Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 23, № 3. С. 475–496
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1739

УДК 539.3

Функции податливости электромагнитоупругой пьезоэлектрической пьезомагнитной полуплоскости и полупространства с функционально-градиентным или слоистым покрытиеми

А. С. Васильев

Донской государственный технический университет,
Россия, 344000, Ростов-на-Дону, площадь Гагарина, 1.

Аннотация

Статья посвящена построению функций податливости осесимметричных и плоских контактных задач электромагнитоупругости для полубесконечных пьезоэлектрических пьезомагнитных тел с функционально градиентными или кусочно-однородными покрытиями. Материалы покрытия и подложки считаются трансверсально-изотропными. Вычисление функций податливости сведено к решению краевых двухточечных задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами с использованием техники интегральных преобразований. Граничные условия этих краевых задач соответствуют распределенной в некоторой области единичной механической нормальной или касательной, электрической или магнитной нагрузке.

Получены парные интегральные уравнения и их системы, описывающие контактные задачи о вдавливании изолированного или проводящего штампов в полупространство (или полуплоскость) с покрытием и задачу об электроде, расположенном на поверхности покрытия. Трансформанты ядер этих интегральных уравнений совпадают с функциями податливости.

Предложены специальные аппроксимации трансформант ядер, с использованием которых можно построить замкнутые аналитические решения приближенных парных интегральных уравнений и их систем. Представлены численные результаты, иллюстрирующие свойства всех десяти независимых функций податливости для различных сочетаний свойств покрытия и подложки и законов изменения свойств по глубине.

Показано, что при отсутствии касательной нагрузки все функции податливости являются строго положительными. Исследованы условия, при которых функции податливости, соответствующие касательной нагрузке, являются знакопеременными. Проиллюстрированы различия между свойствами функций податливости, соответствующих однородным и функционально градиентным покрытиям.

Научная статья

Образец для цитирования

Васильев А. С. Функции податливости электромагнитоупругой пьезоэлектрической пьезомагнитной полуплоскости и полупространства с функционально-градиентным или слоистым покрытиеми // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 3. С. 475–496. doi: 10.14498/vsgtu1739.

Сведения об авторе

Андрей Сергеевич Васильев https://orcid.org/0000-0001-7844-1314
кандидат физико-математических наук; ведущий научный сотрудник; научно-образовательный центр «Материалы»; e-mail: andre.vasiliev@gmail.com

Ключевые слова: электромагнитоупругость, механика контактного взаимодействия, функции податливости, функционально-градиентные материалы, покрытия.

Получение: 19 августа 2019 г. / Исправление: 12 сентября 2019 г. / Принятие: 16 сентября 2019 г. / Публикация онлайн: 20 сентября 2019 г.

Введение. Многие использующиеся на практике кристаллические и композитные материалы, обладающие пьезоэффектом, демонстрируют также пьезомагнитный и магнитоэлектрический эффекты [1]. Электромагнитоупругие материалы способны преобразовывать один вид энергии в другой и широко применяются, в том числе в виде покрытий, для изготовления приемопередатчиков, акустических устройств, а также сенсоров и актуаторов в микроэлектромеханических устройствах [2–5]. Прогнозирование поведения тел сложной структуры с покрытиями из таких материалов является нетривиальной задачей.

Контактные задачи для однородных электромагнитоупругих пьезоэлектрических пьезомагнитных тел могут быть решены в точном замкнутом аналитическом виде. В частности, были получены точные аналитические решения осесимметричных контактных задач о вдавливании кругового штампа с плоским основанием, конического и сферического штампов [6]. Решения получены для двух основных видов электромагнитных граничных условий: считалось, что штамп изолирован или является идеальным проводником. B. Rogowski и W. Kalinski построили точное решение осесимметричной контактной задачи о вдавливании усеченного конического проводящего штампа [7]. Получены точные аналитические решения для двумерных контактных задач о вдавливании движущегося изолированного или проводящего штампа с плоским основанием или параболической формы [8]; о вдавливании и скольжении с трением треугольного и параболического изолированных штампов [9]; о вдавливании и скольжении с трением проводящего штампа с плоским основанием [10] и параболической формы [11]. С помощью методов теории функций комплексной переменной были построены аналитические решения одномерных контактных задач для упругих тел с покрытиями [12–14].

В литературе известно достаточно небольшое количество исследований, посвященных двумерным контактным задачам для электромагнитоупругих тел с покрытиями. Ma, Ke и Wang решили серию плоских контактных задач для электромагнитоупругой пьезоэлектрической пьезомагнитной полуплоскости с функционально-градиентным (ФГ) покрытием. Ими решены контактные задачи о вдавливании проводящего плоского и параболического штампов [15]; о вдавливании и скольжении с трением плоского проводящего штампа [16], в том числе с учетом термофрикционного разогрева [17]. Рассмотрено только экспоненциальное изменение свойств по глубине покрытия. С использованием интегральных преобразований Фурье контактные задачи сведены к решению систем сингулярных интегральных уравнений, которые решены численно с использованием методов, основанных на методе коллокации [18,19]. Для контактных задач с трением при построении решения использовался итерационный алгоритм, на первом шаге которого решалась задача без трения, а на втором и каждом последующем шагах решение уточнялось.

В работе [20] решена контактная задача о вдавливании и скольжении с трением параболического штампа в слой, состоящий из двух ФГ слоев с экспоненциальным изменением свойств по глубине, с использованием аналогичной схемы построения численного решения сингулярных уравнений и метода конечных элементов. В работе [21] рассматривается трехмерная задача о вдавливании и скольжении с учетом трения изолированной сферы по поверхности электромагнитоупругого слоя, лежащего на жестком основании, с учетом поверхностных эффектов, поверхностные эффекты моделируются с применением моделей Gurtin–Murdoch [22] и Huang–Yu [23]. Следует также упомянуть подходы, использующие различные техники усреднения. Они оказываются эффективными при моделировании микроструктурных гетерогенных материалов [24, 25], однако, плохо подходят для моделирования слоистых тел или тел с покрытиями.

Для решений контактных задач для электромагнитоупругих тел со слоистыми или ФГ-покрытиями при произвольном изменении свойств по глубине может быть эффективно использован приближенный аналитический метод [26, 27]. Он позволяет в аналитическом виде получить решения контактных задач, асимптотически точные для покрытий большой и малой толщины и обладающие высокой точностью для покрытий средней толщины [28].

Данная работа посвящена построению функций податливости электромагнитоупругого полупространства и полуплоскости с ФГ или слоистыми покрытием. Функции податливости являются трансформантами ядер интегральных уравнений, соответствующих плоским или осесимметричным статическим контактным задачам. Показана линейная связь между функциями податливости и образами (Фурье или Ханкеля) функций Грина. Изучены свойства функций податливости и установлена возможность построения приближенных аналитических решений ряда плоских и осесимметричных контактных задач.

1. Равновесие упругой полуплоскости с неоднородным по глубине покрытием. Рассмотрим электромагнитоупругую трансверсально-изотропную неоднородную пьезоэлектрическую пьезомагнитную полуплоскость. Введем декартову систему координат (x, z) таким образом, чтобы прямая $z = 0$ совпадала с поверхностью полуплоскости, а ось z являлась осью симметрии всех шести групп электромагнитноупругих свойств. Считаем, что упругие модули c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}; пьезоэлектрические коэффициенты e_{31}, e_{15}, e_{33}; пьезомагнитные коэффициенты h_{31}, h_{15}, h_{33}; диэлектрические проницаемости ε_{11}, ε_{33}; магнитные проницаемости μ_{11}, μ_{33} и коэффициенты электромагнитной связи d_{11}, d_{33} неоднородной полуплоскости изменяются с глубиной по следующим законам:

$$f_{kj} = \begin{cases} f_{kj}^{(c)}(z), & -H \leqslant z \leqslant 0, \\ f_{kj}^{(s)} = \text{const}, & -\infty < z < -H, \end{cases}$$

где $f_{kj}^{(c)}(z)$ — непрерывно дифференцируемые или кусочно-постоянные функции, описывающие изменение электромагнитоупругих свойств по глубине покрытия толщины H; $f_{kj}^{(s)}$ — некоторые постоянные, описывающие свойства однородной полубесконечной подложки. Здесь и далее индексы (c) и (s) соответствуют покрытию и подложке.

Обозначим через u и w упругие смещения вдоль осей x и z соответственно; σ_x, σ_z τ_{xz} — нормальные и касательные напряжения; φ и ψ — электрический и магнитный потенциалы; D_x, D_z и B_x, B_z — компоненты векторов электрической и магнитной индукции. Считаем, что на границе стыка покрытия и подложки выполнены условия непрерывности:

$$z=-H: \quad \begin{array}{l} w^{(c)}=w^{(s)},\ u^{(c)}=u^{(s)},\ \varphi^{(c)}=\varphi^{(s)},\ \psi^{(c)}=\psi^{(s)}, \\ \sigma_z^{(c)}=\sigma_z^{(s)},\ \tau_{xz}^{(c)}=\tau_{xz}^{(s)},\ D_z^{(c)}=D_z^{(s)},\ B_z^{(c)}=B_z^{(s)}. \end{array} \tag{1}$$

Пусть на поверхности покрытия действуют одновременно распределенная касательная и нормальная нагрузка в некоторой области $-a \leqslant x \leqslant a$. Кроме того, в этой области заданы нормальные компоненты электрической и магнитной индукции. Вне области $-a \leqslant x \leqslant a$ поверхность покрытия свободна от механической нагрузки, электрически и магнитно изолирована:

$$z=0: \quad \{\sigma_z, \tau_{xz}, D_z, B_z\} = \begin{cases} \{-p(x), \tau(x), -q(x), -b(x)\}, & |x| \leqslant a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases} \tag{2}$$

Линейные определяющие соотношения электромагнитоупругой пьезоэлектрической пьезомагнитной среды имеют вид [29]

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= c_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + c_{13}\frac{\partial w}{\partial z} + e_{31}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + h_{31}\frac{\partial \psi}{\partial z}, \\
\sigma_z &= c_{13}\frac{\partial u}{\partial x} + c_{33}\frac{\partial w}{\partial z} + e_{33}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + h_{33}\frac{\partial \psi}{\partial z}, \\
\tau_{xz} &= c_{44}\Big(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\Big) + e_{15}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + h_{15}\frac{\partial \psi}{\partial x}; \\
D_x &= e_{15}\Big(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\Big) - \varepsilon_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - d_{11}\frac{\partial \psi}{\partial x}; \\
D_z &= e_{31}\frac{\partial u}{\partial x} + e_{33}\frac{\partial w}{\partial z} - \varepsilon_{33}\frac{\partial \varphi}{\partial z} - d_{33}\frac{\partial \psi}{\partial z}; \\
B_x &= h_{15}\Big(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\Big) - d_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \mu_{11}\frac{\partial \psi}{\partial x} \\
B_z &= h_{31}\frac{\partial u}{\partial x} + h_{33}\frac{\partial w}{\partial z} - d_{33}\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \mu_{33}\frac{\partial \psi}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Уравнения равновесия и уравнения электро- и магнитостатики имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \tag{4}$$

Считаем, что смещения, электрический и магнитный потенциалы затухают на бесконечности:

$$u, w, \varphi, \psi \to 0 \text{ при } z \to -\infty. \tag{5}$$

2. Равновесие упругой полуплоскости с ФГ-покрытием. Воспользуемся преобразованием Фурье:

$$f(x,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\alpha, z)\exp(-i\alpha x)d\alpha.$$

Подставим (3) в (4) и, записывая смещения, электрический и магнитный потенциалы в виде преобразований Фурье, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно трансформант Фурье:

$$
\begin{aligned}
&c_{44}\bar{u}_0'' = \alpha^2 c_{11}\bar{u}_0 - c_{44}'\left(\bar{u}_0' + \alpha\bar{w}\right) - \alpha b_1\bar{w}' - \alpha e_{15}'\bar{\varphi} - \alpha b_2\bar{\varphi}' - \alpha h_{15}'\bar{\psi} - \alpha b_3\bar{\psi}';\\
&c_{33}\bar{w}'' + e_{33}\bar{\varphi}'' + h_{33}\bar{\psi}'' =\\
&\qquad = c_{13}'\alpha\bar{u}_0 + \alpha b_1\bar{u}_0' - c_{33}'\bar{w}' - e_{33}'\bar{\varphi}' - h_{33}'\bar{\psi}' +\\
&\qquad\qquad + \alpha^2\left(c_{44}\bar{w} + e_{15}\bar{\varphi} + h_{15}\bar{\psi}\right);\\
&e_{33}\bar{w}'' - \varepsilon_{33}\bar{\varphi}'' - d_{33}\bar{\psi}'' =\\
&\qquad = \alpha e_{31}'\bar{u}_0 + \alpha b_2\bar{u}_0' - e_{33}'\bar{w}' + \varepsilon_{33}'\bar{\varphi}' + d_{33}'\bar{\psi}' +\\
&\qquad\qquad + \alpha^2\left(e_{15}\bar{w} - \varepsilon_{11}\bar{\varphi} - d_{11}\bar{\psi}\right);\\
&h_{33}\bar{w}'' - d_{33}\bar{\varphi}'' - \mu_{33}\bar{\psi}'' =\\
&\qquad = \alpha h_{31}'\bar{u}_0 + \alpha b_3\bar{u}_0' - h_{33}'\bar{w}' + d_{33}'\bar{\varphi}' + \mu_{33}'\bar{\psi}' +\\
&\qquad\qquad + \alpha^2\left(h_{15}\bar{w} - d_{11}\bar{\varphi} - \mu_{11}\bar{\psi}\right).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Выше использованы следующие обозначения:

$$
\bar{u} = i\bar{u}_0,\ \ i = \sqrt{-1},\ \ b_1 = \left(c_{13} + c_{44}\right),\ \ b_2 = \left(e_{15} + e_{31}\right),\ \ b_3 = \left(h_{31} + h_{15}\right).
$$

Аналогично, в осесимметричной постановке, используя вместо преобразований Фурье преобразования Ханкеля, можно получить систему дифференциальных уравнений (6).

Для однородной подложки ($z < -H$) систему (6) можно переписать в более простом виде:

$$
\begin{aligned}
&c_{44}\bar{u}_0'' = \alpha^2 c_{11}\bar{u}_0 - \alpha b_1\bar{w}' - \alpha b_2\bar{\varphi}' - \alpha b_3\bar{\psi}';\\
&A_{33}\bar{w}'' + e_{33}\bar{\varphi}'' + h_{33}\bar{\psi}'' = \alpha b_1\bar{u}_0' + \alpha^2\left(c_{44}\bar{w} + e_{15}\bar{\varphi} + h_{15}\bar{\psi}\right);\\
&e_{33}\bar{w}'' - \varepsilon_{33}\bar{\varphi}'' - d_{33}\bar{\psi}'' = \alpha b_2\bar{u}_0' + \alpha^2\left(e_{15}\bar{w} - \varepsilon_{11}\bar{\varphi} - d_{11}\bar{\psi}\right);\\
&h_{33}\bar{w}'' - d_{33}\bar{\varphi}'' - \mu_{33}\bar{\psi}'' = \alpha b_3\bar{u}_0' + \alpha^2\left(h_{15}\bar{w} - d_{11}\bar{\varphi} - \mu_{11}\bar{\psi}\right).
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Характеристическое уравнение системы обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$
\begin{vmatrix}
c_{44}t^2 - c_{11}\alpha^2 & b_1 t\alpha & b_2 t\alpha & b_3 t\alpha\\
-b_1 t\alpha & c_{33}t^2 - c_{44}\alpha^2 & e_{33}t^2 - e_{15}\alpha^2 & h_{33}t^2 - h_{15}\alpha^2\\
-b_2 t\alpha & e_{33}t^2 - e_{15}\alpha^2 & \varepsilon_{11}\alpha^2 - \varepsilon_{33}t^2 & d_{11}\alpha^2 - d_{33}t^2\\
-b_3 t\alpha & h_{33}t^2 - h_{15}\alpha^2 & d_{11}\alpha^2 - d_{33}t^2 & \mu_{11}\alpha^2 - \mu_{33}t^2
\end{vmatrix} = 0.
$$

Очевидно, что решение можно записать в виде $t_k = \alpha\xi_k$. Возможно три различных случая [8]:

Случай 1. Четыре пары комплексно-сопряженных корней (вещественная часть не равна нулю):

$$
\xi_1 = -\xi_5 = o_1 + i\sigma_1,\quad \xi_2 = -\xi_6 = o_1 - i\sigma_1,
$$

$$
\xi_3 = -\xi_7 = o_3 + i\sigma_3,\quad \xi_4 = -\xi_8 = o_3 - i\sigma_3.
$$

Случай 2. Две пары вещественных корней, равных по модулю, но имеющих разный знак, и две пары комплексно сопряженных корней с ненулевой вещественной частью:

$$\xi_1 = -\xi_5 = o_1, \quad \xi_2 = -\xi_6 = o_2,$$
$$\xi_3 = -\xi_7 = o_3 + i\sigma_3, \quad \xi_4 = -\xi_8 = o_3 - i\sigma_3.$$

Случай 3. Четыре пары вещественных корней:

$$\xi_1 = -\xi_5 = o_1, \quad \xi_2 = -\xi_6 = o_2,$$
$$\xi_3 = -\xi_7 = o_3, \quad \xi_4 = -\xi_8 = o_4.$$

Тогда общее решение системы (7) имеет вид:

$$\bar{u}_0^{(s)}(\alpha, z) = \sum_{k=1}^{4} S_k(\alpha)\, k_{1k} e^{\xi_k \alpha z}, \quad \bar{w}^{(s)}(\alpha, z) = \sum_{k=1}^{4} S_k(\alpha)\, k_{2k} e^{\xi_k \alpha z},$$
$$\bar{\varphi}^{(s)}(\alpha, z) = \sum_{k=1}^{4} S_k(\alpha)\, k_{3k} e^{\xi_k \alpha z}, \quad \bar{\psi}^{(s)}(\alpha, z) = \sum_{k=1}^{4} S_k(\alpha)\, k_{4k} e^{\xi_k \alpha z}.$$

Здесь $(k_{jk})_{j=1}^4$ — собственные векторы, их компоненты зависят только от электроманитоупругих свойств подложки (не зависят от α); постоянные $S_k(\alpha)$ необходимо определить из граничных условий. Выше было учтено условие (5), из которого следует, что коэффициенты при ξ_k с отрицательной вещественной частью равны нулю.

Перепишем (3) в образах Фурье:

$$\bar{\tau}_{xz} = i(\alpha c_{44}\bar{w} + \alpha e_{15}\bar{\varphi} + \alpha h_{15}\bar{\psi} - c_{44}\bar{u}_0');$$
$$\bar{\sigma}_z = c_{33}\bar{w}' + e_{33}\bar{\varphi}' + h_{33}\bar{\psi}' - \alpha c_{13}\bar{u}_0;$$
$$\bar{D}_z = e_{33}\bar{w}' - \varepsilon_{33}\bar{\varphi}' - d_{33}\bar{\psi}' - \alpha e_{31}\bar{u}_0;$$
$$\bar{B}_z = h_{33}\bar{w}' - d_{33}\bar{\varphi}' - \mu_{33}\bar{\psi}' - \alpha h_{31}\bar{u}_0.$$

Тогда граничные условия (1) примут следующий вид:

$$z = -H: \quad \begin{aligned}
&\bar{w}^{(c)} = \bar{w}^{(s)},\ \bar{u}_0^{(c)} = \bar{u}_0^{(s)},\ \bar{\varphi}^{(c)} = \bar{\varphi}^{(s)},\ \bar{\psi}^{(c)} = \bar{\psi}^{(s)},\\
&\bar{\sigma}_z^{(c)} = c_{33}^{(s)}\bar{w}'^{(s)} + e_{33}^{(s)}\bar{\varphi}'^{(s)} + h_{33}^{(s)}\bar{\psi}'^{(s)} - \alpha c_{13}^{(s)}\bar{u}_0^{(s)},\\
&\bar{D}_z^{(c)} = e_{33}^{(s)}\bar{w}'^{(s)} - \varepsilon_{33}^{(s)}\bar{\varphi}'^{(s)} - d_{33}^{(s)}\bar{\psi}'^{(s)} - \alpha e_{31}^{(s)}\bar{u}_0^{(s)},\\
&\bar{B}_z^{(c)} = h_{33}^{(s)}\bar{w}'^{(s)} - d_{33}^{(s)}\bar{\varphi}'^{(s)} - \mu_{33}^{(s)}\bar{\psi}'^{(s)} - \alpha h_{31}^{(s)}\bar{u}_0^{(s)},\\
&\bar{\tau}_{xz}^{(c)} = i(\alpha c_{44}^{(s)}\bar{w}^{(s)} + \alpha e_{15}^{(s)}\bar{\varphi}^{(s)} + \alpha h_{15}^{(s)}\bar{\psi}^{(s)} - c_{44}^{(s)}\bar{u}_0'^{(s)}).
\end{aligned}$$

Будем разыскивать решение системы (6) в виде линейных комбинаций:

$$x^{(c)} = \left(\bar{u}^{(c)}, \bar{w}^{(c)}, \bar{q}^{(c)}, \bar{b}^{(c)}\right)^\top, \quad y = \left(i\bar{\tau}, \bar{p}, \bar{q}, \bar{b}\right)^\top,$$
$$x^{(c)}(\alpha, z) = \frac{a(\alpha, z)\cdot y(\alpha)}{\alpha}, \quad a = (a_{kj})_{k,j=1}^4. \tag{8}$$

Тогда граничные условия при $z = -H$ примут вид

$$
\begin{aligned}
&a_{1j} = \bar{u}_0^{(s)},\ a_{2j} = \bar{w}^{(s)},\ a_{3j} = \bar{\varphi}^{(s)},\ a_{4j} = \bar{\psi}^{(s)},\\
&c_{33}^{(c)} a'_{2j} + e_{33}^{(c)} a'_{3j} + h_{33}^{(c)} a'_{4j} - \alpha c_{13}^{(s)} a_{1j} =\\
&\qquad = c_{33}^{(s)} \bar{w}'^{(s)} + e_{33}^{(s)} \bar{\varphi}'^{(s)} + h_{33}^{(s)} \bar{\psi}'^{(s)} - \alpha c_{13}^{(s)} \bar{u}_0^{(s)},\\
&e_{33}^{(c)} a'_{2j} - \varepsilon_{33}^{(c)} a'_{3j} - d_{33}^{(c)} a'_{4j} - \alpha e_{31}^{(c)} a_{1j} =\\
&\qquad = e_{33}^{(s)} \bar{w}'^{(s)} - \varepsilon_{33}^{(s)} \bar{\varphi}'^{(s)} - d_{33}^{(s)} \bar{\psi}'^{(s)} - \alpha e_{31}^{(s)} \bar{u}_0^{(s)},\\
&h_{33}^{(c)} a'_{2j} - d_{33}^{(c)} a'_{3j} - \mu_{33}^{(c)} a'_{4j} - \alpha h_{31}^{(c)} a_{1j} =\\
&\qquad = h_{33}^{(s)} \bar{w}'^{(s)} - d_{33}^{(s)} \bar{\varphi}'^{(s)} - \mu_{33}^{(s)} \bar{\psi}'^{(s)} - \alpha h_{31}^{(s)} \bar{u}_0^{(s)},\\
&\alpha c_{44}^{(c)} a_{2j} + \alpha e_{15}^{(c)} a_{3j} + \alpha h_{15}^{(c)} a_{4j} - c_{44}^{(c)} a'_{1j} =\\
&\qquad = \alpha c_{44}^{(s)} \bar{w}^{(s)} + \alpha e_{15}^{(s)} \bar{\varphi}^{(s)} + \alpha h_{15}^{(s)} \bar{\psi}^{(s)} - c_{44}^{(s)} \bar{u}'^{(s)}_0.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Учитывая (8), граничные условия (2) можно записать в виде

$$
z = 0: \begin{pmatrix} \alpha c_{44}^{(c)}(0) a_{2j} + \alpha e_{15}^{(c)}(0) a_{3j} + \alpha h_{15}^{(c)}(0) a_{4j} - c_{44}^{(c)}(0) a'_{1j} \\ c_{33}^{(c)}(0) a'_{2j} + e_{33}^{(c)}(0) a'_{3j} + h_{33}^{(c)}(0) a'_{4j} - \alpha c_{13}^{(c)}(0) a_{1j} \\ e_{33}^{(c)}(0) a'_{2j} - \varepsilon_{33}^{(c)}(0) a'_{3j} - d_{33}^{(c)}(0) a'_{4j} - \alpha e_{31}^{(c)}(0) a_{1j} \\ h_{33}^{(c)}(0) a'_{2j} - d_{33}^{(c)}(0) a'_{3j} - \mu_{33}^{(c)}(0) a'_{4j} - \alpha h_{31}^{(c)}(0) a_{1j} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \delta_{1j} \\ \delta_{2j} \\ \delta_{3j} \\ \delta_{4j} \end{pmatrix}. \tag{10}
$$

Здесь $j = 1, 2, 3, 4$, δ_{kj} — символ Кронекера. Таким образом, для определения векторов $a_j = (a_{kj})_{k=1}^4$ получаем четыре краевые двухточечные задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (6) с граничными условиями (9) и (10). Нетрудно убедиться, что

$$
\bar{G}_{kj}(\alpha, z) = \alpha^{-1} a_{kj}(\alpha, z) \tag{11}
$$

есть образы (Фурье для плоской задачи и Ханкеля для осесимметричной) функций Грина. Введем функции

$$
L_{kj}(\alpha) = \frac{a_{kj}(\alpha/H, 0)}{\Theta_{kj}}, \quad L = (L_{kj})_{k,j=1}^4. \tag{12}
$$

Здесь постоянные Θ_{kj} выбраны таким образом, чтобы выполнялось условие

$$
a_{kj}(\alpha, 0) \underset{\alpha \to \infty}{=} \Theta_{kj}.
$$

Значения Θ_{kj} зависят только от свойств поверхности покрытия ($z = 0$). Аналогично терминологии [30, 31], будем называть их *функциями податливости* электромагнитоупругой полуплоскости (полупространства) с неоднородным по глубине покрытием. Для ФГ-покрытия с произвольным характером изменения свойств по глубине функции податливости могут быть построены лишь численно. Аналитические выражения для функций податливости можно построить при отсутствии неоднородности (свойства в покрытии постоянны, то есть покрытие однородное) и для некоторых частных случаев неоднородности: кусочно-постоянное изменение свойств (слоистые кусочно-однородные покрытия), экспоненциальное изменение свойств (при этом важно, чтобы показатель экспоненты совпадал для всех законов изменения электромагнитоупругих свойств) и т.п.

Установлено, что матрица $\mathbf{L}$ является симметричной, т.е. $L_{kj}(\alpha) \equiv L_{jk}(\alpha)$. Таким образом, имеем 10 независимых функций податливости. Кроме того, выполнено: $L_{kj}(\alpha) > 0$ при $k,\ j = 2,3,4$ и $k = j = 1$. Положительность или знакопеременность функций $L_{1j}(\alpha)$ при $j = 2,3,4$ зависит от отношения свойств подложки и покрытия и исследована в параграфе 5. Кроме того, функции $L_{kj}(\alpha)$ при $k,\ j = 2,3,4$ и $k = j = 1$ являются четными, а функции $L_{1j}(\alpha)$ при $j = 2,3,4$ — нечетными. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать их лишь в диапазоне $\alpha > 0$.

Для построения функций Грина можно использовать технику, основанную на результатах В. А. Бабешко [32]. Известно, что четная, вещественная, непрерывная на всей вещественной оси и затухающая на бесконечности функция может быть аппроксимирована следующими выражениями:

$$f_j(\alpha) = (\alpha^2 + D_j^2)^{-1}. \tag{13}$$

Используя подход С. М. Айзиковича [27], построим аппроксимации функций податливости выражениями

$$L_{kj}(\alpha) \approx \Pi_{kj}(\alpha) = \prod_{n=1}^{N_{kj}} \frac{\alpha^2 + A_{kjn}^2}{\alpha^2 + B_{kjn}^2}, \quad A_{kjn}, B_{kjn} \in \mathbb{C},$$

а разницу $\big(L_{kj}(\alpha) - \Pi_{kj}(\alpha)\big)\alpha^{-1}$ аппроксимируем в виде (13). В итоге получим

$$L_{kj}(\alpha) = \prod_{n=1}^{N_{kj}} \frac{\alpha^2 + A_{kjn}^2}{\alpha^2 + B_{kjn}^2} + \sum_{n=1}^{M_{kj}} \frac{C_{kjn}\alpha}{\alpha^2 + D_{kjn}^2} + R_s(\alpha), \tag{14}$$

где

$$R_s(\alpha) = \mathrm{O}(\alpha^s), \alpha \to 0; \quad R_s(\alpha) = \mathrm{O}(\alpha^{-s-1}), \alpha \to \infty; \quad s = \min(2N_{kj}, 2M_{kj}+1).$$

Коэффициенты A_{kjn}, B_{kjn} либо вещественны, либо являются комплексно сопряженными, то есть выражение $\Pi_{kj}(\alpha)$ вещественно. Для построения функций Грина требуется обратить интегральные преобразования (Фурье или Ханкеля), используя (11) и (12). Для функций податливости, записанных в виде (14), это удается проделать аналитически. Аналогично это было сделано для задачи о действии нормальной точечной силы и точечного заряда в работе [33].

3. Частные случаи изменения свойств по глубине покрытия. Для кусочно-однородного покрытия вычисление функций податливости можно упростить. В этом случае для каждого отдельно взятого j-того однородного слоя система обыкновенных дифференциальных уравнений (7) принимает вид (6) и ее решение можно записать в виде

$$\begin{gathered}\bar{u}_0^{(j)}(\alpha,z)=\sum_{k=1}^{8}S_{jk}\left(\alpha\right)k_{1jk}e^{\xi_{jk}\alpha z},\quad \bar{w}^{(j)}(\alpha,z)=\sum_{k=1}^{8}S_{jk}\left(\alpha\right)k_{2jk}e^{\xi_{jk}\alpha z},\\ \bar{\varphi}^{(k)}(\alpha,z)=\sum_{k=1}^{8}S_{jk}\left(\alpha\right)k_{3jk}e^{\xi_{jk}\alpha z},\quad \bar{\psi}^{(j)}(\alpha,z)=\sum_{k=1}^{8}S_{jk}\left(\alpha\right)k_{4jk}e^{\xi_{jk}\alpha z}.\end{gathered}\tag{15}$$

Подставляя (15) в (9) и (10), получим систему $(8n+4)$ линейных алгебраических уравнений для определения постоянных S_{jk} и S_k, где n — количество слоев в покрытии.

Аналитическое решение системы (6) можно построить также для некоторых частных случаев законов изменения свойств по глубине покрытия. В частности, если свойства покрытия изменяются экспоненциально, то

$$f_{kj}=\begin{cases} f_{kj}^{(c)}(z)=f_{kj}^{(0)}e^{\beta(z+H)}, & -H\leqslant z\leqslant 0;\\ f_{kj}^{(0)}=\mathrm{const}, & -\infty<z<-H.\end{cases}$$

В этом случае система (6) также превращается в систему с постоянными коэффициентами. Её решение может быть построено аналитически и, таким образом, построение функций податливости сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений.

4. Интегральные уравнения контактных задач. Описанная выше схема построения функций податливости может быть применена при сведении ряда контактных задач к решению интегральных уравнений и их систем. Рассмотрим примеры контактных задач:

Контактная задача 1 о вдавливании изолированного штампа. Пусть жесткий штамп вдавливается без трения в поверхность электромагнитоупругой полуплоскости с покрытием, вся поверхность покрытия электрически и магнитно изолирована. В этом случае граничные условия имеют такой вид:

$$z=0:\quad\begin{cases} w=-\delta+f(x), & |x|\leqslant a;\\ \sigma_z=0, & |x|>a;\\ \tau_{xz}=D_z=B_z=0, & -\infty<x<+\infty.\end{cases}$$

Используя интегральные преобразования Фурье, получим парное интегральное уравнение:

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\bar{p}_0(\alpha)L_{22}(\alpha\lambda)\frac{\exp(-ix\alpha)}{|\alpha|}d\alpha=\frac{2\pi}{a}\Theta_{22}\big(\delta-f(ax)\big), & |x|\leqslant 1;\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\bar{p}_0(\alpha)\exp(-ix\alpha)d\alpha=0, & |x|>1.\end{cases}\tag{16}$$

Здесь $\bar{p}_0(\alpha)$ — трансформанта Фурье контактных давлений при безразмерной координате, $f(x)$ — функция профиля штампа, a — полуширина области контакта, $\lambda=H/a$ — безразмерная толщина покрытия. К аналогичному уравнению сводится контактная задача о вдавливании жесткого штампа в чисто упругую полуплоскость с покрытием, изменяется лишь функция податливости и значение постоянной Θ_{22}. Его решение построено ранее для штампа с плоским основанием [34] и штампа параболической формы [35]. Для осесимметричной контактной задачи аналогичное уравнение получается заменой преобразования Фурье на преобразование Ханкеля и также было рассмотрено и решено ранее [36].

Контактная задача 2 об электроде на поверхности покрытия. Предположим, что на поверхность покрытия нанесён идеальный электромагнитный проводник, электрический и магнитный потенциалы известны и равны φ_0 и ψ_0. Поверхность покрытия свободна от механических воздействий. В этом случае граничные условия и система интегральных уравнений примут такой вид:

$$z=0: \quad \begin{cases} \psi=-\psi_0,\ \varphi=-\varphi_0, & |x|\leqslant a; \\ D_z=B_z=0, & |x|>a; \\ \sigma_z=\tau_{xz}=0, & -\infty<x<\infty; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{q}_0(\alpha)}{|\alpha|}\frac{L_{33}(\alpha\lambda)}{\Theta_{33}}e^{-ix\alpha}d\alpha+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{b}_0(\alpha)}{|\alpha|}\frac{L_{34}(\alpha\lambda)}{\Theta_{34}}e^{-ix\alpha}d\alpha=\frac{2\pi\varphi_0}{a}, \quad |x|\leqslant 1; \\ &\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{q}_0(\alpha)}{|\alpha|}\frac{L_{43}(\alpha\lambda)}{\Theta_{43}}e^{-ix\alpha}d\alpha+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{b}_0(\alpha)}{|\alpha|}\frac{L_{44}(\alpha\lambda)}{\Theta_{44}}e^{-ix\alpha}d\alpha=\frac{2\pi\psi_0}{a}, \quad |x|\leqslant 1; \\ &\int_{-\infty}^{\infty}\bar{q}_0(\alpha)\exp(-ix\alpha)d\alpha=\int_{-\infty}^{\infty}\bar{b}_0(\alpha)\exp(-ix\alpha)d\alpha=0, \qquad |x|>1. \end{aligned} \tag{17}$$

Это задача со смешанными граничными условиями по электрическим и магнитным компонентам. Построение приближенного аналитического решения подобных систем описано в работах [26] и [37] в осесимметричной постановке.

Контактная задача 3 о вдавливании проводящего штампа без учета сил трения. Пусть в полуплоскость с покрытием вдавливается без трения жесткий штамп и пусть штамп является идеальным электромагнитным проводником. Тогда

$$z=0: \quad \begin{cases} w=-\delta+f(x),\ \psi=-\psi_0,\ \varphi=-\varphi_0, & |x|\leqslant a; \\ D_z=B_z=\sigma_z=0, & |x|>a; \\ \tau_{xz}=0, & -\infty<x<\infty; \end{cases}$$

$|x|\leqslant 1$:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\bar{p}_0(\alpha)\frac{L_{22}(\alpha\lambda)}{\Theta_{22}}+\bar{q}_0(\alpha)\frac{L_{23}(\alpha\lambda)}{\Theta_{23}}+\bar{b}_0(\alpha)\frac{L_{24}(\alpha\lambda)}{\Theta_{24}}\Big)\frac{e^{-ix\alpha}}{|\alpha|}d\alpha=\frac{2\pi}{a}\big(\delta-f(ax)\big), \\ &\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\bar{p}_0(\alpha)\frac{L_{32}(\alpha\lambda)}{\Theta_{32}}+\bar{q}_0(\alpha)\frac{L_{33}(\alpha\lambda)}{\Theta_{33}}+\bar{b}_0(\alpha)\frac{L_{34}(\alpha\lambda)}{\Theta_{34}}\Big)\frac{e^{-ix\alpha}}{|\alpha|}d\alpha=\frac{2\pi\varphi_0}{a}, \\ &\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\bar{p}_0(\alpha)\frac{L_{42}(\alpha\lambda)}{\Theta_{42}}+\bar{q}_0(\alpha)\frac{L_{43}(\alpha\lambda)}{\Theta_{43}}+\bar{b}_0(\alpha)\frac{L_{44}(\alpha\lambda)}{\Theta_{44}}\Big)\frac{e^{-ix\alpha}}{|\alpha|}d\alpha=\frac{2\pi\psi_0}{a}; \end{aligned} \tag{18}$$

$|x|>1$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\bar{p}_0(\alpha)\exp(-ix\alpha)d\alpha=\int_{-\infty}^{\infty}\bar{q}_0(\alpha)\exp(-ix\alpha)d\alpha= \\ =\int_{-\infty}^{\infty}\bar{b}_0(\alpha)\exp(-ix\alpha)d\alpha=0.$$

Как видно, функции податливости являются трансформантами ядер интегральных уравнений (16), (17), (18). Поэтому исследование их свойств является принципиально важным. Свойства трансформант ядер во многом определяют возможность использование того или иного метода решения. В частности, приближенный аналитический метод [27] основан на идее аппроксимации функций податливости выражениями

$$L_{kj}\left(\alpha\right) \approx \Pi_{kj}\left(\alpha\right) = \prod_{i=1}^{N_{kj}} \frac{\alpha^2 + A_{kji}^2}{\alpha^2 + B_{kji}^2}, \quad A_{kji} \neq B_{slm}. \tag{19}$$

Заменяя трансформанты ядер парных интегральных уравнений и их систем (16), (17), (18) приближенными выражениями (19), получаем приближенные уравнения, для которых удается построить замкнутые аналитические решения. В работе [27] показано, что полученные решения являются двусторонне асимптотически точными при $\lambda \to 0$ и $\lambda \to \infty$. Точность приближенных решений для произвольного значения λ зависит от точности аппроксимации трансформант ядер. При этим погрешность решения является величиной того же порядка малости, что и погрешность аппроксимации трансформанты ядра [28]. Было рассмотрено большое количество различных примеров сочетаний материалов покрытий и подложек и законов изменения свойств по глубине и для всех удавалось построить аппроксимации с относительной погрешностью, не превышающей 0.2 %.

5. Численные результаты и анализ свойств функций податливости. Аналогично работе [30] можно показать, что для функций податливости, соответствующих полуплоскости с ФГ-покрытием, выполнены свойства:

$$\begin{aligned} L_{kj}(\alpha) &= a_{kj} + b_{kj}\left|\alpha\right| + c_{kj}\alpha^2 + \mathrm{O}(\left|\alpha\right|^3), \quad \left|\alpha\right| \to 0; \\ L_{kj}(\alpha) &= 1 + \tilde{b}_{kj}\left|\alpha\right|^{-1} + \tilde{c}_{kj}\alpha^{-2} + \mathrm{O}(\left|\alpha\right|^{-3}), \quad \left|\alpha\right| \to \infty. \end{aligned} \tag{20}$$

Для кусочно-однородных покрытий вместо (20) выполнено

$$L_{kj}(\alpha) = 1 + \tilde{b}_{kj}\exp\left(-2\left|\alpha\right|h_1\right) + \mathrm{O}\left(\left|\alpha\right|\exp\left(-2\alpha h_1\right)\right), \quad \left|\alpha\right| \to \infty,$$

где h_1 — толщина верхнего слоя.

Для иллюстрации рассмотрим подложку из композитного материала, составленного из пьезоэлектрического материала $\mathrm{BaTiO_3}$ и пьезомагнитного $\mathrm{CoFe_2O_4}$ [9]: $c_{11} = 226$ GPa, $c_1 = 124$ GPa, $c_{33} = 216$ GPa, $c_{44} = 44$ GPa, $e_{15} = 5.8$ C/m^2, $e_{31} = -2.2$ C/m^2, $e_{33} = 9.3$ C/m^2, $h_{15} = 275$ N/(A·m), $h_{31} = 290.2$ N/(A·m), $h_{33} = 350$ N/(A·m), $\varepsilon_{11} = 5.64 \times 10^{-9}$ C^2/(N·m^2), $\varepsilon_{33} = 6.35 \times 10^{-9}$ C^2/(N·m^2), $\mu_{11} = 2.97 \times 10^{-4}$ N·s^2/C^2, $\mu_{33} = 0.835 \times 10^{-4}$ N·s^2/C^2, $d_{11} = 5.367 \times 10^{-12}$ N·s/(V·C), $d_{33} = 2737.5 \times 10^{-12}$ N·s/(V·C).

Рассмотрим однородные покрытия, свойства которых пропорциональны свойствам подложки, но отличаются в β раз, т.е. $x_{kj}^{(c)} = \mathrm{const}$ и $x_{kj}^{(s)}/x_{kj}^{(c)} = \beta > 0$. На рис. 1–4 изображены все 10 функций податливости ($L_{ij} = L_{ji}$) для случаев $\beta = 2$ и $\beta = 0.5$. Значение функций податливости в нуле в этом случае определяется по формуле

$$\lim_{\alpha\to 0} L_{kj}(\alpha) = \beta^{-1}. \tag{21}$$

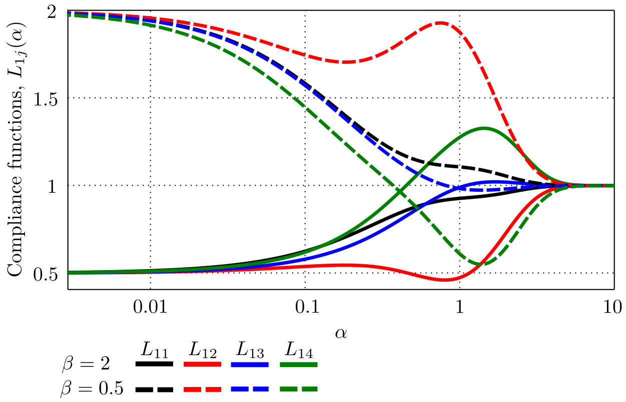

Рис. 1. Функции податливости $L_{1j}(\alpha)$ для однородных покрытий при $\beta = 2$ и $\beta = 0.5$
[Figure 1. Compliance functions $L_{1j}(\alpha)$ for homogeneous coatings with $\beta = 2$ and $\beta = 0.5$]

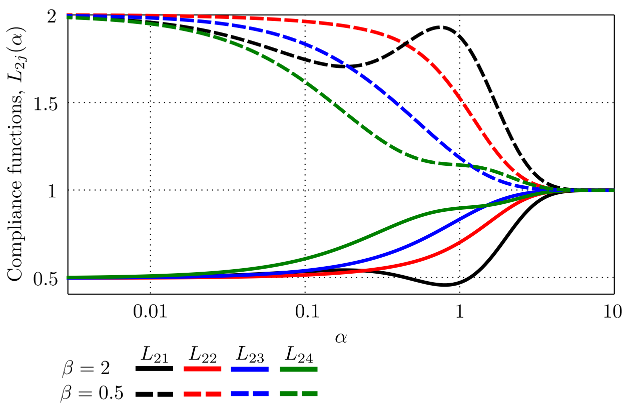

Рис. 2. Функции податливости $L_{2j}(\alpha)$ для однородных покрытий при $\beta = 2$ и $\beta = 0.5$
[Figure 2. Compliance functions $L_{2j}(\alpha)$ for homogeneous coatings with $\beta = 2$ and $\beta = 0.5$]

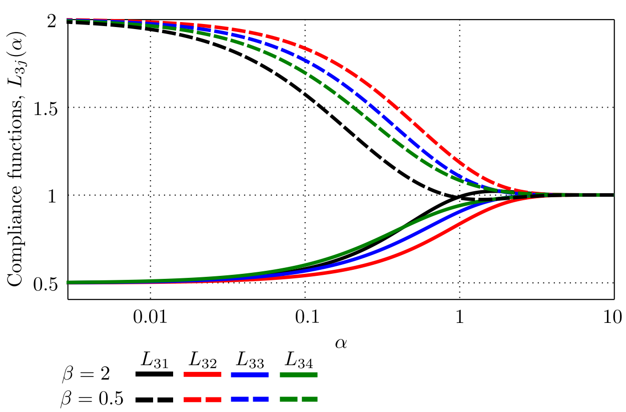

Рис. 3. Функции податливости $L_{3j}(\alpha)$ для однородных покрытий при $\beta = 2$ и $\beta = 0.5$
[Figure 3. Compliance functions $L_{3j}(\alpha)$ for homogeneous coatings with $\beta = 2$ and $\beta = 0.5$]

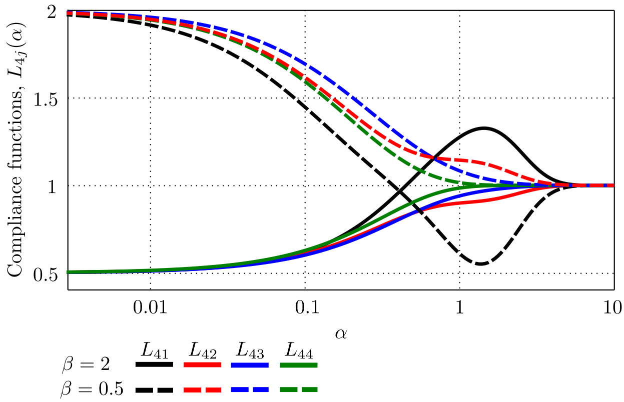

Рис. 4. Функции податливости $L_{4j}(\alpha)$ для однородных покрытий при $\beta = 2$ и $\beta = 0.5$
[Figure 4. Compliance functions $L_{4j}(\alpha)$ for homogeneous coatings with $\beta = 2$ and $\beta = 0.5$]

Графики функций податливости L_{jj}, $j = 1, 2, 3, 4$, расположены симметрично относительно прямой $y = 1$. Все функции податливости, за исключением L_{12}, L_{13}, L_{14}, являются монотонными и положительными, их значения лежат в интервале $(1, \beta^{-1})$ для $\beta < 1$ и $(\beta{-}1, 1)$ для $\beta > 1$.

На рис. 5 изображены графики L_{22} и L_{33} для однородных покрытий при $\beta = 0.01, 0.1, 0.5, 2, 10, 100$. На обеих осях координат использована логарифмическая шкала. Интересный факт, что графики функции L_{33}, соответствующие значениям $\beta = 2, 10, 100$, практически совпадают с графиками функции L_{33}^{-1} для значений $\beta = 0.5, 0.1, 0.01$. Для того чтобы оценить, насколько близки эти величины, введем относительную характеристику

$$\Delta_{jj}(\beta) = \sup_{0 \leqslant \alpha < \infty} \left| 1 - \frac{L_{jj}(\alpha)\big|_{\beta}}{L_{jj}^{-1}(\alpha)\big|_{\beta^{-1}}} \right| \cdot 100\,\%, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Очевидно, что $\Delta_{jj}(\beta) = \Delta_{jj}(\beta^{-1})$. Для описанных выше однородных покрытий получены следующие значения: $\Delta_{33}(100) = 4.99\,\%$, $\Delta_{33}(10) = 3.01\,\%$, $\Delta_{33}(2) = 0.44\,\%$. Еще лучшее совпадение наблюдается для L_{44}, значение аналогичной характеристики в этом случае $\Delta_{44}(100) = 0.03\,\%$, $\Delta_{44}(10) = 0.02\,\%$, $\Delta_{44}(2) = 0.003\,\%$. Для других функций податливости такой взаимосвязи не наблюдается. В частности, на рис. 5 видно, что L_{22} при $\beta = 100$ значительно медленнее стремится к значению β^{-1} при $\alpha \to 0$. Для однородных покрытий при любом значении β скорость сходимости всех функций L_{kj} к единице при $\alpha \to \infty$ одинакова.

Особенными с точки зрения свойств, описанных выше, являются функции L_{12}, L_{13}, L_{14} (см. рис. 5 и 6. Все они немонотонны, наиболее заметно это для L_{12} и L_{14}. Для однородных покрытий функция L_{12} в области $0.5 < \alpha < 0.9$ имеет точку максимума при $\beta < 1$ и точку минимума при $\beta > 1$. Функция L_{14}, наоборот, имеет точку максимума при $\beta > 1$ и минимума при $\beta < 1$. Максимум и минимум достигаются в области $1.0 < \alpha < 1.5$. При этом чем больше значение β отличается от единицы, тем значение максимума больше, а минимума меньше. Для рассмотренных примеров при $\beta \leqslant 0.25$ функция L_{12} знакопеременна, при $\beta > 7.3$ знакопеременна L_{14}. Этот факт важен с точки зрения выбора метода решения интегрального уравнения. В частности, при-

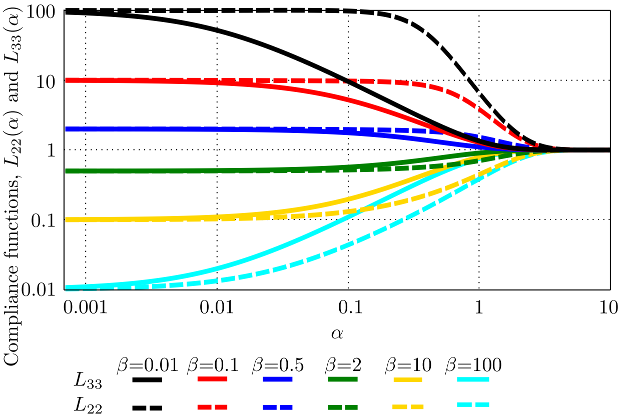

Рис. 5. Функции податливости $L_{22}(\alpha)$ и $L_{33}(\alpha)$ для однородных покрытий при $\beta = 0.01, 0.1, 0.5, 2, 10, 100$

[Figure 5. Compliance functions $L_{22}(\alpha)$ and $L_{33}(\alpha)$ for homogeneous coatings and $\beta = 0.01, 0.1, 0.5, 2, 10, 100$]

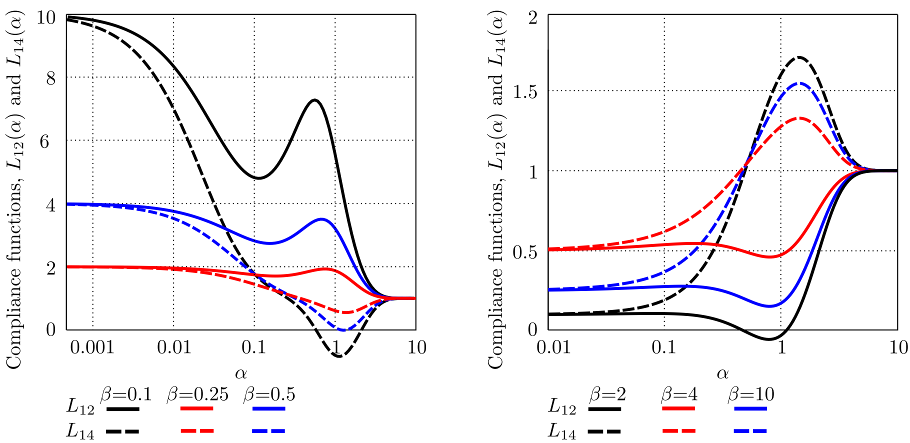

Рис. 6. $L_{12}(\alpha)$ и $L_{14}(\alpha)$ для однородных покрытий при $\beta = 0.1, 0.25, 0.5, 2, 4$ и 10

[Figure 6. $L_{12}(\alpha)$ and $L_{14}(\alpha)$ for homogeneous coatings with $\beta = 0.1, 0.25, 0.5, 2, 4$, and 10]

ближенный аналитический метод [27] потребует некоторой доработки в этом случае, так как при его реализации требуется строить аппроксимации функций податливости строго положительными выражениями.

Рассмотрим ФГ-покрытия, свойства которых на поверхности пропорциональны свойствам подложки, но отличаются в β раз, т.е. $x^{(s)}_{kj}/x^{(c)}_{kj}(0) = \beta > 0$. Свойства внутри покрытия изменяются непрерывно от значения на поверхности к значению подложки по одному из следующих законов:

1) линейный

$$x^{(c)}_{kj}(z) = x^{(\mathrm{surf})}_{kj} - \left(x^{(s)}_{kj} - x^{(\mathrm{surf})}_{kj}\right)\frac{z}{H};$$

2) степенной

$$x^{(c)}_{kj}(z) = x^{(\mathrm{surf})}_{kj} - \left(x^{(s)}_{kj} - x^{(\mathrm{surf})}_{kj}\right)\left(\frac{z}{H}\right)^k;$$

3) экспоненциальный

$$x_{kj}^{(c)}(z) = x_{kj}^{(\mathrm{surf})}\frac{\exp(-k) - \exp(kz/H)}{\exp(-k) - 1} - x_{kj}^{(s)}\frac{\exp(kz/H) - 1}{\exp(-k) - 1}.$$

На рис. 7 (слева) изображены графики пяти законов неоднородности при $\beta = 0.5$: однородного покрытия и ФГ-покрытий с линейным, степенным ($k = 2$) и экспоненциальным ($k = 2$ и $k = 5$) изменением свойств, на рис. 7 (справа) и 8 — соответствующие им функции податливости L_{22}, L_{12} и L_{14}.

Графики законов неоднородности не пересекаются, как и графики соответствующих функций податливости L_{kj}, за исключением L_{12}, L_{13}, L_{14}. Графики всех функций податливости упорядочены в той же последовательности, что и графики законов неоднородности (таким образом, наблюдается непрерывность зависимости функций податливости от закона неоднородно-

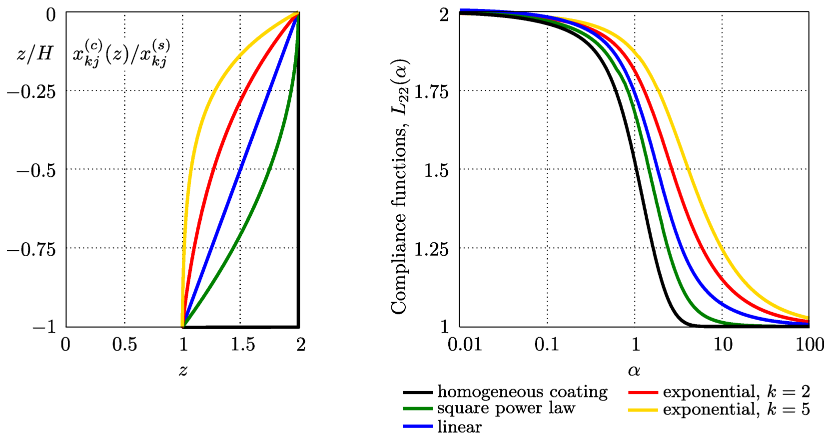

Рис. 7. Графики изменения свойств по глубине однородного и ФГ-покрытий (20), (21) при $\beta = 0.5$ (слева) и соответствующие им графики L_{22} (справа)

[Figure 7. Plots of properties variation in depth of homogeneous and functionally graded coatings (20), (21) (left) and corresponding to them plots of L_{22} (right)]

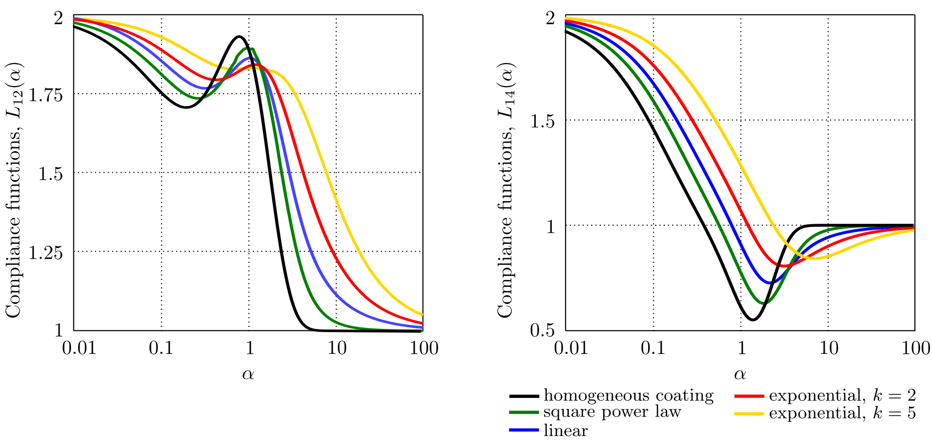

Рис. 8. Графики L_{12} и L_{14}, соответствующие покрытиям из рис. 7 (слева)

[Figure 8. Plots of L_{12} and L_{14} corresponding to the coatings from Fig. 7 (left)] сти). Законы изменения свойств по глубине существенно влияют на скорость сходимости всех L_{kj} к единице при $\alpha \to \infty$. Медленнее всех к единице сходятся L_{kj} для экспоненциальных законов, затем степенных, линейных и быстрее всех сходятся для однородного покрытия. Можно сделать вывод, что на скорость сходимости к единице влияет абсолютная величина градиента функции изменения свойств по глубине в нуле — $|{x'_{kj}}^{(c)}(0)|$. Для ФГ-покрытий функции L_{12} и L_{14} также ведут себя иначе, чем все остальные. Как и для однородных покрытий, они немонотонны. При этом графики «сглаживаются», приближаются к монотонному по мере увеличения $|{x'_{kj}}^{(c)}(0)|$.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 15–19–10056).

Благодарность. Автор благодарит С. М. Айзиковича за помощь в постановке задачи и С. С. Волкова за помощь в проведении анализа результатов.

Библиографический список

1. Wang Y., Hu J., Lin Y., Nan C. W. Multiferroic magnetoelectric composite nanostructures // *NPG Asia Mater.*, 2010. vol. 2, no. 2. pp. 61–68. doi: 10.1038/asiamat.2010.32.
2. Fetisov Y. K., G. Srinivasan. Electric field tuning characteristics of a ferrite-piezoelectric microwave resonator // *Appl. Phys. Lett.*, 2006. vol. 88, no. 14, 143503. doi: 10.1063/1.2191950.
3. Zhai J., Dong S., Xing Z., Li J., Viehland D. Geomagnetic sensor based on giant magnetoelectric effect // *Appl. Phys. Lett.*, 2007. vol. 91, no. 12, 123513. doi: 10.1063/1.2789391.
4. Wang M. L., Wang G. Electromagnetic sensors for assessing and monitoring civil infrastructures / *Sensor Technologies for Civil Infrastructures* / Woodhead Publishing Series in Electronic and Optical Materials, 1: Elsevier Science, 2014. pp. 238–264. doi: 10.1533/9780857099136.238.
5. Liu X., Ou-Yang J., Tong B., Chen S., Zhang Y., Zhu B., Yang X. Influence of the delta-E effect on a surface acoustic wave resonator // *Appl. Phys. Lett.*, 2019. vol. 114, no. 6, 062903. doi: 10.1063/1.5054977.
6. Chen W., Pan E., Wang H., Zhang C. Theory of indentation on multiferroic composite materials // *J. Mech. Phys. Solids*, 2010. vol. 58, no. 10. pp. 1524–1551. doi: 10.1016/j.jmps.2010.07.012.
7. Rogowski B., Kalinski W. Indentation of piezoelectromagneto-elastic half-space by a truncated conical punch // *Int. J. Eng. Sci.*, 2012. vol. 60. pp. 77–93. doi: 10.1016/j.ijengsci.2012.03.034.
8. Zhou Y. T., Lee K. Y. Contact problem for magneto-electro-elastic half-plane materials indented by a moving punch. Part I: Closed-form solutions // *Int. J. Solids Struct.*, 2012. vol. 49, no. 26. pp. 3853–3865. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2012.08.017.
9. Zhou Y. T., Kim T. W. An exact analysis of sliding frictional contact of a rigid punch over the surface of magneto-electro-elastic materials // *Acta Mech.*, 2014. vol. 225, no. 3. pp. 625–645. doi: 10.1007/s00707-013-0992-1.
10. Elloumi R., Guler M. A., Kallel-Kamoun I., El-Borgi S. Closed-form solutions of the frictional sliding contact problem for a magneto-electro-elastic half-plane indented by a rigid conducting punch // *Int. J. Solids Struct.*, 2013. vol. 50, no. 24. pp. 3778–3792. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2013.07.014.
11. Elloumi R., Kallel-Kamoun I., El-Borgi S., Guler M. A. On the frictional sliding contact problem between a rigid circular conducting punch and a magneto-electro-elastic half-plane // *Int. J. Mech. Sci.*, 2014. vol. 87. pp. 1–17. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2014.04.024.

12. Зеленцов В. Б., Митрин Б. И., Айзикович С. М. Динамическая и квазистатическая неустойчивость скользящего термофрикционного контакта // *Трение и износ*, 2016. Т. 37, № 3. С. 280–289.
13. Зеленцов В. Б., Митрин Б. И., Лубягин И. А. Износостойкость материалов покрытий в условиях разогрева от трения // *Трение и износ*, 2017. Т. 38, № 4. С. 302–310.
14. Зеленцов В. Б. Индикация термоупругой неустойчивости скользящего контакта с помощью заглубленной пьезокерамической прослойки // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2017. № 1. С. 63–84. doi: 10.15593/perm.mech/2017.1.05.
15. Ma J., Ke L. L., Wang, Y. S. Frictionless contact of a functionally graded magneto-electro-elastic layered half-plane under a conducting punch // *Int. J. Solids Struct.*, 2014. vol. 51, no. 15–16. pp. 2791–2806. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2014.03.028.
16. Ma J., Ke L. L., Wang, Y. S. Sliding frictional contact of functionally graded magneto-electro-elastic materials under a conducting flat punch // *J. Appl. Mech.*, 2015. vol. 82, no. 1. doi: 10.1115/1.4029090.
17. Ma J., El-Borgi S., Ke L. L., Wang Y. S. Frictional contact problem between a functionally graded magnetoelectroelastic layer and a rigid conducting flat punch with frictional heat generation // *J. Thermal Stresses*, 2016. vol. 39, no. 3. pp. 245–277. doi: 10.1080/01495739.2015.1124648.
18. Erdogan F., Gupta G. D. On the numerical solution of singular integral equations // *Quart. Appl. Math.*, 1972. vol. 29, no. 4. pp. 525–534. doi: 10.1090/qam/408277.
19. Krenk S. On quadrature formulas for singular integral equations of the first and the second kind // *Quart. Appl. Math.*, 1975. vol. 33, no. 3. pp. 225–232. doi: 10.1090/qam/448967.
20. Yilmaz K. B., Comez I., Yildirim B., Güler M. A., El-Borgi S. Frictional receding contact problem for a graded bilayer system indented by a rigid punch // *Int. J. Mech. Sci.*, 2018. vol. 141. pp. 127–142. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2018.03.041.
21. Zhang X., Wang Z., Shen H., Wang Q. J. Frictional contact involving a multiferroic thin film subjected to surface magnetoelectroelastic effects // *Int. J. Mech. Sci.*, 2017. vol. 132-132. pp. 633–648. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2017.07.039.
22. Gurtin M. E., Ian Murdoch A. Frictional contact involving a multiferroic thin film subjected to surface magnetoelectroelastic effects // *Int. J. Mech. Sci.*, 2017. vol. 132-132. pp. 633–648. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2017.07.039.
23. Huang G., Yu S. Effect of surface piezoelectricity on the electromechanical behaviour of a piezoelectric ring // *Physica Status Solidi*, 2006. vol. 243, no. 4. pp. 22–24. doi: 10.1002/pssb.200541521.
24. Dinzart F., Sabar H. Magneto-electro-elastic coated inclusion problem and its application to magnetic-piezoelectric composite materials // *Int. J. Solids Struct.*, 2011. vol. 48, no. 16–17. pp. 2393–2401. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2011.04.010.
25. Kachanov M., Sevostianov I. Effective properties of heterogeneous materials / *Micromechanics of Materials, with Applications* / Solid Mechanics and its Applications, 249. Cham: Springer, 2018. pp. 315–467. doi: 10.1007/978-3-319-76204-3_5.
26. Васильев А. С., Волков С. С., Айзикович С. М. Приближённое аналитическое решение задачи о вдавливании проводящего штампа в электроупругое полупространство с неоднородным покрытием // *Докл. Акад. наук*, 2018. Т. 478, № 1. С. 34–39. doi: 10.7868/S0869565218010073.
27. Айзикович С. М. Асимптотическое решение одного класса парных уравнений // *ПММ*, 1990. Т. 54, № 5. С. 872–877.
28. Sadyrin E. V., Vasiliev A. S., Volkov S. S., Mitrin B. I., Aizikovich S. M. Simplified analytical solution of the contact problem on indentation of a coated half-space by a spherical punch // *WIT Trans. Eng. Sci.*, 2019. vol. 122. pp. 209–221. doi: 10.2495/BE410191.
29. Nan C. W. Magnetoelectric effect in composites of piezoelectric and piezomagnetic phases // *Phys. Rev. B*, 1994. vol. 50, no. 9. pp. 6082–6088. doi: 10.1103/physrevb.50.6082.

30. Айзикович С. М., Александров В. М. О свойствах функций податливости, соответствующих слоистому и непрерывно-неоднородному полупространству // *Докл. АН СССР.*, 1982. Т. 266, № 1. С. 40–43.

31. Ильман В. М., Приварников А. К. Действие системы штампов на упругое многослойное основание // *Прикл. мех.*, 1971. Т. 7, № 6. С. 25–30.

32. Бабешко В.А. Интегральные уравнения свертки первого рода на системе отрезков, возникающие в теории упругости и математической физике // *ПММ*, 1971. Т. 35, № 1. С. 88–99.

33. Vasiliev A. S., Volkov S. S., Aizikovich S. M. Normal point force and point electric charge in a piezoelectric transversely isotropic functionally graded half-space // *Acta Mech.*, 2016. vol. 227, no. 1. pp. 263–273. doi: 10.1007/s00707-015-1414-3.

34. Vasiliev A. S., Volkov S. S., Aizikovich S. M., Mitrin B. I. Plane contact problem on indentation of a flat punch into a transversely-isotropic half-plane with functionally graded transversely-isotropic coating // *Z. Angew. Math. Phys.*, 2017. vol. 68, no. 1. doi: 10.1007/s00033-016-0746-8.

35. Kudish I. I., Volkov S. S., Vasiliev A. S., Aizikovich S. M. Some Criteria for Coating Effectiveness in Heavily Loaded Line EHL Contacts. Part 1. Dry Contacts // *J. Trib.*, 2016. vol. 138, no. 2. doi: 10.1115/1.4030956.

36. Волков С. С., Васильев А. С., Айзикович С. М., Селезнев Н. М., Леонтьева А. В. Напряженно-деформированное состояние упругого мягкого функционально-градиентного покрытия при внедрении сферического индентора // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2016. № 4. С. 20–34. doi: 10.15593/perm.mech/2016.4.02.

37. Volkov S. S., Vasiliev A. S., Aizikovich S. M., Mitrin B. I. Axisymmetric indentation of an electroelastic piezoelectric half-space with functionally graded piezoelectric coating by a circular punch // *Acta Mech.*, 2019. vol. 230, no. 4. pp. 1289–1302. doi: 10.1007/s00707-017-2026-x.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 3, pp. 475–496
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1739

MSC: 74F15

Compliance functions of electromagnetoelastic piezoelectric and piezomagnetic half-plane and half-space with functionally graded or layered coatings

A. S. Vasiliev

Don State Technical University,
1, Gagarin Square, Rostov-on-Don, 344000, Russian Federation.

Abstract

The paper addresses to the construction of the compliance functions of axissymmetric and plane contact problems of electromagnetoelasticity for semi-infinite piezoelectric piezomagnetic solids with functionally graded or piece-wise homogeneous coatings. Materials of coating and substrate are assumed to be transversely isotropic. Computation of the compliance functions are reduced to the solution of two-point boundary value problems for a system of ordinary differential equations with variable coefficients are obtained using integral transformation technique. Boundary conditions of these systems describe distributed tangential or normal mechanical loading or action of an electrical of magnetic fields.

Dual integral equations and their systems are obtained for contact problems on indentation by an insulating and conductive punches with kernel transforms equal to compliance functions. Asymptotic behavior of the compliance functions is analyzed.

Specially designed approximations for the kernel transforms are constructed based on the analysis of their properties. These approximations make it possible to construct the solutions of the approximated systems of dual integral equations in a closed analytical form. Numerical results illustrating all 10 independent compliance functions are provided for different materials of coating and substrate and different types of variation of properties in depth of the coating.

It is shown that in the case of absence of the tangential mechanical loading all the compliance functions are positive. Conditions of existing sign alternating compliance functions corresponding tangential mechanical loading are analyzed. The differences between the properties of the compliance functions, corresponding to homogeneous and functionally graded coatings are illustrated.

Keywords: electromagnetoelasticity, contact mechanics, compliance functions, functionally graded materials, coatings.

Research Article

Please cite this article in press as:
Vasiliev A. S. Compliance functions of electromagnetoelastic piezoelectric and piezomagnetic half-plane and half-space with functionally graded or layered coatings, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 3, pp. 475–496. doi: 10.14498/vsgtu1739 (In Russian).

Author's Details:
Andrey S. Vasiliev https://orcid.org/0000-0001-7844-1314
Cand. Phys. & Math. Sci.; Leading Researcher; Research and Education Center "Materials"; e-mail: andre.vasiliev@gmail.com

Received: 19th August, 2019 / Revised: 12th September, 2019 /
Accepted: 16th September, 2019 / First online: 20th September, 2019

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 15–19–10056).

Acknowledgments. The author is grateful to Sergey M. Aizikovich for his help with the problem statement and to Sergey S. Volkov for his assistance in the result analysis.

References

1. Wang Y., Hu J., Lin Y., Nan C. W. Multiferroic magnetoelectric composite nanostructures, *NPG Asia Mater.*, 2010, vol. 2, no. 2, pp. 61–68. `doi:` 10.1038/asiamat.2010.32.
2. Fetisov Y. K., G. Srinivasan. Electric field tuning characteristics of a ferrite-piezoelectric microwave resonator, *Appl. Phys. Lett.*, 2006, vol. 88, no. 14, 143503. `doi:` 10.1063/1.2191950.
3. Zhai J., Dong S., Xing Z., Li J., Viehland D. Geomagnetic sensor based on giant magnetoelectric effect, *Appl. Phys. Lett.*, 2007, vol. 91, no. 12, 123513. `doi:` 10.1063/1.2789391.
4. Wang M. L., Wang G. Electromagnetic sensors for assessing and monitoring civil infrastructures, In: *Sensor Technologies for Civil Infrastructures*, Woodhead Publishing Series in Electronic and Optical Materials, 1, Elsevier Science, 2014, pp. 238–264. `doi:` 10.1533/9780857099136.238.
5. Liu X., Ou-Yang J., Tong B., Chen S., Zhang Y., Zhu B., Yang X. Influence of the delta-E effect on a surface acoustic wave resonator, *Appl. Phys. Lett.*, 2019, vol. 114, no. 6, 062903. `doi:` 10.1063/1.5054977.
6. Chen W., Pan E., Wang H., Zhang C. Theory of indentation on multiferroic composite materials, *J. Mech. Phys. Solids*, 2010, vol. 58, no. 10, pp. 1524–1551. `doi:` 10.1016/j.jmps.2010.07.012.
7. Rogowski B., Kalinski W. Indentation of piezoelectromagneto-elastic half-space by a truncated conical punch, *Int. J. Eng. Sci.*, 2012, vol. 60, pp. 77–93. `doi:` 10.1016/j.ijengsci.2012.03.034.
8. Zhou Y. T., Lee K. Y. Contact problem for magneto-electro-elastic half-plane materials indented by a moving punch. Part I: Closed-form solutions, *Int. J. Solids Struct.*, 2012, vol. 49, no. 26, pp. 3853–3865. `doi:` 10.1016/j.ijsolstr.2012.08.017.
9. Zhou Y. T., Kim T. W. An exact analysis of sliding frictional contact of a rigid punch over the surface of magneto-electro-elastic materials, *Acta Mech.*, 2014, vol. 225, no. 3, pp. 625–645. `doi:` 10.1007/s00707-013-0992-1.
10. Elloumi R., Guler M. A., Kallel-Kamoun I., El-Borgi S. Closed-form solutions of the frictional sliding contact problem for a magneto-electro-elastic half-plane indented by a rigid conducting punch, *Int. J. Solids Struct.*, 2013, vol. 50, no. 24, pp. 3778–3792. `doi:` 10.1016/j.ijsolstr.2013.07.014.
11. Elloumi R., Kallel-Kamoun I., El-Borgi S., Guler M. A. On the frictional sliding contact problem between a rigid circular conducting punch and a magneto-electro-elastic half-plane, *Int. J. Mech. Sci.*, 2014, vol. 87, pp. 1–17. `doi:` 10.1016/j.ijmecsci.2014.04.024.
12. Zelentsov V. B., Mitrin B. I., Aizikovich S. M. Dynamic and quasi-static instability of sliding thermoelastic frictional contact, *J. Friction Wear*, 2016, vol. 37, no. 3, pp. 213–220. `doi:` 10.3103/S1068366616030181.
13. Zelentsov V. B., Mitrin B. I., Lubyagin I. A. Wear resistance of coating materials under the frictional heating conditions, *J. Frict. Wear*, 2017, vol. 38, no. 4, pp. 265–271. `doi:` 10.3103/S1068366617040158.

14. Zelentsov V. B., Mitrin B. I., Sukiyazov A. G., Aizikovich S. M. Indication of thermoelastic instability of sliding contact using embedded piezoceramic interlayer, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, no. 1, pp. 63–84 (In Russian). doi: 10.15593/perm.mech/2017.1.05.
15. Ma J., Ke L. L., Wang, Y. S. Frictionless contact of a functionally graded magneto-electro-elastic layered half-plane under a conducting punch, *Int. J. Solids Struct.*, 2014, vol. 51, no. 15–16, pp. 2791–2806. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2014.03.028.
16. Ma J., Ke L. L., Wang, Y. S. Sliding frictional contact of functionally graded magneto-electro-elastic materials under a conducting flat punch, *J. Appl. Mech.*, 2015, vol. 82, no. 1. doi: 10.1115/1.4029090.
17. Ma J., El-Borgi S., Ke L. L., Wang Y. S. Frictional contact problem between a functionally graded magnetoelectroelastic layer and a rigid conducting flat punch with frictional heat generation, *J. Thermal Stresses*, 2016, vol. 39, no. 3, pp. 245–277. doi: 10.1080/01495739.2015.1124648.
18. Erdogan F., Gupta G. D. On the numerical solution of singular integral equations, *Quart. Appl. Math.*, 1972, vol. 29, no. 4, pp. 525–534. doi: 10.1090/qam/408277.
19. Krenk S. On quadrature formulas for singular integral equations of the first and the second kind, *Quart. Appl. Math.*, 1975, vol. 33, no. 3, pp. 225–232. doi: 10.1090/qam/448967.
20. Yilmaz K. B., Comez I., Yildirim B., Güler M. A., El-Borgi S. Frictional receding contact problem for a graded bilayer system indented by a rigid punch, *Int. J. Mech. Sci.*, 2018, vol. 141, pp. 127–142. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2018.03.041.
21. Zhang X., Wang Z., Shen H., Wang Q. J. Frictional contact involving a multiferroic thin film subjected to surface magnetoelectroelastic effects, *Int. J. Mech. Sci.*, 2017, vol. 132-132, pp. 633–648. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2017.07.039.
22. Gurtin M. E., Ian Murdoch A. Frictional contact involving a multiferroic thin film subjected to surface magnetoelectroelastic effects, *Int. J. Mech. Sci.*, 2017, vol. 132-132, pp. 633–648. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2017.07.039.
23. Huang G., Yu S. Effect of surface piezoelectricity on the electromechanical behaviour of a piezoelectric ring, *Physica Status Solidi*, 2006, vol. 243, no. 4, pp. 22–24. doi: 10.1002/pssb.200541521.
24. Dinzart F., Sabar H. Magneto-electro-elastic coated inclusion problem and its application to magnetic-piezoelectric composite materials, *Int. J. Solids Struct.*, 2011, vol. 48, no. 16–17, pp. 2393–2401. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2011.04.010.
25. Kachanov M., Sevostianov I. Effective properties of heterogeneous materials, In: *Micromechanics of Materials, with Applications*, Solid Mechanics and its Applications, 249. Cham, Springer, 2018, pp. 315–467. doi: 10.1007/978-3-319-76204-3_5.
26. Vasiliev A. S., Volkov S. S., Aizikovich S. M. Approximated analytical solution of a problem on indentation of an electro-elastic half-space with inhomogeneous coating by a conductive punch, *Doklady Physics*, 2018, vol. 63, no. 1, pp. 18–22. doi: 10.1134/S1028335818010020.
27. Aizikovich S. M. An asymptotic solution of a class of coupled equations, *J. Appl. Math. Mech.*, 1990, vol. 54, no. 5, pp. 719–724. doi: 10.1016/0021-8928(90)90125-T.
28. Sadyrin E. V., Vasiliev A. S., Volkov S. S., Mitrin B. I., Aizikovich S. M. Simplified analytical solution of the contact problem on indentation of a coated half-space by a spherical punch, *WIT Trans. Eng. Sci.*, 2019, vol. 122, pp. 209–221. doi: 10.2495/BE410191.
29. Nan C. W. Magnetoelectric effect in composites of piezoelectric and piezomagnetic phases, *Phys. Rev. B*, 1994, vol. 50, no. 9, pp. 6082–6088. doi: 10.1103/physrevb.50.6082.
30. Aizikovich S. M., Alexandrov V. M. Properties of compliance functions for layered and continuously nonuniform half-space, *Soviet Phys. Doklady*, 1982, vol. 27, no. 9, pp. 765–767.
31. Il'man V.M., Privarnikov A.K. The effect of a system of punches on an elastic multilayer base, *Soviet Appl. Mech.*, 1971, vol. 7, no. 6, pp. 602–606. doi: 10.1007/BF00888400.
32. Babeshko V.A. Integral equations of convolution of the first kind on a system of segments occurring in the theory of elasticity and mathematical physics, *J. Appl. Math. Mech.*, 1971, vol. 35, no. 1, pp. 88–99. doi: 10.1016/0021-8928(71)90124-9.

33. Vasiliev A. S., Volkov S. S., Aizikovich S. M. Normal point force and point electric charge in a piezoelectric transversely isotropic functionally graded half-space, *Acta Mech.*, 2016, vol. 227, no. 1, pp. 263–273. doi: 10.1007/s00707-015-1414-3.
34. Vasiliev A. S., Volkov S. S., Aizikovich S. M., Mitrin B. I. Plane contact problem on indentation of a flat punch into a transversely-isotropic half-plane with functionally graded transversely-isotropic coating, *Z. Angew. Math. Phys.*, 2017, vol. 68, no. 1. doi: 10.1007/s00033-016-0746-8.
35. Kudish I. I., Volkov S. S., Vasiliev A. S., Aizikovich S. M. Some Criteria for Coating Effectiveness in Heavily Loaded Line EHL Contacts. Part 1. Dry Contacts, *J. Trib.*, 2016, vol. 138, no. 2. doi: 10.1115/1.4030956.
36. Volkov S. S., Vasiliev A. S., Aizikovich S. M., Seleznev N. M., Leontieva A. V. Stress-strain state of an elastic soft functionally-graded coating subjected to indentation by a spherical punch, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2016, no. 4, pp. 20–34 (In Russian). doi: 10.15593/perm.mech/2016.4.02.
37. Volkov S. S., Vasiliev A. S., Aizikovich S. M., Mitrin B. I. Axisymmetric indentation of an electroelastic piezoelectric half-space with functionally graded piezoelectric coating by a circular punch, *Acta Mech.*, 2019, vol. 230, no. 4, pp. 1289–1302. doi: 10.1007/s00707-017-2026-x.