta_0 \right), \quad \varepsilon_{\perp}(\infty) = \bar{\sigma} \left( -\frac{1}{2} \beta + \frac{1}{3} q \beta_0 \right).$$

В случае  $\lambda_0 = \lambda$  осевая и поперечная КП не имеют точек экстремума:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}(t) &= \bar{\sigma} \left[ \beta + \frac{1}{3} q \beta_0 - \left( \gamma + \frac{1}{3} q \gamma_0 \right) e^{-\lambda t} \right], \\ \varepsilon_{\perp}(t) &= \bar{\sigma} \left[ -\frac{1}{2} \beta + \frac{1}{3} q \beta_0 + \left( \frac{1}{2} \gamma - \frac{1}{3} q \gamma_0 \right) e^{-\lambda t} \right],\end{aligned}$$

а превращение возрастающей КП в убывающую происходит при том значении  $p$ , которое обращает в нуль множитель при  $e^{-\lambda t}$ , т.е. при  $q = -3\gamma/\gamma_0$  для  $\varepsilon_{11}(t)$  и  $q = \frac{3}{2}\gamma/\gamma_0$  для  $\varepsilon_{\perp}(t)$ .

На рис. 3, б приведены КП (19)–(21), порожденные моделью (10) с  $\lambda = 0.1$ ,  $\lambda_0 = 1$  (времена сдвиговой и объемной ретардации различны:  $\tau = 1/\lambda = 10$  и  $\tau_0 = 1/\lambda_0 = 1$ ),  $\beta = 0.010$ ,  $\beta_0 = 0.005$ ,  $\gamma = 0.005$ ,  $\gamma_0 = 0.004$  при  $\bar{\sigma} = 1$  и разных давлениях  $p$ :  $p/\bar{\sigma} = 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; 2; 3; 4$  (кривые 0, 1–6). С ростом  $p/\bar{\sigma}$  КП (19)–(21) смещаются вниз вдоль оси деформации, на осевой КП  $\varepsilon_{11}(t)$  появляется точка минимума и точка перегиба, а при достаточно большом давлении  $\varepsilon_{11}(t)$  становится отрицательной (см. КП 7 для  $p/\bar{\sigma} = 5$ ). Поперечная деформация  $\varepsilon_{\perp}(t)$  (синие КП) имеет точку максимума лишь при  $p < \bar{\sigma}/3$  (см. КП 0), а при  $p \geq \bar{\sigma}/3$   $\varepsilon_{\perp}(t)$  убывает на всей полуоси.

На рис. 4 приведены КП фрактальных моделей семейства (11) с одинаковыми сдвиговыми ФП  $\Pi(t)$  (с  $u = 0.5$ ,  $A = 0.005$ ,  $B = 0.01$ ) и двумя разными объемными ФП  $\Pi_0(t)$ : с  $A_0 = 0.01$ ,  $B_0 = 0.001$ ,  $w = 0.2 < u$  (рис. 4, а) и с  $w = 0.8 > u$  (рис. 4, б) при  $\bar{\sigma} = 1$  и разных давлениях  $p$ :  $p/\bar{\sigma} = 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; 2; 3; 4; 5$  (т.е.  $q = \frac{1}{3}; 0; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{5}{3}; -\frac{8}{3}; -\frac{11}{3}; -\frac{14}{3}$ ) на рис. 4, а (кривые 0, 1–7), и  $p/\bar{\sigma} = 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}; 2$  на рис. 4, б (кривые 0, 1–6). На рис. 4, б есть точка максимума у осевой деформации, точка минимума у поперечной деформации (синие КП) и смены знака.



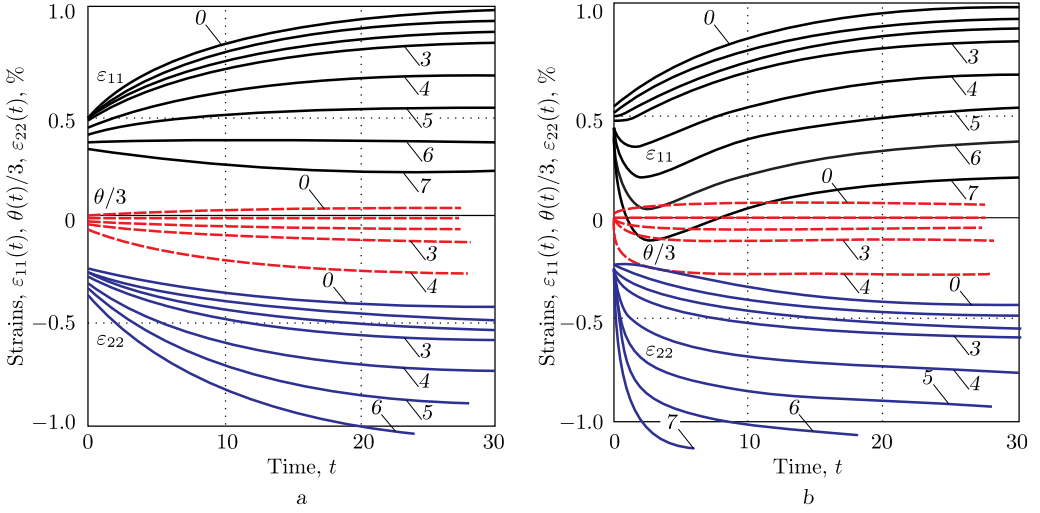


Рис. 3. Кривые ползучести (19)–(21) моделей (10) при фиксированном  $\bar{\sigma} = 1$  и разных величинах давления  $p$  (значения  $p/\bar{\sigma} = 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; 2; 3; 4; 5$  соответствуют кривым 0, 1–7): а) для модели с  $\lambda = 0.1, \lambda_0 = 0.1$ ; б) для модели с  $\lambda = 0.1, \lambda_0 = 1$  (онлайн в цвете)

[Figure 3 (color online) shows the creep curves (19)–(21) generated by models (10) with the fixed value of  $\bar{\sigma} = 1$  and different values of pressure  $p$  (values of  $p/\bar{\sigma} = 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; 2; 3; 4; 5$  correspond to curves 0, 1–7); Fig. (a) corresponds to the model with  $\lambda = 0.1, \lambda_0 = 0.1$ ; Fig. (b) corresponds to the model with  $\lambda = 0.1, \lambda_0 = 1$ ]

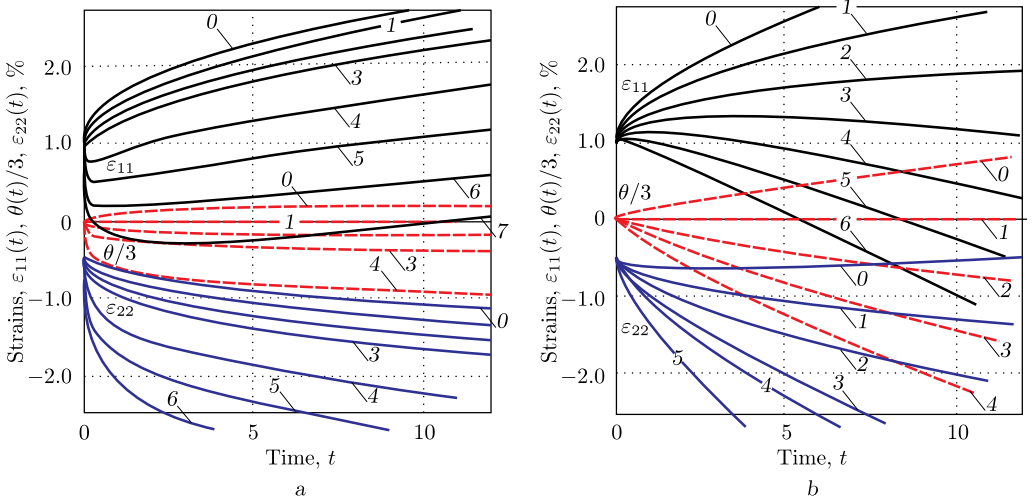


Рис. 4. Кривые ползучести (19)–(21) моделей вида (11) при фиксированном  $\bar{\sigma} = 1$  и разных величинах давления  $p$  (КП 0, 1–7): а)  $w = 0.2 < u$ ; б)  $w = 0.8 > u$  (онлайн в цвете)

[Figure 4 (color online) shows the creep curves (19)–(21) generated by models (11) with the fixed value of  $\bar{\sigma} = 1$  and different values of pressure  $p$ ; Fig. (a) corresponds to value of  $w = 0.2 < u$ , and values of  $p/\bar{\sigma} = 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; 2; 3; 4; 5$  correspond to curves 0, 1–7; Fig. (b) corresponds to value of  $w = 0.8 > u$ , and values of  $p/\bar{\sigma} = 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}; 2$  correspond to curves 0, 1–6]

**5. Зависимость свойств коэффициента поперечной деформации от давления.** Из уравнений кривых ползучести (20) и (21) найдем КПД  $\nu = -\varepsilon_{\perp}/\varepsilon_{11}$  при нагружениях (4):

$$\nu(t, q) = \frac{3\Pi(t) - 2q\Pi_0(t)}{6\Pi(t) + 2q\Pi_0(t)} = 0.5 - \frac{3q\Pi_0(t)}{6\Pi(t) + 2q\Pi_0(t)}, \quad (25)$$

$$\nu(t; q) = f(\xi(t; q)), \quad f(\xi) := 0.5 - \frac{3z\xi}{6 + 2z\xi} = -1 + \frac{9}{6 + 2z\xi}, \quad \xi \neq -3, \quad (26)$$

где  $z := \operatorname{sgn}\bar{\sigma} = \pm 1$ ,  $q := \frac{1}{3} - p/\bar{\sigma}$ ,  $\xi(t, q) := \theta/\varepsilon$  — параметр вида деформированного состояния:

$$\xi(t, q) = \bar{\sigma}q\Pi_0(t)/|\bar{\sigma}|\Pi(t) = zq\Pi_0(t)/\Pi(t),$$

где  $\varepsilon = (\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij})^{0.5} = |\bar{\sigma}|\Pi(t)$  — интенсивность деформаций. Аналогичный параметр вида напряженного состояния  $\xi_{\sigma} := 3\sigma_0(t)/\sigma(t) = (\bar{\sigma} - 3p)/|\bar{\sigma}| = 3zq$  не зависит от времени для нагружения (4); это верно и для параметров Лодэ тензоров  $\varepsilon(t)$  и  $\sigma(t)$  (они не зависят и от  $q$ ):

$$\mu_{\varepsilon} = \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} = \frac{\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{11}}{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{\perp}} = -1, \quad \mu_{\sigma} = -\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11}} = -1$$

для любых  $\bar{\sigma} > 0$ ,  $p \geq 0$  и  $t > 0$ . Очевидно,  $\xi(\nu) = \frac{3}{2}(1 - 2\nu)/(1 + \nu)$ ,  $\nu \neq -1$ .

Из (25) следует *специфичное свойство линейного ОС (1): КПД зависит лишь от отношения  $p/\bar{\sigma}$*  (не входящего в аргументы материальных функций, в отличие от нелинейных ОС [55]), *а не от  $\bar{\sigma}$  и  $p$  по отдельности. Это свойство можно использовать как индикатор (не)применимости ОС (1) при анализе данных испытаний некоторого материала.*

В дальнейшем будем для определенности рассматривать случай  $\bar{\sigma} > 0$  ( $z = 1$ ).

Если  $q > 0$ , т.е.  $p \in [0; \frac{1}{3}\bar{\sigma})$ , имеем  $\theta(t) > 0$ ,  $\xi(t) > 0$  и  $\nu(t) < 0.5$  при  $t > 0$ , а возрастание  $\Pi(t)$  влечет неравенство  $\bar{\sigma}\Pi(t) > \bar{\sigma}\Pi(0)$  и оценку снизу для КПД (25)  $\nu(t) > 0.5 - 3q\Pi_0(t)[6\Pi(0) + 2q\Pi_0(t)]^{-1}$  (она учитывает момент времени, специфику ФП и программы нагружения). Из  $\Pi(t) > 0$  следует более универсальная (но более грубая) оценка  $\nu(t) > -1$  при всех  $t > 0$ , справедливая для любых ФП и любых  $\bar{\sigma} > 0$ ,  $q \geq 0$ . Для нерегулярных моделей с  $\Pi(0) = 0$  и  $\Pi_0(0) \neq 0$  формула (25) дает в пределе при  $t \rightarrow 0$   $\nu(0+) = -1$  для любых  $\bar{\sigma} > 0$ ,  $p \geq 0$ , а для моделей с  $\Pi_0(0) = 0$  и  $\Pi(0) \neq 0$  имеем  $\nu(0+) = 0.5$ . Таким образом, для любых ФП в случае  $p \in [0; \frac{1}{3}\bar{\sigma})$  справедлива оценка для КПД  $-1 < \nu(t) < 0.5$ , установленная выше в случае  $p = 0$ , и эта оценка точна (неулучшаема).

В случае  $p = \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  имеем  $\theta(t) \equiv 0$ ,  $\xi(t) \equiv 0$  и  $\nu(t) \equiv 0.5$ .

А в случае  $p > \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  будет  $\theta < 0$ ,  $\xi(t) < 0$  и неравенство  $-1 < \nu(t) < 0.5$  не выполняется при всех  $t$ : если  $\xi(t) \in (-3; 0)$ , то  $\nu(t) > 0.5$  по (26), а если  $\xi(t) < -3$ , то  $\nu(t) < -1$  (и  $\varepsilon_{11}(t) < 0$ ).

Таким образом, при нагружениях вида (4) КПД (25) может быть отрицательным не только за счет положительности  $\varepsilon_{\perp}(t)$  (как в случае одноосного растяжения и при  $p < \frac{1}{3}\bar{\sigma}$ ), но и из-за отрицательности  $\varepsilon_{11}(t)$  (при  $p > \frac{1}{3}\bar{\sigma}$

и  $\xi(t) < -3$ ). Критерий отрицательности КПД  $\nu(t)$  на некотором интервале имеет вид  $\xi(t) > 1.5$  или  $\xi(t) < -3$ , т.е.

$$\frac{3}{2} \frac{\Pi(t)}{\Pi_0(t)} < q \quad \text{или} \quad -3 \frac{\Pi(t)}{\Pi_0(t)} > q. \quad (27)$$

При  $q = 0$  множество решений неравенств пусто; с ростом  $|q|$  оно может только расширяться (как в случае  $q > 0$ , так и  $q < 0$ ). Если  $\Pi(0) = 0$ , а  $\Pi_0(0) \neq 0$ , то при всех  $p < \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  множество решений (27) содержит правую окрестность точки  $t = 0$ . Если  $\Pi(t)$  ограничена, а  $\Pi_0(t)$  не ограничена, то при любом  $p < \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  множество решений (27) содержит некоторый луч  $[T; +\infty)$ , где  $t = T$  — решение уравнения  $\Pi_0(t) = \frac{3}{2}\Pi(\infty)/q$  (единственное в силу возрастания  $\Pi_0$ ).

Если обе ФП ограничены,  $\nu(t, q)$  и  $\xi(t, q)$  имеют горизонтальные асимптоты при  $t \rightarrow \infty$ :

$$\xi(\infty, q) = \frac{q}{Q}, \quad \nu(\infty, q) = \frac{\frac{3}{2}Q - q}{3Q + q}, \quad Q := \frac{\Pi(\infty)}{\Pi_0(\infty)} > 0. \quad (28)$$

Если  $p < \frac{1}{3}\bar{\sigma}$ , то  $-1 < \nu(\infty, q) < 0.5$ , а если  $p > \frac{1}{3}\bar{\sigma}$ , то  $\nu(\infty, q) \notin [-1; 0.5]$ . Предел  $\nu(\infty, q)$  отрицателен в двух случаях:  $q < -3Q$  или  $q > \frac{3}{2}Q$  (второй интервал непуст лишь при  $\frac{3}{2}Q < \frac{1}{3}$ ), т.е. критерий отрицательности  $\nu(\infty, q)$  — совокупность неравенств

$$\frac{p}{\bar{\sigma}} > \frac{1}{3} + 3Q \quad \text{или} \quad 0 < \frac{p}{\bar{\sigma}} < \frac{1}{3} - \frac{3}{2}Q. \quad (29)$$

Равновесные значения  $\nu(t, q)$  и  $\xi(t, q)$  при  $t \rightarrow \infty$  могут существовать и для неограниченных ФП, если существует конечный предел  $\xi(\infty, q)$ ; например, для модели (11) с  $w = u$  имеем  $\xi(\infty, q) = qA_0/A$  и  $\nu(\infty, q) = f(qA_0/A)$ , а при  $w \neq u$  равновесные значения не зависят от величины  $q$ : если  $w < u$ , то  $\xi(\infty, q) = 0$  и  $\nu(\infty, q) = 0.5$ , а если  $w > u$ , то  $\xi(\infty, q) = \pm\infty$  и  $\nu(\infty, q) = -1$ .

Докажем, что КПД (25) (в случае  $\bar{\sigma} > 0$ ) убывает по  $q$  и возрастает по  $p$  в любой момент времени (что и наблюдается в испытаниях материалов). Функция  $\nu = f(\xi) = -1 + 4.5(3 + \xi)^{-1}$ ,  $\xi \neq -3$ , из (26) убывает на интервалах  $(-\infty, -3)$  и  $(-3, +\infty)$ ,  $\nu = 0.5$  при  $\xi = 0$ , а при  $\xi \rightarrow \pm\infty$  имеем  $\nu \rightarrow -1$ ,  $\theta/\varepsilon_{11} \rightarrow 3$  и  $\varepsilon/\varepsilon_{11} \rightarrow 0$ . Так как в случае  $\bar{\sigma} > 0$  параметр  $\xi(t, q)$ , очевидно, возрастает по  $q$  и убывает по  $p$  (в силу  $\Pi_0(t) > 0$ ), то из убывания функции  $f(\xi)$  следует, что  $\nu(t, q)$  убывает по  $q$  и возрастает по  $p$  (при фиксированном  $t$ ).

Исследуем интервалы монотонности  $\nu(t)$ . Дифференцируя (26), получим формулу (16). Знаки  $\dot{\nu}(t)$  и  $-\dot{\xi}(t)$  одинаковы, и потому совпадают интервалы монотонности  $\nu(t)$  и  $-\xi(t)$  (точнее, при  $p > \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  у интервалов монотонности  $\nu(t)$  могут быть дополнительные границы в точках, в которых  $\xi(t) = -3$ , т.е.  $\varepsilon_{11}(t) = 0$ : в них  $\nu(t)$  имеет разрывы второго рода). Так как  $\dot{\xi}(t) = zq\Pi(t)^{-2} \times [\dot{\Pi}_0(t)\Pi(t) - \Pi_0(t)\dot{\Pi}(t)]$ , то при  $p = \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  будет  $\dot{\xi}(t) \equiv 0$  и  $\dot{\nu}(t) \equiv 0$ , а при  $p \neq \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  критерий (нестрогого) возрастания  $\nu(t)$  (т.е. убывания  $\xi(t)$ ) на некотором интервале времени имеет вид

$$q[\dot{\Pi}_0(t)\Pi(t) - \Pi_0(t)\dot{\Pi}(t)] \leq 0, \quad \text{или} \quad q\dot{\Pi}_0(t)/\Pi_0(t) \leq q\dot{\Pi}(t)/\Pi(t) \quad (30)$$

(поскольку  $\Pi_0(t)\Pi(t) > 0$  при всех  $t > 0$ , то поделив первое неравенство на это выражение, получим критерий возрастания  $\nu(t)$  при  $p \neq \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  в форме с разделенными сдвиговыми и объемными ФП). Критерий (30) отличается от аналогичного критерия (18) в случае одноосного растяжения (при  $p = 0$ ) только множителем  $q$ , который отрицателен при  $p > \frac{1}{3}\bar{\sigma}$ ; при  $p < \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  он совпадает с (18). Переменные  $t$  и  $q$  разделяются в (30) (это следствие линейности ОС), и при фиксированных ФП смена знака параметра нагружения  $q$  приводит к синхронной замене интервалов возрастания  $\nu(t)$  и  $-\xi(t)$  на интервалы убывания. Случай равенства в (30) дает уравнение для точек экстремума:

$$\dot{\Pi}_0(t)/\Pi_0(t) = \dot{\Pi}(t)/\Pi(t). \quad (31)$$

Оно не зависит от  $\bar{\sigma}$  и  $p$  и в точности такое же, как и в случае одноосного растяжения, т.е. наложение давления не сдвигает точки экстремума  $\nu(t)$  (если они есть), и потому множества точек экстремума и интервалы монотонности всех графиков КПД (25) с разными  $\bar{\sigma}$  и  $p$  совпадают. Невыполнение этого свойства у семейства экспериментальных кривых  $\nu(t, q)$  некоторого материала — признак нелинейности его поведения и индикатор неприменимости ОС (1) для его моделирования.

На рис. 5 приведены графики  $\nu(t, q)$  и  $\xi(t, q)/3$  при фиксированном  $\bar{\sigma} = 1$  и давлениях  $p$ :  $p/\bar{\sigma} = i/3$ ,  $i = 0; 1; \dots; 5$  (кривые 0, 1–5) для двух моделей вида (10) с одинаковыми сдвиговыми ФП  $\Pi(t)$  ( $\beta = 0.010$ ,  $\gamma = 0.005$ ,  $\lambda = 0.1$ , время сдвиговой ретардации  $\tau = 1/\lambda = 10$ ) и двумя разными объемными ФП  $\Pi_0(t)$  с  $\beta_0 = 0.005$  и  $\gamma_0 = 0.004$ , различающимися только временами объемной ретардации:  $\lambda_0 = \lambda = 0.1$  (рис. 5, а) и  $\lambda_0 = 1$  (рис. 5, б). КП этих двух моделей приведены на рис. 3, а и 3, б. Любой график  $\nu(t)$  (сплошные кривые 0–5 на рис. 5) и  $\xi(t)$  (штриховые кривые 0–5) имеет при  $t \rightarrow \infty$  горизонтальную асимптоту (28):  $\nu(\infty) = (\frac{3}{2}\beta - q\beta_0)/(3\beta + q\beta_0)$ , а  $\xi(\infty) = q\beta_0/\beta$ . Чем больше давление  $p$ , тем выше лежит график  $\nu(t)$  и ниже — график  $\xi(t)$ . Если  $p < \bar{\sigma}/3$ , то  $\nu(t) < 0.5$  и  $\xi(t) > 0$ , при  $p = \bar{\sigma}/3$   $\nu(t) \equiv 0.5$ ,  $\xi(t) \equiv 0$  (прямые 1), а если  $p > \bar{\sigma}/3$ , то  $\nu(t) > 0.5$  и  $\xi(t) < 0$ . При достаточно большом  $p$  — когда на некотором интервале  $\xi(t) < -3$ , а  $\varepsilon_{11}(t) < 0$  (см. КП 7 для  $p/\bar{\sigma} = 5$  на рис. 3, б), — КПД  $\nu(t)$  становится отрицательным на этом интервале (и меньшим  $-1$ ), а равновесное значение  $\nu(\infty)$  отрицательно при  $q < -3\beta/\beta_0 = -6$ . КПД модели с  $\lambda_0 = 1$  (рис. 5, б) отличаются наличием точек максимума или минимума (в один и тот же момент времени, не зависящий от  $\bar{\sigma}$  и  $p$ ). Для сравнения приведены графики  $\nu(t)$  для модели с упругим изменением объема, т.е. с  $\gamma_0 = 0$  и  $\Pi_0(t) = \beta_0$  (штрих-пунктирные кривые); они стремятся к тем же асимптотам, но всегда монотонны на всей полуоси  $t > 0$ : если  $p \in [0; \bar{\sigma}/3)$ , то  $\nu(t)$  возрастает, а если  $p > \bar{\sigma}/3$ , то  $\nu(t)$  убывает.

На рис. 6 приведены графики  $\nu(t, q)$  и  $\xi(t, q)/3$  (штриховые линии) двух фрактальных моделей вида (11) с одинаковыми сдвиговыми ФП  $\Pi(t)$  ( $u = 0.5$ ,  $A = 0.005$ ,  $B = 0.01$ ) и двумя разными объемными ФП  $\Pi_0(t)$ : с  $A_0 = 0.01$ ,  $B_0 = 0.001$ ,  $w = 0.2 < u$  (рис. 6, а) и с  $w = 0.8 > u$  (рис. 6, б) при фиксированном  $\bar{\sigma} = 1$  и разных величинах давления  $p$ :  $p/\bar{\sigma} = i/3$ ,  $i = 0; 1; \dots; 4$  на рис. 6, а (кривые 0, 1–4) и  $p/\bar{\sigma} = 0; \frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{3}{6}; \frac{2}{3}; 1; 2; 3$  на рис. 6, б (кривые 0, 1–7). КП этих двух моделей приведены на рис. 4. На рис. 6, а все графики  $\nu(t)$  и  $\xi(t)$  имеют точки максимума или минимума (в один и тот же момент времени) и общую горизонтальную асимптоту при  $t \rightarrow \infty$ , не зависящую от

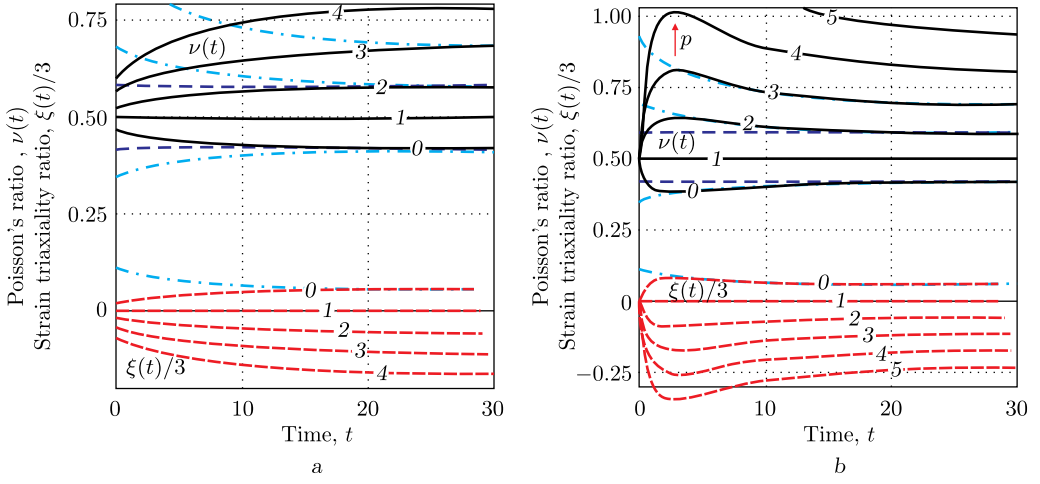


Рис. 5. Графики КПД  $\nu(t)$  и параметра вида деформированного состояния  $\xi(t)/3$  для модели (10) при фиксированном  $\bar{\sigma} = 1$  и разных величинах давления  $p$  (кривые 0, 1–5): а)  $\lambda_0 = \lambda = 0.1$ ; б)  $\lambda = 0.1, \lambda_0 = 1$  (онлайн в цвете)

[Figure 5 (color online) shows the Poisson's ratio  $\nu(t)$  and strain triaxiality ratio  $\xi(t)/3$  for model (10) under loadings with the fixed value of  $\bar{\sigma} = 1$  and different values of pressure  $p$  (values of  $p/\bar{\sigma} = 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}$  correspond to curves 0, 1–5); Fig. (a) corresponds to the model with  $\lambda_0 = \lambda = 0.1$ ; Fig. (b) corresponds to the model with  $\lambda = 0.1, \lambda_0 = 1$ ]

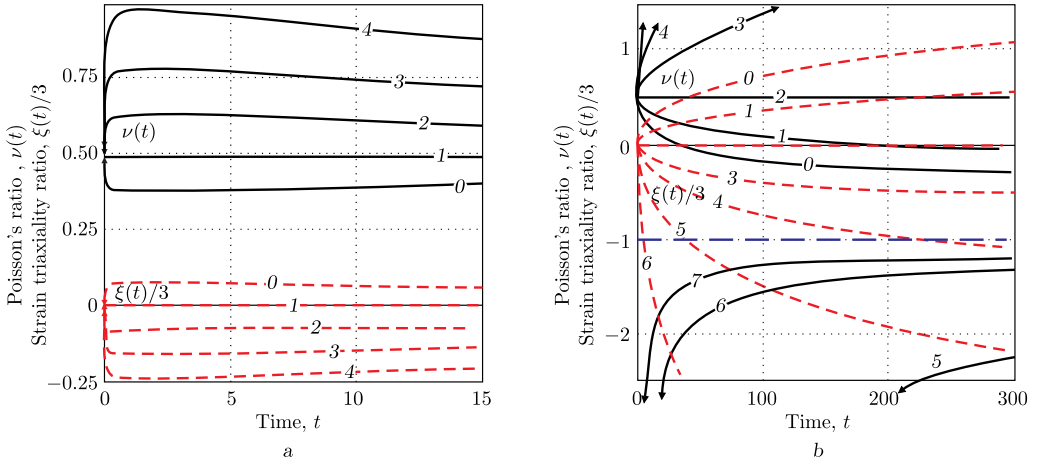


Рис. 6. Графики КПД  $\nu(t)$  и параметра вида деформированного состояния  $\xi(t)/3$  для фрактальной модели (11) при фиксированном  $\bar{\sigma} = 1$  и разных величинах давления  $p$ : а)  $w = 0.2 < u$ ; б)  $w = 0.8 > u$  (онлайн в цвете)

[Figure 6 (color online) shows the Poisson's ratio  $\nu(t)$  and strain triaxiality ratio  $\xi(t)/3$  for fractal model (11) under loadings with the fixed value of  $\bar{\sigma} = 1$  and different values of pressure  $p$ ; Fig. (a) corresponds to the model (11) with  $w = 0.2 < u$ , and values of  $p/\bar{\sigma} = 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3}$  correspond to curves 0, 1–4; Fig. (b) corresponds to the model (11) with  $w = 0.8 > u$ , and values of  $p/\bar{\sigma} = 0; \frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{3}{6}; \frac{2}{3}; 1; 2; 3$  correspond to curves 0, 1–7]

$\bar{\sigma}$  и  $p$ :  $\nu(\infty) = 0.5$  и  $\xi(\infty) = 0$ , поскольку  $w = 0.2 < u$ . При  $p < \bar{\sigma}/3$  будет  $\nu(t) < 0.5$ , а при  $p > \bar{\sigma}/3$  имеем  $\nu(t) > 0.5$  (кривые 2–4). Начальное значение  $\xi(0) = qB_0/B = q/10$  близко к нулю и потому начальное значение КПД  $\nu(0)$  близко к 0.5. На рис. 6, *b* все графики  $\nu(t)$  и  $\xi(t)$  стремятся к общей горизонтальной асимптоте:  $\xi(\infty) = +\infty$  и  $\nu(\infty) = -1$ , поскольку  $w = 0.8 > u$ . Они не имеют экстремумов:

- если  $p < \bar{\sigma}/3$ , то  $\xi(t)$  возрастает, а  $\nu(t)$  убывает до  $\nu(\infty) = -1$  (кривые 1, 2);
- если  $p > \bar{\sigma}/3$ , то  $\xi(t)$  убывает, а  $\nu(t)$  имеет разрыв второго рода в точке  $t = \hat{t}(q)$ , в которой  $\varepsilon_{11}(t, q) = 0$  (т.е.  $\xi(t, q) = -3$ ), и возрастает на каждом из интервалов  $(0; \hat{t})$  и  $(\hat{t}; +\infty)$  (кривые 4–7).

### 6. Случай постоянства коэффициента поперечной деформации.

Предположение о независимости коэффициента Пуассона от времени часто применяется для упрощения решения краевых задач. В силу (26) критерий постоянства КПД (25) равносильен постоянству параметра  $\xi(t)$ , он налагает связь на сдвиговую и объемную ФП:  $\xi(t) = k$ , или

$$q\Pi_0(t) = k\Pi(t), \quad t > 0, \quad (32)$$

(в силу (26)  $\nu = -1 + 4.5/(3+k)$  и  $k = 3(0.5 - \nu)(1 + \nu)^{-1}$ ). Тождество (32) не может выполняться при всех  $q$  (всех  $p > 0$  для некоторого фиксированного  $\bar{\sigma}$ ) или хотя бы для двух разных значений  $q$ , если  $\nu$  (и  $k$ ) не зависит от  $q$ , за исключением случая несжимаемого материала (с  $\Pi_0(t) \equiv 0$ ,  $\nu = 0.5$ ). Из (32) следует, что  $k = Cq$ ,  $C > 0$ , и (32) принимает вид  $\Pi_0(t) = C\Pi(t)$ , т.е. совпадает с критерием постоянства КПД (15) при одноосном нагружении (при  $p = 0$ ). Для такой модели (с одной материальной функцией и параметром  $C$ )  $\nu = -1 + 4.5(3 + Cq)^{-1}$  и по (20)

$$\varepsilon_{11} = \bar{\sigma}\left(1 + \frac{1}{3}Cq\right)\Pi(t), \quad \varepsilon_{\perp} = \bar{\sigma}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}Cq\right)\Pi(t), \quad (33)$$

т.е. все осевые и поперечные КП (с произвольными  $p \geq 0$ ,  $\bar{\sigma} > 0$ ) подобны и являются монотонными и выпуклыми (вверх или вниз) функциями времени при  $t > 0$ , в частности,  $\varepsilon_{11}(t)$  возрастает и выпукла вверх при любом  $q > -3/C$ , а  $\varepsilon_{\perp}(t)$  — при  $q > 3/(2C)$ . Физический смысл материального параметра  $C$ :  $C = \Pi_0(0)/\Pi(0) = 3G/K$  (отношение мгновенных модулей). Гипотеза о постоянстве КПД существенно обедняет спектр возможных форм КП  $\varepsilon_{11}(t)$  и  $\varepsilon_{\perp}(t)$  (они уже не могут иметь точки экстремума и перегиба) и расширяет список индикаторов неприменимости модели.

**7. Случай упругой зависимости объемной деформации от среднего напряжения.** Если  $\Pi_0(t) = c = \text{const} > 0$ , т.е. когда объемная ползучесть считается отсутствующей, имеем

$$\theta = cq\bar{\sigma}, \quad \varepsilon_{11}(t; \bar{\sigma}, p) = \bar{\sigma}\left[\Pi(t) + \frac{1}{3}cq\right], \quad \varepsilon_{\perp}(t; \bar{\sigma}, p) = \bar{\sigma}\left[-\frac{1}{2}\Pi(t) + \frac{1}{3}cq\right], \quad (34)$$

$$\nu(t, q) = \frac{3\Pi(t) - 2qc}{6\Pi(t) + 2qc} = 0.5 - \frac{3qc}{6\Pi(t) + 2qc}, \quad \xi(t, q) = \frac{zcq}{\Pi(t)}. \quad (35)$$

Для любых  $\bar{\sigma} > 0$ ,  $p \geq 0$  деформация  $\theta(t)$  постоянна,  $\varepsilon_{11}(t)$  возрастает и выпукла вверх, а  $\varepsilon_{\perp}(t)$  убывает и выпукла вниз при  $t > 0$ , ибо  $\bar{\sigma}\dot{\Pi}(t) > 0$

и  $\bar{\sigma}\ddot{\Pi}(t) < 0$ . Если  $p \in [0; \bar{\sigma}/3)$  (тогда  $\theta > 0$ ), то  $\xi(t) > 0$  и убывает,  $\nu(t)$  возрастает при  $t > 0$  (см. штрих-пунктирные кривые на рис. 6), как и при одноосном растяжении, а модуль  $\varepsilon_{\perp}(t)$  может быть немонотонным, если выполнено неравенство  $\bar{\sigma}\Pi(0) < \frac{2}{3}cq\bar{\sigma} < \bar{\sigma}\Pi(\infty)$  (означающее, что  $\varepsilon_{\perp}(0) > 0$  и  $\varepsilon_{\perp}(\infty) < 0$ ). Если же  $p > \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  (тогда  $\theta < 0$ ), то  $\xi(t) < 0$  и возрастает при  $t > 0$ , а  $\nu(t)$  убывает на каждом из интервалов  $(0; \hat{t})$  и  $(\hat{t}; +\infty)$ , где  $\hat{t}(q)$  — решение уравнения  $\xi(t, q) = -3$ , т.е.  $\Pi(t) = -cq/3$ . Решение (точка разрыва второго рода у  $\nu(t)$ ) существует, если  $\Pi(0) < -cq/3 < \Pi(\infty)$  (тогда оно единственно, ибо  $\Pi(t)$  возрастает); если решения нет, то  $\nu(t)$  убывает на всем луче  $[0; +\infty)$ .

Критерий отрицательности КПД (27) принимает вид  $\frac{3}{2}\Pi(t) < qc$  или  $3\Pi(t) < -qc$ . Первое неравенство работает при  $p < \frac{1}{3}\bar{\sigma}$ , а второе — при  $p > \frac{1}{3}\bar{\sigma}$ . Если одно из них справедливо в некоторый момент времени  $t = t_-$ , то  $\nu(t) < 0$  при всех  $t \in [0; t_-)$  (в силу возрастания  $\Pi(t)$ ).

Из (35) следует, что при  $t \rightarrow \infty$   $\nu(t)$  стремится к пределу  $\nu_{\infty} = (3L - 2cq)/(6L + 2cq)$ ,  $L = \Pi(\infty) \leq \infty$ . Если  $\Pi(\infty) < \infty$ , то  $\nu_{\infty} < 0,5$ , а если  $\Pi(\infty) = \infty$ , то  $\nu_{\infty} = 0,5$ .

Критерий независимости КПД от времени (32) выполняется только в двух случаях:

- 1) при  $c = 0$  (несжимаемый материал), тогда  $\nu(t) \equiv 0,5$  для любых  $\bar{\sigma} > 0$ ,  $p \geq 0$ ;
- 2)  $\Pi(t) = a = \text{const}$  (упругий материал), но тогда КПД  $\nu = 0,5 - 3qc \times (6a + 2qc)^{-1}$  зависит от  $q$ .

Как и в общем случае,  $\xi(t; \bar{\sigma}, p)$  и семейства КП  $\varepsilon_{11}(t; \bar{\sigma}, p)$  и  $\varepsilon_{\perp}(t; \bar{\sigma}, p)$  возрастают по  $q$  и  $\bar{\sigma}$  и убывают по  $p$ , а КПД  $\nu(t; \bar{\sigma}, p)$  убывает по  $q$  и  $\bar{\sigma}$  и возрастает по  $p$ .

Модель с  $\Pi_0(t) = \text{const}$  обладает весьма специфичным свойством: *разность любых двух КП (34) (осевых или поперечных) с одинаковым уровнем  $\bar{\sigma}$ , но разными давлениями  $p_1, p_2 > 0$ , не зависит от времени*: для любых  $\bar{\sigma}, p_1, p_2 > 0$  и  $t > 0$

$$\varepsilon_{11}(t; \bar{\sigma}, p_2) - \varepsilon_{11}(t, \bar{\sigma}, p_1) = \delta, \quad \varepsilon_{\perp}(t; \bar{\sigma}, p_2) - \varepsilon_{\perp}(t, \bar{\sigma}, p_1) = \delta, \quad (36)$$

где  $\delta := \frac{1}{3}c\bar{\sigma}(q_2 - q_1) = \frac{1}{3}c(p_1 - p_2)$ , т.е. КП с разными давлениями получают друг из друга сдвигом вдоль оси деформации  $\varepsilon_{11}$  или  $\varepsilon_{\perp}$  (причем на одинаковую величину  $\delta$ , пропорциональную разности давлений, для осевых и поперечных деформаций). Указанные свойства, особенно тождества (36) с разными значениями  $t, \bar{\sigma}, p_1, p_2 > 0$  и тождество  $\varepsilon_{11}(t, \bar{\sigma}, p) + 2\varepsilon_{\perp}(t, \bar{\sigma}, p) = cq\bar{\sigma}$  (в частности независимость от времени его левой части, т.е. объемной деформации), можно (и удобно) использовать как индикаторы применимости гипотезы об отсутствии объемной ползучести в сочетании с ОС (1) по результатам серии испытаний материала на ползучесть при совместном действии растягивающей силы и давления (с разными уровнями  $p$  и  $\bar{\sigma}$ ), в которых регистрируются продольная и поперечная деформации  $\varepsilon_{11}(t; \bar{\sigma}, p)$  и  $\varepsilon_{\perp}(t; \bar{\sigma}, p)$ . ФП  $\Pi_0$ , т.е. постоянная  $c$ , легко находится по данным таких испытаний из соотношения  $\theta(t; \bar{\sigma}, p) = cq\bar{\sigma}$  по измеренной величине  $\theta = \varepsilon_{11}(t, \bar{\sigma}, p) + 2\varepsilon_{\perp}(t, \bar{\sigma}, p)$ . ФП  $\Pi(t)$  можно найти из уравнения КП (34) или из тождества  $\varepsilon_{11}(t, \bar{\sigma}, p) - \varepsilon_{\perp}(t, \bar{\sigma}, p) = 1,5\bar{\sigma}\Pi(t)$  (детальная разработка ме-

тодик идентификации ОС (1) — тема других статей). Нарушение указанных свойств у данных испытаний реономных материалов (см., например, данные в [5, 6, 20]) свидетельствует о недопустимости пренебрежения объемной ползучестью.

**8. Заключение.** Аналитически изучены общие качественные свойства семейств кривых объемной, продольной и поперечной ползучести (19)–(21), порождаемых линейным ОС (1) с произвольными функциями сдвиговой и объемной ползучести  $\Pi(t)$ ,  $\Pi_0(t)$  при двухпараметрических нагружениях вида (4): интервалы монотонности и выпуклости осевой и поперечной деформаций  $\varepsilon_{11}(t)$  и  $\varepsilon_{\perp}(t)$ , точки экстремума, перемены знака и асимптотика КП, их зависимость от параметров  $p$  и  $\bar{\sigma}$  нагружения (4) и от качественных характеристик функций ползучести. Выведена формула (26), связывающая коэффициент Пуассона  $\nu = -\varepsilon_{\perp}(t)/\varepsilon_{11}(t)$ , точнее, коэффициент поперечной деформации (КПД), и параметры вида деформированного и напряженного состояний  $\xi = \theta(t)/\varepsilon(t) = q\Pi_0(t)/\Pi(t)$  и  $q := \frac{1}{3} - p/\bar{\sigma} = \sigma_0(t)/\sigma(t)$ , исследовано выражение (25) для КПД через время, параметры нагружения (4) и функции ползучести ОС (1). Существенное отличие линейного ОС от нелинейных ОС вязкоупругости [55, 91] состоит в том, что при одноосном нагружении КПД и осевая податливость не зависят от уровня напряжения и от его знака, а при совместном действии растягивающей нагрузки и давления КПД зависит только от относительной величины давления  $p/\bar{\sigma}$  (от параметра  $q$ ), не входящего в аргументы материальных функций, и отношения функций ползучести (отсутствие этих свойств у данных испытаний реономных материалов свидетельствует о нелинейности их поведения — см., например, [5, 6, 13, 14, 20, 31, 40]). Найдены условия монотонности и немонотонности  $\xi(t)$  и  $\nu(t)$  и критерий отрицательности КПД на некотором интервале времени, получены точные оценки для диапазона изменения КПД. Показано, что объемная ползучесть материала и величина параметра нагружения  $p/\bar{\sigma}$  существенно влияют на качественное поведение кривых осевой и поперечной ползучести  $\varepsilon_{11}(t)$  и  $\varepsilon_{\perp}(t)$  и КПД. Доказано, что линейное ОС (1) способно качественно моделировать немонотонное изменение и знакопеременность поперечной деформации  $\varepsilon_{\perp}(t)$  и отрицательность КПД даже при нулевом давлении (см. данные испытаний в [5, 6, 19, 42, 43, 49]), а осевая деформация  $\varepsilon_{11}(t)$  может стать немонотонной при  $p/\bar{\sigma} > \frac{1}{3}$ . Основные доказанные утверждения собраны в теореме.

**ТЕОРЕМА.** Пусть функции ползучести  $\Pi(t)$  и  $\Pi_0(t)$  в ОС (1) положительны, непрерывно дифференцируемы, возрастают и нестрого выпуклы вверх на полуоси  $t > 0$ . Тогда семейства кривых ползучести (19)–(21), порождаемые ОС (1) при нагружениях вида (4) (с  $\bar{\sigma} > 0$ ,  $p > 0$  и  $q \leq \frac{1}{3}$ ), и коэффициент поперечной деформации (25) обладают следующими свойствами.

1. Семейства КП (19)–(21) возрастают по параметру нагружения  $q := \frac{1}{3} - p/\bar{\sigma}$  и (неограниченно) убывают по  $p$  при любых  $t$  и  $\bar{\sigma}$ .
2. КПД  $\nu = -\varepsilon_{\perp}(t, q)/\varepsilon_{11}(t, q)$  выражается формулами (25) и (26) и зависит только от отношений  $p/\bar{\sigma}$  и  $\Pi_0(t)/\Pi(t)$ ; КПД убывает по  $q$  и возрастает по  $p$ .
3. Критерий отрицательности  $\nu(t)$  на некотором интервале времени имеет вид (27), с ростом  $|q|$  область отрицательности может только расширяться.
4. КПД  $\nu(t)$  может иметь точки максимума и минимума, они явля-



ются корнями уравнения (31); множества точек экстремума и интервалы монотонности всех графиков КПД с разными  $\bar{\sigma}$  и  $p$  совпадают; критерий неубывания  $\nu(t)$  на некотором интервале времени – неравенство (30).

5. Если  $0 \leq p < \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  ( $q \in (0; \frac{1}{3}]$ ), то  $\theta(t) > 0$  и  $\varepsilon_{11}(t) > 0$ , объемная и осевая КП (19) и (20) возрастают по  $t$  и выпуклы вверх на полуоси  $t > 0$ , а поперечная деформация  $\varepsilon_{\perp}(t)$  может менять знак и не обязана быть монотонной или выпуклой функцией:  $\varepsilon_{\perp}(t)$  может убывать на всем луче  $t \geq 0$  и может иметь точки экстремума или перегиба (корни уравнений (23)).
6. Если  $0 \leq p < \frac{1}{3}\bar{\sigma}$ , то  $\xi(t) > 0$  при  $t > 0$ , КПД меняется в диапазоне  $-1 < \nu(t, q) < 0.5$ , причем  $\nu(t)$  может быть немонотонной функцией времени и может менять знак (даже при  $p = 0$ ).
7. Если  $p = \frac{1}{3}\bar{\sigma}$ , то  $\theta(t) \equiv 0$ ,  $\nu(t) \equiv 0.5$ , осевая КП имеет вид  $\varepsilon_{11}(t) = \bar{\sigma}\Pi(t)$ , возрастает и выпукла вверх при  $t > 0$ , а  $\varepsilon_{\perp}(t) = -0.5\varepsilon_{11}(t)$  и убывает.
8. Если  $p > \frac{1}{3}\bar{\sigma}$ , то  $\theta(t; \bar{\sigma}, p) < 0$  и убывает по  $t$ , поперечная деформация (21) отрицательна, убывает и выпукла вниз на полуоси  $t > 0$ , а осевая КП  $\varepsilon_{11}(t)$  может быть (в зависимости от соотношения между  $\Pi(t)$  и  $q\Pi_0(t)$ ) возрастающей или убывающей на луче  $t \geq 0$ , может иметь точки экстремума (корни уравнения (22)) и точки перегиба и может менять знак.
9. Если  $p > \frac{1}{3}\bar{\sigma}$ , то  $\xi(t) < 0$ , неравенство  $-1 < \nu(t) < 0.5$  для КПД не выполняется при всех  $t$ : если  $\xi(t) \in (-3; 0)$ , то  $\nu(t) > 0.5$ , а если  $\xi(t) < -3$ , то  $\nu(t) < -1$  (и  $\varepsilon_{11}(t) < 0$ ).
10. Если обе ФП ограничены, то КП (19)–(21),  $\nu(t, q)$  и  $\xi(t, q)$  имеют горизонтальные асимптоты (24) и (28) при  $t \rightarrow \infty$ ; если  $p < \frac{1}{3}\bar{\sigma}$ , то  $-1 < \nu(\infty, q) < 0.5$ , а если  $p > \frac{1}{3}\bar{\sigma}$ , то  $\nu(\infty, q) \notin [-1; 0.5]$ ; критерий отрицательности предела  $\nu(\infty, q)$  – совокупность неравенств (29).

Обнаруженные свойства КП и КПД (прежде всего, пп. 1, 2, 4–9 теоремы) удобно использовать как маркеры границы области линейного поведения материалов при анализе данных испытаний на ползучесть по программам нагружения (4) и как индикаторы неприменимости ОС (1) для моделирования в случае их нарушения в испытаниях материала.

Исследованы специфические свойства КП, порождаемых линейным ОС (1) в сочетании с предположением о линейно-упругом изменении объема или гипотезой о постоянстве коэффициента Пуассона (пп. 6, 7). Пренебрежение объемной ползучестью, как и пренебрежение изменением коэффициента Пуассона, существенно обедняет спектр возможных форм КП  $\varepsilon_{11}(t)$  и  $\varepsilon_{\perp}(t)$  (они уже не могут иметь точки экстремума и перегиба) и расширяет список индикаторов неприменимости подобных моделей (с одной материальной функцией), в частности, КП (33) и (34) и КДП (35) не могут иметь точек экстремума и перегиба: они монотонны и выпуклы вверх или вниз (см., например, экспериментальные данные в [12, 13, 25, 28, 33, 38, 39]).

Таким образом, в статье показано, что линейное ОС вязкоупругости (1) для нестареющих изотропных сред, пренебрегающее влиянием шаровой и девиаторной частей тензоров напряжений и деформаций друг на друга и влиянием их третьих инвариантов, в принципе, способно качественно воспроиз-

водить все основные эффекты, связанные с поведением КПД (монотонность, немонотонность, знакопеременность, отрицательность КПД, его стабилизация с течением времени и т.п.), за исключением зависимости КПД от уровня напряжения и стабилизации семейства осевых КП  $\varepsilon_{11}(t, p)$  с фиксированным  $\bar{\sigma}$  при достаточно высоком давлении [5, 6, 20].

**Конкурирующие интересы.** Конкурирующих интересов не имею.

**Авторская ответственность.** Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

**Финансирование.** Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 17-08-01146\_a).

### Библиографический список

1. Береснев Б. И., Мартынов Е. Д., Родионов К. П. *Пластичность и прочность твердых тел при высоких давлениях*. М.: Наука, 1970. 581 с.
2. Москвитин В. В. *Сопротивление вязкоупругих материалов (применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе)*. М.: Наука, 1972. 328 с.
3. Айнбиндер С. Б., Алксне К. И., Тюнина Э. Л., Лака М. Г. *Свойства полимеров при высоких давлениях*. М.: Химия, 1973. 192 с.
4. Айнбиндер С. Б., Тюнина Э. Л., Цируле К. И. *Свойства полимеров в различных напряженных состояниях*. М.: Химия, 1981. 232 с.
5. Гольдман А. Я. *Объемная деформация пластмасс*. Л.: Машиностроение, 1984. 232 с.
6. Гольдман А. Я. *Прогнозирование деформационно-прочностных свойств полимерных и композиционных материалов*. Л.: Химия, 1988. 272 с.
7. Mileiko S. T. Creep and Creep Rupture / *Metal and ceramic based composites* / Composite Materials Series, 12. Amsterdam: Elsevier, 1997. pp. 307–332. doi: [10.1016/S0927-0108\(97\)80024-0](https://doi.org/10.1016/S0927-0108(97)80024-0).
8. Мошев В. В., Свистков А. Л., Гаришин О. К. и др. *Структурные механизмы формирования механических свойств зернистых полимерных композитов*. Екатеринбург: УрО РАН, 1997. 508 с.
9. Глезер А. М., Пермякова И. Е., Громов В. Е., Коваленко В. В. *Механическое поведение аморфных сплавов*. Новокузнецк: Сиб. гос. индустр. ун-т, 2006. 416 с.
10. Valiev R. Z., Pushin V. G. Bulk nanostructured metallic materials: Production, structure, properties, and functioning // *Physics of Metals and Metallography*, 2002. vol. 94. pp. S1–S3.
11. Баженов С. Л., Берлин А. А., Кульков А. А., Ошмян В. Г. *Полимерные композиционные материалы. Прочность и технологии*. М.: Интеллект, 2009. 352 с.
12. Брехова В. Д. Исследование коэффициента Пуассона при сжатии некоторых кристаллических полимеров постоянной нагрузкой // *Механика полимеров*, 1965. № 4. С. 43–46.
13. Дзене И. Я., Путанс А. В. Коэффициент Пуассона при одномерной ползучести полиэтилена // *Механика полимеров*, 1967. № 5. С. 947–949.
14. Лака М. Г., Дзенис А. А. Влияние гидростатического давления на прочностные свойства полимерных материалов при растяжении // *Механика полимеров*, 1967. № 6. С. 1043–1047.
15. Просвирин В. И., Молчанов Ю. М. Изменение тонкой структуры поликапролактама при всестороннем сжатии // *Механика полимеров*, 1968. № 4. С. 579–585.
16. Pampillo C. A., Davis L. A. Volume change during deformation and pressure dependence of yield stress // *J. Appl. Phys.*, 1971. vol. 42, no. 12. pp. 4674–4679. doi: [10.1063/1.1659838](https://doi.org/10.1063/1.1659838).
17. Powers J. M., Caddell R. M. The macroscopic volume changes of selected polymers subjected to uniform tensile deformation // *Polym. Eng. Sci.*, 1972. vol. 12. pp. 432–436.
18. Локощенко А. М., Малинин Н. И., Москвитин В. В., Строганов Г. К. Об учете влияния гидростатического давления при описании нелинейных вязкоупругих свойств полиэтилена высокой плотности // *Механика полимеров*, 1974. № 6. С. 998–1002.

19. Дзене И. Я., Креггерс А. Ф., Вилкс У. К. Особенности процесса деформирования при ползучести и повторной ползучести полимеров в условиях одноосного растяжения. Часть 1 // *Механика полимеров*, 1974. № 3. С. 399–405.
20. Ольховик О. Е., Гольдман А. Я. Ползучесть фторопласта при совместном действии растяжения и гидростатического давления // *Механика полимеров*, 1977. № 3. С. 434–438.
21. Ольховик О. Е., Гольдман А. Я. Ползучесть фторопласта при сдвиге с наложением гидростатического давления // *Механика полимеров*, 1977. № 5. С. 812–818.
22. Гольдман А. Я., Цыганков С. А. Прогнозирование деформации ползучести полимерных материалов при сложном напряженном состоянии // *Механика композитных материалов*, 1980. № 6. С. 1088–1093.
23. Ольховик О. Е., Баранов В. Г. Влияние температуры, давления и объема на релаксационные свойства полиэтилена низкой плотности при растяжении // *Высокомолек. соед. А*, 1981. Т. 23, № 7. С. 1443–1452.
24. Щербак В. В., Гольдман А. Я. Объемные изменения дисперсно наполненных композиций при испытании в условиях ползучести // *Мех. композит. матер.*, 1982. № 3. С. 549–552.
25. Калинин А. Е., Вахрушев А. В. О соотношении поперечной и продольной деформаций при одноосной ползучести разносопротивляющихся материалов // *Мех. композит. матер.*, 1985. № 2. С. 351–354.
26. Knauss W. G., Emri I. Volume change and the nonlinearly thermoviscoelastic constitution of polymers // *Polym. Eng. Sci.*, 1987. vol. 27, no. 1. pp. 86–100. doi: [10.1002/pen.760270113](https://doi.org/10.1002/pen.760270113).
27. Naqui S. I., Robinson I. M. Tensile dilatometric studies of deformation in polymeric materials and their composites // *J. Mater. Sci.*, 1993. vol. 28, no. 6. pp. 1421–1429. doi: [10.1007/BF00363333](https://doi.org/10.1007/BF00363333).
28. Delin M., Rychwalski R. W., Kubát J., Kubát M. J., Bertilsson H., Klason C. Volume changes during flow of solid polymers // *J. Non-Cryst. Solids*, 1994. vol. 172–174. pp. 779–785. doi: [10.1016/0022-3093\(94\)90577-0](https://doi.org/10.1016/0022-3093(94)90577-0).
29. Delin M., Rychwalski R., Kubát J. Volume changes during stress relaxation in polyethylene // *Rheol. Acta*, 1995. vol. 34, no. 2. pp. 182–195. doi: [10.1007/BF00398438](https://doi.org/10.1007/BF00398438).
30. Tschoegl N. W. Time Dependence in Material Properties: An Overview // *Mech. Time-Depend. Mater.*, 1997. vol. 1, no. 1. pp. 3–31. doi: [10.1023/A:1009748023394](https://doi.org/10.1023/A:1009748023394).
31. Özüpek S., Becker E. B. Constitutive Equations for Solid Propellants // *J. Engng Mater. Technol.*, 1997. vol. 119, no. 2. pp. 125–132. doi: [10.1115/1.2805983](https://doi.org/10.1115/1.2805983).
32. Hilton H. H. Implications and constraints of time-independent Poisson's Ratios in linear isotropic and anisotropic viscoelasticity // *J. Elasticity*, 2001. vol. 63, no. 3. pp. 221–251. doi: [10.1023/A:1014457613863](https://doi.org/10.1023/A:1014457613863).
33. Tschoegl N. W., Knauss W. G., Emri I. Poisson's ratio in linear viscoelasticity – a critical review // *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2002. vol. 6, no. 1. pp. 3–51. doi: [10.1023/A:1014411503170](https://doi.org/10.1023/A:1014411503170).
34. Arzoumanidis G. A., Liechti K. M. Linear viscoelastic property measurement and its significance for some nonlinear viscoelasticity models // *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2003. vol. 7, no. 3. pp. 209–250. doi: [10.1023/B:MTDM.0000007357.18801.13](https://doi.org/10.1023/B:MTDM.0000007357.18801.13).
35. Cangemi L., Elkoun S., G'Sell C., Meimon Y. Volume strain changes of plasticized Poly(vinylidene fluoride) during tensile and creep tests // *J. Appl. Polym. Sci.*, 2004. vol. 91, no. 3. pp. 1784–1791. doi: [10.1002/app.13313](https://doi.org/10.1002/app.13313).
36. Addiego F., Dahoun A., G'Sell C., Hiver J. M. Volume Variation Process of High-Density Polyethylene During Tensile and Creep Tests // *Oil & Gas Science and Technology – Rev. IFP*, 2006. vol. 61, no. 6. pp. 715–724. doi: [10.2516/ogst:2006009](https://doi.org/10.2516/ogst:2006009).
37. Ломакин Е. В. Механика сред с зависящими от вида напряженного состояния свойствами // *Физическая мезомеханика*, 2007. Т. 10, № 5. С. 41–52.
38. Савиных А. С., Гаркушин Г. В., Разоренов С. В., Канель Г. И. Продольная и объемная сжимаемость натриево-известкового стекла при давлениях до 10 ГПа // *Журнал технической физики*, 2007. Т. 77, № 3. С. 38–42.

39. Pandini S., Pegoretti A. Time, temperature, and strain effects on viscoelastic Poisson's ratio of epoxy resins // *Polym. Eng. Sci.*, 2008. vol. 48, no. 7. pp. 1434–1441. doi: [10.1002/pen.21060](https://doi.org/10.1002/pen.21060).
40. Быков Д. Л., Пелешко В. А. Определяющие соотношения деформирования и разрушения наполненных полимерных материалов в процессах преобладающего осевого растяжения в различных барометрических условиях // *Изв. РАН. МТТ*, 2008. № 6. С. 40–65.
41. Shekhar H., Sahasrabudhe A. D. Longitudinal Strain Dependent Variation of Poissons Ratio for HTPB Based Solid Rocket Propellants in Uni-axial Tensile Testing // *Prop., Explos., Pyrotech.*, 2011. vol. 36, no. 6. pp. 558–563. doi: [10.1002/prop.200900079](https://doi.org/10.1002/prop.200900079).
42. Tscharnuter D., Jerabek M., Major Z., Lang R. W. Time-dependent Poisson's ratio of polypropylene compounds for various strain histories // *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2011. vol. 15, no. 1. pp. 15–28. doi: [10.1007/s11043-010-9121-x](https://doi.org/10.1007/s11043-010-9121-x).
43. Grassia L., D'Amore A., Simon S. L. On the Viscoelastic Poisson's Ratio in Amorphous Polymers // *Journal of Rheology*, 2010. vol. 54, no. 5. pp. 1009–1022. doi: [10.1122/1.3473811](https://doi.org/10.1122/1.3473811).
44. Cui H. R., Tang G. J., Shen Z. B. Study on viscoelastic Poisson's ratio of solid propellants using digital image correlation method // *Prop., Explos., Pyrotech.*, 2016. vol. 41, no. 5. pp. 835–84. doi: [10.1002/prop.201500313](https://doi.org/10.1002/prop.201500313).
45. Lakes R. Foam structure with a negative Poisson's ratio // *Science*, 1987. vol. 235, no. 4792. pp. 1038–1040. doi: [10.1126/science.235.4792.1038](https://doi.org/10.1126/science.235.4792.1038).
46. Friis E. A., Lakes R. S., Park J. B. Negative Poisson's ratio polymeric and metallic materials // *J. Mater. Sci.*, 1988. vol. 23, no. 12. pp. 4406–4414. doi: [10.1007/BF00551939](https://doi.org/10.1007/BF00551939).
47. Берлин А. А., Ротенбург Л., Басэрг Р. Особенности деформации неупорядоченных полимерных и неполимерных тел // *Высокомолек. соед. А*, 1992. Т. 34, № 7. С. 6–32.
48. Milton G. W. Composite materials with Poisson's ratios close to  $-1$  // *J. Mech. Phys. Solids*, 1992. vol. 40, no. 5. pp. 1105–1137. doi: [10.1016/0022-5096\(92\)90063-8](https://doi.org/10.1016/0022-5096(92)90063-8).
49. Lakes R. S., Elms K. Indentability of conventional and negative Poisson's ratio foams // *J. Compos. Mater.*, 1993. vol. 27, no. 12. pp. 1193–1202. doi: [10.1177/002199839302701203](https://doi.org/10.1177/002199839302701203).
50. Caddock B. D., Evans K. E. Negative Poisson ratios and strain-dependent mechanical properties in arterial prostheses // *Biomaterials*, 1995. vol. 16, no. 14. pp. 1109–1115. doi: [10.1016/0142-9612\(95\)98908-W](https://doi.org/10.1016/0142-9612(95)98908-W).
51. Chan N., Evans K. E. Indentation resilience of conventional and auxetic foams // *J. Cell. Plastics*, 1998. vol. 34, no. 3. pp. 231–260. doi: [10.1177/0021955X9803400304](https://doi.org/10.1177/0021955X9803400304).
52. Alderson K. L., Fitzgerald A., Evans K. E. The strain dependent indentation resilience of auxetic microporous polyethylene // *J. Mater. Sci.*, 2000. vol. 35, no. 16. pp. 4039–4047. doi: [10.1023/A:1004830103411](https://doi.org/10.1023/A:1004830103411).
53. Конек Д. А., Войцеховски К. В., Плескачевский Ю. М., Шилько С. В. Материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона (обзор) // *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2004. Т. 10, № 1. С. 35–69.
54. Greer A. L., Lakes R. S., Rouxel T., Greaves G. N. Poisson's ratio and modern materials // *Nature Materials*, 2011. vol. 10, no. 11. pp. 823–837. doi: [10.1038/nmat3134](https://doi.org/10.1038/nmat3134).
55. Хохлов А. В. Моделирование зависимости кривых ползучести при растяжении и коэффициента Пуассона реономных материалов от гидростатического давления с помощью нелинейно-наследственного соотношения Работнова // *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2018. Т. 24, № 3. С. 407–436. doi: [10.33113/mkkm.ras.2018.24.03.407\\_436.07](https://doi.org/10.33113/mkkm.ras.2018.24.03.407_436.07).
56. Голуб В. П. Исследования в области циклической ползучести материалов (обзор) // *Прикл. механика*, 1987. Т. 23, № 12. С. 3–19.
57. Krempl E., Khan F. Rate (time)-dependent deformation behavior: an overview of some properties of metals and solid polymers // *Int. J. Plasticity*, 2003. vol. 19, no. 7. pp. 1069–1095. doi: [10.1016/S0749-6419\(03\)00002-0](https://doi.org/10.1016/S0749-6419(03)00002-0).
58. Knauss W. G., Emri I., Lu H. Mechanics of Polymers: Viscoelasticity / *Springer Handbook of Experimental Solid Mechanics*; ed. W. N. Sharpe. Boston, MA: Springer, 2008. pp. 49–96. doi: [10.1007/978-0-387-30877-7\\_3](https://doi.org/10.1007/978-0-387-30877-7_3).

59. Khan F., Yeakle C. Experimental investigation and modeling of non-monotonic creep behavior in polymers // *Int. J. Plasticity*, 2011. vol. 27, no. 4. pp. 512–521. doi: [10.1016/j.ijplas.2010.06.007](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2010.06.007).
60. Drozdov A. D. Time-dependent response of polypropylene after strain reversal // *Int. J. Solids Struct.*, 2010. vol. 47, no. 24. pp. 3221–3233. doi: [10.1016/j.ijsolstr.2010.08.001](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.08.001).
61. Kästner M., Obst M., Brummund J., Thielsch K., Ulbricht V. Inelastic material behavior of polymers – Experimental characterization, formulation and implementation of a material model // *Mech. Mat.*, 2012. vol. 52. pp. 40–57. doi: [10.1016/j.mechmat.2012.04.011](https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2012.04.011).
62. Fernandes V. A., De Focatiis D. S. The role of deformation history on stress relaxation and stress memory of filled rubber // *Polymer Testing*, 2014. vol. 40. pp. 124–132. doi: [10.1016/j.polymeresting.2014.08.018](https://doi.org/10.1016/j.polymeresting.2014.08.018).
63. Drozdov A. D., Dusunceli N. Unusual mechanical response of carbon black-filled thermoplastic elastomers // *Mech. Mat.*, 2014. vol. 69, no. 1. pp. 116–131. doi: [10.1016/j.mechmat.2013.09.019](https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2013.09.019).
64. Хохлов А. В. Кривые длительной прочности, порождаемые линейной теорией вязкоупругости в сочетании с критериями разрушения, учитывающими историю деформирования // *Труды МАИ*, 2016. № 91. С. 1–32.
65. Хохлов А. В. Анализ общих свойств кривых ползучести при циклических ступенчатых нагружениях, порождаемых линейной теорией наследственности // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 2. С. 326–361. doi: [10.14498/vsgtu1533](https://doi.org/10.14498/vsgtu1533).
66. Хохлов А. В. Анализ свойств кривых ползучести с произвольной начальной стадией нагружения, порождаемых линейной теорией наследственности // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 1. С. 65–95. doi: [10.14498/vsgtu1543](https://doi.org/10.14498/vsgtu1543).
67. Хохлов А. В. Двусторонние оценки для функции релаксации линейной теории наследственности через кривые релаксации при гауп-деформировании и методики ее идентификации // *Изв. РАН. МТТ*, 2018. № 3. С. 81–104. doi: [10.7868/S0572329918030108](https://doi.org/10.7868/S0572329918030108).
68. Хохлов А. В. Анализ общих свойств кривых ползучести при ступенчатом нагружении, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для вязкоупругопластичных материалов // *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2017. № 3. С. 93–123. doi: [10.18698/1812-3368-2017-3-93-123](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2017-3-93-123).
69. Хохлов А. В. Анализ свойств кривых релаксации с начальной стадией гауп-деформирования, порождаемых нелинейной теорией наследственности Работнова // *Мех. композит. матер.*, 2018. Т. 54, № 4. С. 687–708.
70. Хохлов А. В. Сравнительный анализ свойств кривых ползучести, порождаемых линейной и нелинейной теориями наследственности при ступенчатых нагружениях // *Матем. физика и компьютер. моделир.*, 2018. Т. 21, № 2. С. 27–51. doi: [10.15688/mpcm.jvolsu.2018.2.3](https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2018.2.3).
71. Хохлов А. В. Свойства семейства диаграмм деформирования, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для вязкоупругопластичных материалов // *Изв. РАН. МТТ*, 2019. № 2. С. 29–47. doi: [10.1134/S0572329919020077](https://doi.org/10.1134/S0572329919020077).
72. Ferry J. D. *Viscoelastic Properties of Polymers*. New York: Wiley, 1961. xx+482 pp.
73. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. *Основы математической теории термовязкоупругости*. М.: Наука, 1970. 280 с.
74. Christensen R. M. *Theory of Viscoelasticity. An Introduction*. New York: Academic Press, 1982. xii+364 pp. doi: [10.1016/B978-0-12-174252-2.X5001-7](https://doi.org/10.1016/B978-0-12-174252-2.X5001-7)
75. Бугаков И. И. *Ползучесть полимерных материалов*. М.: Наука, 1973. 287 с.
76. Работнов Ю. Н. *Элементы наследственной механики твердых тел*. М.: Наука, 1977. 384 с.
77. Виноградов Г. В., Малкин А. Я. *Реология полимеров*. М.: Химия, 1977. 440 с.
78. Malkin A. Ya., Mansurov V. A., Begishev V. P. Method of measuring the relaxational properties of elastomers during network formation // *Polymer Science U.S.S.R.*, 1987. vol. 29, no. 3. pp. 741–745. doi: [10.1016/0032-3950\(87\)90290-5](https://doi.org/10.1016/0032-3950(87)90290-5).

79. Tschoegl N. W. *The phenomenological theory of linear viscoelastic behavior. An introduction*. Berlin: Springer-Verlag, 1989. xxv+769 pp.
80. Drozdov A. D. *Mechanics of viscoelastic solids*. Chichester: John Wiley & Sons, 1998. xii+472 pp.
81. Адамов А. А., Матвеев В. П., Труфанов Н. А., Шардаков И. Н. *Методы прикладной вязкоупругости*. Екатеринбург: УрО РАН, 2003. 411 с.
82. Brinson H. F., Brinson L. C. *Polymer Engineering Science and Viscoelasticity*. Boston, MA: Springer, 2008. xvi+446 pp. doi: [10.1007/978-0-387-73861-1](https://doi.org/10.1007/978-0-387-73861-1).
83. Lakes R. S. *Viscoelastic Materials*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. xvi+461 pp. doi: [10.1017/CB09780511626722](https://doi.org/10.1017/CB09780511626722).
84. Mainardi F. *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. An introduction to mathematical models*. Hackensack, NJ: World Scientific, 2010. xx+347 pp. doi: [10.1142/p614](https://doi.org/10.1142/p614).
85. Christensen R. M. *Mechanics of Composite Materials*. New York: Dover Publ., 2012. 384 pp.
86. Bergström J. *Mechanics of Solid Polymers. Theory and Computational Modeling*. New York: Elsevier; William Andrew, 2015. 520 pp. doi: [10.1016/C2013-0-15493-1](https://doi.org/10.1016/C2013-0-15493-1).
87. Георгиевский Д. В., Климов Д. М., Победра Б. Е. Особенности поведения вязкоупругих моделей // *Изв. РАН. МТТ*, 2004. № 1. С. 119–157.
88. Ломакин В. А., Колтунов М. А. Моделирование процесса деформации нелинейных вязко-упругих сред // *Механика полимеров*, 1967. № 2. С. 221–226.
89. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием // *ПММ*, 1948. Т. 12, № 1. С. 53–62.
90. Работнов Ю. Н. *Ползучесть элементов конструкций*. М.: Наука, 1966. 752 с.
91. Хохлов А. В. О возможности описания знакопеременности и немонотонности зависимости от времени коэффициента Пуассона при ползучести с помощью нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла // *Деформация и разрушение материалов*, 2019. № 3. С. 16–24. doi: [10.31044/1814-4632-2019-3-16-24](https://doi.org/10.31044/1814-4632-2019-3-16-24).

MSC: 74D05, 74A20

## Analysis of the linear viscoelasticity theory capabilities to simulate hydrostatic pressure influence on creep curves and lateral contraction ratio of rheonomous materials

*A. V. Khokhlov*

Lomonosov Moscow State University,  
Institute of Mechanics,  
1, Michurinsky prospekt, Moscow, 119192, Russian Federation.

### Abstract


The Boltzmann–Volterra linear constitutive equation for isotropic non-aging visco-elastic materials is studied analytically in order to examine its capabilities to provide an adequate qualitative description of rheological phenomena related to creep under uni-axial loading combined with constant hydrostatic pressure and of evolution types of the Poisson's ratio (lateral contraction ratio) in creep. The constitutive equation does not involve the third invariants of stress and strain tensors and implies that their hydrostatic and deviatoric parts do not depend on each other. It is governed by two material functions of a positive real argument (that is shear and bulk creep compliances); they are implied to be positive, differentiable, increasing and convex up functions. General properties and characteristic features of the creep curves for volumetric, longitudinal and lateral strain produced by the linear theory (with an arbitrary shear and bulk creep functions) under constant tensile load and constant hydrostatic pressure are investigated. Conditions for creep curves monotonicity and for existence of extrema and sign changes of strains are studied. The Poisson's ratio evolution in time and its dependences on pressure and tensile stress levels and on qualitative characteristics of two creep functions are analyzed.

Taking into account compressibility, volumetric creep and pressure influence (governed by the bulk creep function) affects strongly the qualitative behavior of longitudinal creep curves and the Poisson's ratio evolution and its range. In particular, it is proved that the linear theory can simulate non-monotone behavior and sign changes of lateral strain and Poisson's ratio under constant tensile load (even if the pressure is zero) and the longitudinal strain may start to decrease provided the pressure level is high enough.

The expressions for Poisson's ratio via the strain triaxiality ratio (which is equal to volumetric strain divided by deviatoric strain) and in terms of

---

### Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

#### Please cite this article in press as:

Khokhlov A. V. Analysis of the linear viscoelasticity theory capabilities to simulate hydrostatic pressure influence on creep curves and lateral contraction ratio of rheonomous materials, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 2, pp. 304–340. doi: [10.14498/vsgtu1654](https://doi.org/10.14498/vsgtu1654) (In Russian).

#### Author's Details:

*Andrew V. Khokhlov*  <https://orcid.org/0000-0002-9212-2579>

Cand. Techn. Sci.; Leading Researcher; Lab. of Elasticity and Plasticity;  
e-mail: [andrey-khokhlov@ya.ru](mailto:andrey-khokhlov@ya.ru)

pressure ratio to axial stress and the creep functions ratio are derived. Assuming creep functions are arbitrary (permissible), general accurate two-sided bounds for the Poisson's ratio range are obtained and the influence of pressure level on the range is studied. Additional restrictions on material functions and loading parameters are derived to provide negative values of Poisson's ratio. Criteria for the Poisson's ratio increase or decrease and for its non-dependence on time are found.

The analysis revealed the set of immanent features and quantitative characteristics of the theoretic creep curves families and the Poisson's ratio dependence on time and pressure to axial stress ratio which are convenient to check in creep tests (with various levels of pressure and tensile stress) and can be employed as indicators of the linear viscoelasticity theory applicability (or non-applicability) for simulation of a material behavior. The specific properties and restrictions of the model with constant bulk creep compliance which simulates a material exhibiting purely elastic volumetric deformation are considered.

**Keywords:** viscoelasticity, volumetric creep, shear and bulk compliances, axial and lateral creep curves, lateral contraction ratio in creep, mean stress influence, strain triaxiality ratio, negative Poisson's ratio, indicators of linear range boundaries, identification.

Received: 13<sup>th</sup> October, 2018 / Revised: 12<sup>th</sup> May, 2019 /

Accepted: 10<sup>th</sup> June, 2019 / First online: 8<sup>th</sup> July, 2019

---

**Competing interests.** I have no competing interests.

**Author's Responsibilities.** I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

**Funding.** This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 17-08-01146\_a).

## References

1. Beresnev B. I., Martynov E. D., Rodionov K. P. *Plastichnost' i prochnost' tverdykh tel pri vysokikh davleniakh* [Plasticity and strength of solids under high pressures]. Moscow, Nauka, 1970, 581 pp. (In Russian)
2. Moskvitin V. V. *Soprotivlenie viazkouprugikh materialov (primenitel'no k zariadam raketnykh dvigatelei na tverdom toplive)* [Resistance of Viscoplastic Materials with Regard to Charges of Solid-Propellant Rocket Engines]. Moscow, Nauka, 1972, 328 pp. (In Russian)
3. Ainbinder S. B., Alksne K. I., Tyunina E. L., Laka M. G. *Svoistva polimerov pri vysokikh davleniakh* [Properties of Polymers under High Pressures]. M., Khimiia, 1973, 192 pp. (In Russian)
4. Ainbinder S. B., Tyunina E. L., Tsirule K. I. *Svoistva polimerov v razlichnykh napriazhennykh sostoianiakh* [Properties of Polymers in Various Stress States]. M., Khimiia, 1981, 232 pp. (In Russian)
5. Gol'dman A. Ya. *Ob "emnaia deformatsiia plastmass* [Volumetric Deformation of Plastics]. Leningrad, Mashinostroenie, 1984, 232 pp. (In Russian)
6. Gol'dman A. Ya. *Prediction of the deformation properties of polymeric and composite materials*. Washington, DC, American Chemical Society, 1994, xiii+349 pp.
7. Mileiko S. T. Creep and Creep Rupture, In: *Metal and ceramic based composites*, Composite Materials Series, 12. Amsterdam, Elsevier, 1997, pp. 307-332. doi: [10.1016/S0927-0108\(97\)80024-0](https://doi.org/10.1016/S0927-0108(97)80024-0).
8. Moshev V. V., Svistkov A. L., Garishin O. K. et al. *Strukturnye mekhanizmy formirovaniia mekhanicheskikh svoistv zernistykh polimernykh kompozitov* [Structural Mechanisms of the



- Mechanical Properties of Granular Polymer Composites]. Ekaterinburg, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 1997, 508 pp. (In Russian)
9. Glezer A. M., Permyakova I. E., Gromov V. E., Kovalenko V. V. *Mekhanicheskoe povedenie amorfnykh splavov* [Mechanical behavior of amorphous alloys]. Novokuznetsk, Siberian State Industrial Univ., 2006, 416 pp. (In Russian)
  10. Valiev R. Z., Pushin V. G. Bulk nanostructured metallic materials: Production, structure, properties, and functioning, *Physics of Metals and Metallography*, 2002, vol. 94, pp. S1–S3.
  11. Bazhenov S. L., Berlin A. A., Kul'kov A. A., Oshmyan V. G. *Polimernye kompozitsionnye materialy. Prochnost' i tekhnologii* [Polymer composite materials. Strength and technology]. Moscow, Intellect, 2009, 352 pp. (In Russian)
  12. Brekhova V. D. Investigation of the Poisson's ratio of certain crystalline polymers under a constant compressive load, *Polymer Mechanics*, vol. 1, no. 4, pp. 23–24. doi: [10.1007/BF00858886](https://doi.org/10.1007/BF00858886).
  13. Dzene I. Ya., Putans A. V. Poisson's ratio of polyethylene in one-dimensional creep, *Polymer Mechanics*, 1967, vol. 3, no. 5, pp. 626–627. doi: [10.1007/BF00859258](https://doi.org/10.1007/BF00859258).
  14. Laka M.G., Dzenis A. A. Effect of hydrostatic pressure on the tensile strength of polymer materials, *Polymer Mechanics*, 1967, vol. 3, no. 6, pp. 685–687. doi: [10.1007/BF00858742](https://doi.org/10.1007/BF00858742).
  15. Prosvirin V. I., Molchanov Yu. M. Changes in the fine structure of polycaprolactam induced by hydrostatic pressure, *Polymer Mechanics*, 1968, vol. 4, no. 4–6, pp. 443–448. doi: [10.1007/BF00855750](https://doi.org/10.1007/BF00855750).
  16. Pampillo C. A., Davis L. A. Volume change during deformation and pressure dependence of yield stress, *J. Appl. Phys.*, 1971, vol. 42, no. 12, pp. 4674–4679. doi: [10.1063/1.1659838](https://doi.org/10.1063/1.1659838).
  17. Powers J. M., Caddell R. M. The macroscopic volume changes of selected polymers subjected to uniform tensile deformation, *Polym. Eng. Sci.*, 1972, vol. 12, pp. 432–436.
  18. Lokoshchenko A. M., Malinin N. I., Moskvitin V. V., Stroganov G. K. Allowance for the effect of hydrostatic pressure in describing the nonlinear viscoelastic properties of high-density polyethylene, *Polymer Mechanics*, 1974, vol. 10, no. 6, pp. 859–863. doi: [10.1007/BF00856232](https://doi.org/10.1007/BF00856232).
  19. Dzene I. Ya., Kregers A. F., Vilks U. K. Characteristic features of the deformation process on creep and secondary creep of polymers under conditions of monaxial tensioning. Part I, *Polymer Mechanics*, 1974, vol. 10, no. 3, pp. 337–342. doi: [10.1007/BF00865585](https://doi.org/10.1007/BF00865585).
  20. Ol'khovik O. E., Gol'dman A. Ya. Creep of fluoroplastic under the joint action of tension and hydrostatic pressure, *Polymer Mechanics*, 1977, vol. 13, no. 3, pp. 370–374. doi: [10.1007/BF00859419](https://doi.org/10.1007/BF00859419).
  21. Ol'khovik O. E., Gol'dman A. Ya. Creep of fluoroplastic in shear with application of hydrostatic pressure, *Polymer Mechanics*, 1977, vol. 13, no. 5, pp. 679–684. doi: [10.1007/BF00860317](https://doi.org/10.1007/BF00860317).
  22. Gol'dman A. Ya., Tsygankov S. A. Prediction of the creep of polymeric materials for a complex stress state, *Polymer Mechanics*, 1980, vol. 16, no. 6, pp. 729–733. doi: [10.1007/BF00606266](https://doi.org/10.1007/BF00606266).
  23. Ol'khovik O. E., Baranov V.G. The effects of temperature, pressure and volume on the stress relaxation properties of low density polyethylene (LDPE), *Polymer Science U.S.S.R.*, 1981, vol. 23, no. 7, pp. 1593–1602. doi: [10.1016/0032-3950\(81\)90393-2](https://doi.org/10.1016/0032-3950(81)90393-2).
  24. Shcherbak V. V., Gol'dman A. Ya. Volume changes in dispersely filled composites under creep tests, *Mekh. Kompozit. Mater.*, 1982, no. 3, pp. 549–552 (In Russian).
  25. Kalinnikov A. E., Vakhrushev A. V. On a ratio between lateral and longitudinal strains in heteroresistant materials under uniaxial creep conditions, *Mekh. Kompozit. Mater.*, 1985, no. 2, pp. 351–354 (In Russian).
  26. Knauss W. G., Emri I. Volume change and the nonlinearly thermoviscoelastic constitution of polymers, *Polym. Eng. Sci.*, 1987, vol. 27, no. 1, pp. 86–100. doi: [10.1002/pen.760270113](https://doi.org/10.1002/pen.760270113).
  27. Naqui S. I., Robinson I. M. Tensile dilatometric studies of deformation in polymeric materials and their composites, *J. Mater. Sci.*, 1993, vol. 28, no. 6, pp. 1421–1429. doi: [10.1007/BF00363333](https://doi.org/10.1007/BF00363333).

28. Delin M., Rychwalski R. W., Kubát J., Kubát M. J., Bertilsson H., Klason C. Volume changes during flow of solid polymers, *J. Non-Cryst. Solids*, 1994, vol.172–174, pp. 779–785. doi: [10.1016/0022-3093\(94\)90577-0](https://doi.org/10.1016/0022-3093(94)90577-0).
29. Delin M., Rychwalski R., Kubát J. Volume changes during stress relaxation in polyethylene, *Rheol. Acta*, 1995, vol. 34, no. 2, pp. 182–195. doi: [10.1007/BF00398438](https://doi.org/10.1007/BF00398438).
30. Tschoegl N. W. Time Dependence in Material Properties: An Overview, *Mech. Time-Depend. Mater.*, 1997, vol. 1, no. 1, pp. 3–31. doi: [10.1023/A:1009748023394](https://doi.org/10.1023/A:1009748023394).
31. Özüpek S., Becker E. B. Constitutive Equations for Solid Propellants, *J. Engng Mater. Technol.*, 1997, vol. 119, no. 2, pp. 125–132. doi: [10.1115/1.2805983](https://doi.org/10.1115/1.2805983).
32. Hilton H. H. Implications and constraints of time-independent Poisson's Ratios in linear isotropic and anisotropic viscoelasticity, *J. Elasticity*, 2001, vol. 63, no. 3, pp. 221–251. doi: [10.1023/A:1014457613863](https://doi.org/10.1023/A:1014457613863).
33. Tschoegl N. W., Knauss W. G., Emri I. Poisson's ratio in linear viscoelasticity – a critical review, *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2002, vol. 6, no. 1, pp. 3–51. doi: [10.1023/A:1014411503170](https://doi.org/10.1023/A:1014411503170).
34. Arzoumanidis G. A., Liechti K. M. Linear viscoelastic property measurement and its significance for some nonlinear viscoelasticity models, *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2003, vol. 7, no. 3, pp. 209–250. doi: [10.1023/B:MTDM.0000007357.18801.13](https://doi.org/10.1023/B:MTDM.0000007357.18801.13).
35. Cangemi L., Elkoun S., G'Sell C., Meimon Y. Volume strain changes of plasticized Poly(vinylidene fluoride) during tensile and creep tests, *J. Appl. Polym. Sci.*, 2004, vol. 91, no. 3, pp. 1784–1791. doi: [10.1002/app.13313](https://doi.org/10.1002/app.13313).
36. Addiego F., Dahoun A., G'Sell C., Hiver J. M. Volume Variation Process of High-Density Polyethylene During Tensile and Creep Tests, *Oil & Gas Science and Technology – Rev. IFP*, 2006, vol. 61, no. 6, pp. 715–724. doi: [10.2516/ogst:2006009](https://doi.org/10.2516/ogst:2006009).
37. Lomakin E. V. Mechanics of media with stress-state dependent properties, *Phys. Mesomech.*, 2007, vol. 10, no. 5–6, pp. 255–264. doi: [10.1016/j.physme.2007.11.004](https://doi.org/10.1016/j.physme.2007.11.004).
38. Savinykh A. S., Garkushin G. V., Razorenov S. V., Kanel G. I. Longitudinal and bulk compressibility of soda-lime glass at pressures to 10 GPa, *Tech. Phys.*, 2007, vol. 52, no. 3, pp. 328–332. doi: [10.1134/S1063784207030073](https://doi.org/10.1134/S1063784207030073).
39. Pandini S., Pegoretti A. Time, temperature, and strain effects on viscoelastic Poisson's ratio of epoxy resins, *Polym. Eng. Sci.*, 2008, vol. 48, no. 7, pp. 1434–1441. doi: [10.1002/pen.21060](https://doi.org/10.1002/pen.21060).
40. Bykov D. L., Peleshko V. A. Constitutive relations for strain and failure of filled polymer materials in dominant axial tension processes under various barothermal conditions, *Mech. Solids*, 2008, vol. 43, no. 6, pp. 870–891. doi: [10.3103/S0025654408060058](https://doi.org/10.3103/S0025654408060058).
41. Shekhar H., Sahasrabudhe A. D. Longitudinal Strain Dependent Variation of Poissons Ratio for HTPB Based Solid Rocket Propellants in Uni-axial Tensile Testing, *Prop., Explos., Pyrotech.*, 2011, vol. 36, no. 6, pp. 558–563. doi: [10.1002/prop.200900079](https://doi.org/10.1002/prop.200900079).
42. Tscharnuter D., Jerabek M., Major Z., Lang R. W. Time-dependent Poisson's ratio of polypropylene compounds for various strain histories, *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2011, vol. 15, no. 1, pp. 15–28. doi: [10.1007/s11043-010-9121-x](https://doi.org/10.1007/s11043-010-9121-x).
43. Grassia L., D'Amore A., Simon S. L. On the Viscoelastic Poisson's Ratio in Amorphous Polymers, *Journal of Rheology*, 2010, vol. 54, no. 5, pp. 1009–1022. doi: [10.1122/1.3473811](https://doi.org/10.1122/1.3473811).
44. Cui H. R., Tang G. J., Shen Z. B. Study on viscoelastic Poisson's ratio of solid propellants using digital image correlation method, *Prop., Explos., Pyrotech.*, 2016, vol. 41, no. 5, pp. 835–84. doi: [10.1002/prop.201500313](https://doi.org/10.1002/prop.201500313).
45. Lakes R. Foam structure with a negative Poisson's ratio, *Science*, 1987, vol. 235, no. 4792, pp. 1038–1040. doi: [10.1126/science.235.4792.1038](https://doi.org/10.1126/science.235.4792.1038).
46. Friis E. A., Lakes R. S., Park J. B. Negative Poisson's ratio polymeric and metallic materials, *J. Mater. Sci.*, 1988, vol. 23, no. 12, pp. 4406–4414. doi: [10.1007/BF00551939](https://doi.org/10.1007/BF00551939).
47. Berlin A. A., Rothenburg L., Bathurst R. Peculiarities of deformation of disordered polymeric and nonpolymeric bodies, *Polymer Science A*, 1992, vol. 34, no. 7, pp. 559–573.

48. Milton G. W. Composite materials with Poisson's ratios close to  $-1$ , *J. Mech. Phys. Solids*, 1992, vol. 40, no. 5, pp. 1105–1137. doi: [10.1016/0022-5096\(92\)90063-8](https://doi.org/10.1016/0022-5096(92)90063-8).
49. Lakes R. S., Elms K. Indentability of conventional and negative Poisson's ratio foams, *J. Compos. Mater.*, 1993, vol. 27, no. 12, pp. 1193–1202. doi: [10.1177/002199839302701203](https://doi.org/10.1177/002199839302701203).
50. Caddock B. D., Evans K. E. Negative Poisson ratios and strain-dependent mechanical properties in arterial prostheses, *Biomaterials*, 1995, vol. 16, no. 14, pp. 1109–1115. doi: [10.1016/0142-9612\(95\)98908-W](https://doi.org/10.1016/0142-9612(95)98908-W).
51. Chan N., Evans K. E. Indentation resilience of conventional and auxetic foams, *J. Cell. Plastics*, 1998, vol. 34, no. 3, pp. 231–260. doi: [10.1177/0021955X9803400304](https://doi.org/10.1177/0021955X9803400304).
52. Alderson K. L., Fitzgerald A., Evans K. E. The strain dependent indentation resilience of auxetic microporous polyethylene, *J. Mater. Sci.*, 2000, vol. 35, no. 16, pp. 4039–4047. doi: [10.1023/A:1004830103411](https://doi.org/10.1023/A:1004830103411).
53. Konyek D. A., Wojciechowski K. V., Pleskachevsky Yu. M., Shil'ko S. V. Materials with negative Poisson's ratio (review), *Mechanics of Composite Materials and Structures*, 2004, vol. 10, no. 1, pp. 35–69 (In Russian).
54. Greer A. L., Lakes R. S., Rouxel T., Greaves G. N. Poisson's ratio and modern materials, *Nature Materials*, 2011, vol. 10, no. 11, pp. 823–837. doi: [10.1038/nmat3134](https://doi.org/10.1038/nmat3134).
55. Khokhlov A. V. Simulation of hydrostatic pressure influence on creep curves and Poisson's ratio of rheonomic materials under tension using the Rabotnov non-linear hereditary relation, *Mechanics of Composite Materials and Structures*, 2018, vol. 24, no. 3, pp. 407–436 (In Russian). doi: [10.33113/mkmmk.ras.2018.24.03.407\\_436.07](https://doi.org/10.33113/mkmmk.ras.2018.24.03.407_436.07).
56. Golub V. P. Investigations into cyclic creep of materials (review), *Soviet Applied Mechanics*, 1987, vol. 23, no. 12, pp. 1107–1121. doi: [10.1007/BF00884887](https://doi.org/10.1007/BF00884887).
57. Krempl E., Khan F. Rate (time)-dependent deformation behavior: an overview of some properties of metals and solid polymers, *Int. J. Plasticity*, 2003, vol. 19, no. 7, pp. 1069–1095. doi: [10.1016/S0749-6419\(03\)00002-0](https://doi.org/10.1016/S0749-6419(03)00002-0).
58. Knauss W. G., Emri I., Lu H. Mechanics of Polymers: Viscoelasticity, In: *Springer Handbook of Experimental Solid Mechanics*; ed. W. N. Sharpe. Boston, MA, Springer, 2008, pp. 49–96. doi: [10.1007/978-0-387-30877-7\\_3](https://doi.org/10.1007/978-0-387-30877-7_3).
59. Khan F., Yeakle C. Experimental investigation and modeling of non-monotonic creep behavior in polymers, *Int. J. Plasticity*, 2011, vol. 27, no. 4, pp. 512–521. doi: [10.1016/j.ijplas.2010.06.007](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2010.06.007).
60. Drozdov A. D. Time-dependent response of polypropylene after strain reversal, *Int. J. Solids Struct.*, 2010, vol. 47, no. 24, pp. 3221–3233. doi: [10.1016/j.ijsolstr.2010.08.001](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.08.001).
61. Kästner M., Obst M., Brummund J., Thielsch K., Ulbricht V. Inelastic material behavior of polymers – Experimental characterization, formulation and implementation of a material model, *Mech. Mat.*, 2012, vol. 52, pp. 40–57. doi: [10.1016/j.mechmat.2012.04.011](https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2012.04.011).
62. Fernandes V. A., De Focatiis D. S. The role of deformation history on stress relaxation and stress memory of filled rubber, *Polymer Testing*, 2014, vol. 40, pp. 124–132. doi: [10.1016/j.polymeresting.2014.08.018](https://doi.org/10.1016/j.polymeresting.2014.08.018).
63. Drozdov A. D., Dusunceli N. Unusual mechanical response of carbon black-filled thermoplastic elastomers, *Mech. Mat.*, 2014, vol. 69, no. 1, pp. 116–131. doi: [10.1016/j.mechmat.2013.09.019](https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2013.09.019).
64. Khokhlov A. V. Long-term strength curves Produced by Linear Viscoelasticity Theory combined with failure criteria accounting for strain history, *Tudy MAI*, 2016, no. 91, pp. 1–32 (In Russian).
65. Khokhlov A. V. Analysis of creep curves produced by the linear viscoelasticity theory under cyclic stepwise loadings, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 2, pp. 326–361 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu1533](https://doi.org/10.14498/vsgtu1533).
66. Khokhlov A. V. Analysis of properties of creep curves generated by the linear viscoelasticity theory under arbitrary loading programs at initial stage, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 1, pp. 65–95 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu1543](https://doi.org/10.14498/vsgtu1543).

67. Khokhlov A. V. Two-Sided Estimates for the Relaxation Function of the Linear Theory of Heredity via the Relaxation Curves during the Ramp-Deformation and the Methodology of Identification, *Mech. Solids*, 2018, vol.53, no.3, pp. 307–328. doi: [10.3103/S0025654418070105](https://doi.org/10.3103/S0025654418070105).
68. Khokhlov A. V. Analysis of Creep Curves General Properties under Step Loading Generated by the Rabotnov Nonlinear Relation for Viscoelastic Plastic Materials, *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2017, no.3, pp. 93–123 (In Russian). doi: [10.18698/1812-3368-2017-3-93-123](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2017-3-93-123).
69. Khokhlov A. V. Analysis of Properties of Ramp Stress Relaxation Curves Produced by the Rabotnov Nonlinear Hereditary Theory, *Mech. Compos. Mater.*, 2018, vol.54, no.4, pp. 473–486. doi: [10.1007/s11029-018-9757-1](https://doi.org/10.1007/s11029-018-9757-1).
70. Khokhlov A. V. Comparative Analysis of Creep Curves Properties Generated by Linear and Nonlinear Heredity Theories under Multi-Step Loadings, *Mathematical Physics and Computer Simulation*, 2018, vol. 21, no. 2, pp. 27–51 (In Russian). doi: [10.15688/mpcm.jvolsu.2018.2.3](https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2018.2.3).
71. Khokhlov A. V. Properties of the family of deformation diagrams generated by the non-linear Rabotnov relation for viscoelastoplastic materials, *Izv. RAN. MTT*, 2019, no.2, pp. 29–47 (In Russian). doi: [10.1134/S0572329919020077](https://doi.org/10.1134/S0572329919020077).
72. Ferry J. D. *Viscoelastic Properties of Polymers*. New York, Wiley, 1961, xx+482 pp.
73. Il'yushin A. A., Pobedrya B. E. *Osnovy matematicheskoi teorii termoviazkoupругosti* [Fundamentals of the Mathematical Theory of Thermoviscoelasticity]. Moscow, Nauka, 1970, 280 pp. (In Russian)
74. Christensen R. M. *Theory of Viscoelasticity. An Introduction*. New York, Academic Press, 1982, xii+364 pp. doi: [10.1016/B978-0-12-174252-2.X5001-7](https://doi.org/10.1016/B978-0-12-174252-2.X5001-7)
75. Bugakov I. I. *Polzuchest' polimernykh materialov* [Creep of Polymer Materials]. Moscow, Nauka, 1973, 287 pp. (In Russian)
76. Rabotnov Yu. N. *Elements of hereditary solid mechanics*. Moscow, Mir Publ., 1980, 388 pp.
77. Vinogradov G. V., Malkin A. Ya. *Reologiya polimerov* [Rheology of Polymers]. Moscow, Khimiia, 1977, 440 pp.
78. Malkin A. Ya., Mansurov V. A., Begishev V. P. Method of measuring the relaxational properties of elastomers during network formation, *Polymer Science U.S.S.R.*, 1987, vol. 29, no. 3, pp. 741–745. doi: [10.1016/0032-3950\(87\)90290-5](https://doi.org/10.1016/0032-3950(87)90290-5).
79. Tschoegl N. W. *The phenomenological theory of linear viscoelastic behavior. An introduction*. Berlin, Springer-Verlag, 1989, xxv+769 pp.
80. Drozdov A. D. *Mechanics of viscoelastic solids*. Chichester, John Wiley & Sons, 1998, xii+472 pp.
81. Adamov A. A., Matveenko V. P., Trufanov N. A., Shardakov I. N. *Metody prikladnoi viazkoupругosti* [Methods of Applied Viscoelasticity]. Ekaterinburg, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 2003, 411 pp. (In Russian)
82. Brinson H. F., Brinson L. C. *Polymer Engineering Science and Viscoelasticity*. Boston, MA, Springer, 2008, xvi+446 pp. doi: [10.1007/978-0-387-73861-1](https://doi.org/10.1007/978-0-387-73861-1).
83. Lakes R. S. *Viscoelastic Materials*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2009, xvi+461 pp. doi: [10.1017/CB09780511626722](https://doi.org/10.1017/CB09780511626722).
84. Mainardi F. *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. An introduction to mathematical models*. Hackensack, NJ, World Scientific, 2010, xx+347 pp. doi: [10.1142/p614](https://doi.org/10.1142/p614).
85. Christensen R. M. *Mechanics of Composite Materials*. New York, Dover Publ., 2012, 384 pp.
86. Bergström J. *Mechanics of Solid Polymers. Theory and Computational Modeling*. New York, Elsevier; William Andrew, 2015, 520 pp. doi: [10.1016/C2013-0-15493-1](https://doi.org/10.1016/C2013-0-15493-1).
87. Georgievskii D. V., Klimov D. M., Pobedrya B. E. Specific features of the behavior of viscoelastic models, *Mech. Solids.*, 2004, vol. 39, no. 1, pp. 88–120.
88. Lomakin V. A., Koltunov M. A. Simulation of the deformation processes of nonlinear viscoelastic media, *Polymer Mechanics*, 1967, vol.3, no. 2, pp. 147–150. doi: [10.1007/BF00858852](https://doi.org/10.1007/BF00858852).

89. Rabotnov Yu. N. The equilibrium of an elastic medium with after-effect, *Prikl. Mat. Meh.*, vol. 12, no. 1, pp. 53–62 (In Russian).
90. Rabotnov Yu. N. *Creep problems in structural members*, North-Holland series in applied mathematics and mechanics, vol. 7. Amsterdam, North-Holland, 1969, xiv+822 pp.
91. Khokhlov A. V. On ability of nonlinear Maxwell-type elasto-viscoplastic model to simulate sign-alternation and non-monotonicity of time dependence of the Poisson ratio under creep conditions, *Deformation and Fracture of Materials*, 2019, vol. 2019, no. 3, pp. 16–24. doi: [10.31044/1814-4632-2019-3-16-24](https://doi.org/10.31044/1814-4632-2019-3-16-24).