



УДК 539.376:539.4.014.13

Влияние температурно-силового нагружения на релаксацию остаточных напряжений в поверхностно упрочненных элементах стержневой конструкции в условиях ползучести

В. П. Радченко^{1,2}, Е. Е. Деревянка¹

¹ Самарский государственный технический университет, Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

² Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Россия, 119192, Москва, Мичуринский проспект, 1.



Аннотация

Разработана математическая модель релаксации остаточных напряжений в поверхностно упрочненных цилиндрических элементах статически неопределимых стержневых систем при температурно-силовом нагружении в условиях ползучести. В процессе моделирования решаются следующие задачи: реконструкция напряженно-деформированного состояния в цилиндрическом стержне после процедуры обработки поверхности микрошариками; учет влияния температурного нагружения на величину и характер полей остаточных напряжений вследствие зависимости модуля Юнга от температуры; расчет релаксации остаточных напряжений в упрочненных элементах системы под действием температурно-силового нагружения в условиях ползучести; оценка финишных остаточных напряжений после ползучести и температурно-силовой разгрузки.

Поставленные задачи решаются в пределах первых двух стадий ползучести материала элементов систем. Для детального анализа использована трехэлементная статически неопределимая система с упрочненными при температуре 20 °С элементами из сплава ЖС6У и температуре эксплуатации 675 °С.

Для реализации всех методик разработаны численные алгоритмы на основе аппарата вычислительной математики с использованием дискретизации по пространственным и временным координатам и применением метода шагов по времени. Для апостериорной оценки сходимости

Научная статья

  Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International \(https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)


Образец для цитирования

Радченко В. П., Деревянка Е. Е. Влияние температурно-силового нагружения на релаксацию остаточных напряжений в поверхностно упрочненных элементах стержневой конструкции в условиях ползучести // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 3. С. 497–524. doi: [10.14498/vsgtu1688](https://doi.org/10.14498/vsgtu1688).

Сведения об авторах

Владимир Павлович Радченко  <https://orcid.org/0000-0003-4168-9660>

доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. прикладной математики и информатики¹; ведущий научный сотрудник; лаб. ползучести и длительной прочности²; e-mail: radchenko.vp@samgtu.ru

Екатерина Евгеньевна Деревянка  <https://orcid.org/0000-0001-9229-6766>

аспирант; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: derevyanka.ee@samgtu.ru

и устойчивости численного метода выполнено сравнение численных результатов при больших значениях времени расчета с асимптотическими значениями характеристик напряженно-деформированного состояния, соответствующей стадии установившейся ползучести, полученных аналитическим методом. Наблюдается хорошее соответствие данных по обоим подходам.

Приводятся результаты расчетов, иллюстрирующие кинетику остаточных напряжений во всех трех стержнях системы в процессе ползучести под действием температурно-силового нагружения начиная с момента их формирования после упрочнения. Показано, что происходит ступенчатое изменение величины и характера распределения остаточных напряжений только за счет «мгновенного» температурного прогрева элементов стержневой конструкции вследствие зависимости модуля Юнга от температуры. Также расчетами установлено, что релаксация остаточных напряжений в наиболее нагруженном стержне системы происходит гораздо медленнее, чем в менее нагруженных. Основные результаты работы иллюстрируются эпюрами распределения остаточных напряжений по глубине упрочненного слоя.

Ключевые слова: стержневая система, температурно-силовое нагружение, поверхностное упрочнение, остаточные напряжения, ползучесть, релаксация.

Получение: 11 апреля 2019 г. / Исправление: 30 июля 2019 г. /

Принятие: 16 сентября 2019 г. / Публикация онлайн: 1 октября 2019 г.

Введение. Стержневые системы широко применяются в элементах инженерных конструкций в разнообразных технических объектах (например, кронштейны, стойки шасси самолетов, фермы строительных сооружений, ферменные конструкции кранов и т. д.). Зачастую для изготовления такого рода конструкций применяются легкие титановые, алюминиевые (и другие) сплавы, обладающие ползучестью даже при «комнатной» температуре. Если при изготовлении подобных деталей применяется финишная операция поверхностного пластического упрочнения, то задача оценки устойчивости остаточных напряжений к «рабочим» нагрузкам в условиях эксплуатации играет важную роль в оценке надежности изделий.

Повышение эксплуатационных показателей деталей и элементов конструкций является крайне важной задачей в машиностроении и промышленности. Эти показатели часто определяются параметрами качества тонкого поверхностного слоя изделия. При изготовлении деталей и элементов конструкций в транспортном, энергетическом машиностроении, авиастроении используются технологические методы повышения физико-механических поверхностных характеристик изделия, связанные с наведением сжимающих остаточных напряжений (ОН) в тонком упрочненном поверхностном слое. Поверхностное пластическое деформирование (ППД) — одна из технологий, благодаря которой можно улучшить эксплуатационные характеристики деталей (сопротивление усталости, коррозионное растрескивание материала, трибологические характеристики, микротвердость) при нормальных и умеренных температурах путем наведения сжимающих ОН в поверхностном слое. Эффективность данного метода и положительное влияние сжимающих остаточных напряжений отмечены в многочисленных исследованиях отечественных и зарубежных ученых [1–10].

Однако на практике изделия подвергаются воздействию вибрации, высоких температур, внешних нагрузок и другим механическим воздействиям, приводящим к релаксации остаточных напряжений (уменьшению сжимающих напряжений по модулю). Вследствие таких воздействий значительно снижается положительный эффект от упрочняющих технологий. В связи с этим возникает задача целесообразности использования методов поверхностного упрочнения для повышения характеристик прочности, надежности и долговечности изделия, а также оценки времени и скорости релаксации ОН в элементах конструкций при их эксплуатации. Подавляющее большинство исследований релаксации остаточных напряжений при высокотемпературном нагружении имеет исключительно экспериментальный характер. Анализ результатов феноменологических исследований и сопутствующих эффектов проведен, например, в работах [11, 12].

Одна из первых попыток связать процесс релаксации ОН с ползучестью материала изделия нашла отражение в работах [13, 14].

Исследования релаксации остаточных напряжений для простейших деталей (цилиндрические образцы, призматические детали и др.) при одноосном нагружении либо при термоэкспозиции представлены в публикациях [15–21]. Зависимость процесса релаксации от приложенных циклических нагрузок продемонстрирована в работах [22–24].

В основе многих теоретических исследований оценки кинетики напряженно-деформированного состояния изделия при температурно-силовом нагружении лежит концепция релаксации ОН в результате ползучести, предложенная и разработанная в [12]. Получивший дальнейшее развитие этот метод позволил разрешить ряд краевых задач об оценке релаксации остаточных напряжений в упрочненных цилиндрических [20, 25, 26] и плоских [27] образцах при ползучести в условиях термоэкспозиции и осевого растяжения.

Первая попытка математического моделирования релаксации остаточных напряжений в статически неопределимых системах в условиях ползучести осуществлена в работе авторов настоящей статьи [28]. Однако в этой работе не учитывалось влияние температурного нагружения вследствие изменения модуля Юнга от температуры как на формирование остаточных напряжений после процедуры упрочнения, так и на их последующую кинетику в процессе ползучести. Поэтому целью настоящей работы является исследование влияния температурно-силового нагружения на процессы ползучести и релаксации остаточных напряжений в упрочненных элементах статически неопределимой стержневой системы с учетом зависимости механических характеристик от температуры.

1. Расчет ползучести статически неопределимой системы с неупрочненными элементами. Рассматривается статически неопределимая стержневая конструкция (ферма), все элементы которой моделируются сплошными цилиндрическими стержнями. В силу шарнирного соединения узлов в неупрочненных элементах системы реализуется одноосное напряженное состояние.

Целью данного раздела является разработка метода численного решения задачи о напряженно-деформированном состоянии в элементах системы в условиях ползучести с последующим обобщением предложенного подхода к системам с поверхностно упрочненными стержневыми элементами.

Рассмотрим постановку задачи в самом общем случае. Обозначим через n количество стержней в системе, m — множество шарнирных узлов ($m < n$); $\sigma_i, \varepsilon_i, e_i, \varepsilon_i^T, p_i$ — напряжение, полная деформация, упругая компонента деформации, температурная деформация, деформация ползучести в i -том стержне ($i = \overline{1, n}$) соответственно. Задача рассматривается в декартовой системе координат, привязанной к некоторому опорному узлу (с нулевыми компонентами вектора перемещений).

Тогда уравнения равновесия можно представить в виде

$$F_{jg}(R_1^j, \dots, R_n^j, N_1^j, \dots, N_m^j) = 0 \quad (g = \overline{1, m}), \quad (1)$$

где N_s^j ($s = \overline{1, m}$) — проекции внешних сил \overline{N}_s на координатные оси, $j = \overline{1, \omega}$ ($\omega = 2$ для плоской, а $\omega = 3$ — для пространственной стержневой системы); R_α^j ($\alpha = \overline{1, n}$ — проекции внутренних усилий \overline{R}_α в стержнях системы, связанные с напряжениями σ_α соотношением $\overline{R}_\alpha = \sigma_\alpha S_\alpha \overline{n}_\alpha$, в котором \overline{n}_α — единичный вектор, задающий ориентацию α -го стержня, S_α — площадь его поперечного сечения).

В конечном итоге система уравнений (1) с использованием связи между напряжениями и реакциями может быть приведена к виду

$$\sum_{i=1}^n a_{ig}^j \sigma_i + \sum_{s=1}^m b_{sg}^j N_s^j = 0 \quad (j = \overline{1, \omega}; g = \overline{1, m}), \quad (2)$$

где a_{ig}^j и b_{sg}^j — вполне определенные константы, содержащие площади поперечных сечений и тригонометрические функции узлов, которые составляют стержни с осями координат.

Поскольку рассматриваются статически неопределимые конструкции, к уравнениям равновесия (2) необходимо добавить $m_0 = n - \omega m$ уравнений совместности деформаций

$$\Phi_k(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = 0 \quad (k = \overline{1, m_0}). \quad (3)$$

Полную деформацию ε_i каждого стержня системы будем представлять в виде аддитивной составляющей упругой деформации e_i , температурной деформации ε_i^T и деформации ползучести p_i :

$$\varepsilon_i = e_i + \varepsilon_i^T + p_i \quad (i = \overline{1, n}). \quad (4)$$

В общем случае будем предполагать, что стержни системы выполнены из разных материалов, поэтому упругие и реологические свойства материалов у разных стержней различные. Тогда для упругой и реологической деформации можно записать

$$e_i = \frac{\sigma_i}{E^i}, \quad p_i(t) \xrightarrow{A_i} \sigma_i(t), \quad \varepsilon_i^T = \alpha_i^T (T_1 - T_0) \quad (i = \overline{1, n}), \quad (5)$$

где E^i — модуль упругости материала i -того стержня, α_i^T — коэффициент температурного расширения материала, T_0, T_1 — начальная температура и температура эксплуатации соответственно ($T_0 < T_1$), а A_i — некоторый временной дифференциальный или интегральный оператор, связывающий деформацию ползучести, ее скорость и напряжение.

Используя теперь (4) и (5), соотношения (3) могут быть представлены в виде

$$\Phi_k^*(\sigma_1(t), \dots, \sigma_n(t), p_1(t), \dots, p_n(t), \varepsilon_1^T, \dots, \varepsilon_n^T) = 0 \quad (k = \overline{1, m_0}), \quad (6)$$

где величины деформаций ползучести каждого стержня в соответствии со вторым соотношением (5) выражаются через соответствующие напряжения по выбранной теории ползучести.

В общем случае нелинейной ползучести уравнения (6) являются нелинейными. Тогда уравнения (2), (6) представляют систему функционально-дифференциальных или функционально-интегральных (в зависимости от выбора операторов A_i в соотношениях (5)) нелинейных уравнений относительно напряжений $\sigma_i = \sigma_i(t)$, где t — время. Эта система достаточно сложная и не имеет аналитического решения. Поэтому разрешить ее можно только численно, используя известный в теории ползучести метод «шагов по времени», суть которого следующая. Сначала выполняется дискретизация по времени t : $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_\vartheta = t^*$ (t^* — время наблюдения за ползучестью конструкции). Тогда при $t_0 = 0$ с использованием начальных условий для деформации ползучести $p_i(0) = 0$ из решения системы (2), (6) находится решение в упругой области. Далее при известных значениях напряжения $\sigma_i = \sigma_i(0)$ находятся приращения деформации ползучести Δp_i за время $\Delta t_1 = t_1 - t_0$ при постоянных напряжениях, соответствующих времени t_0 , и вычисляется значение реологической деформации при $t = t_1$: $p_i(t_1) = p_i(0) + \Delta p_i$ ($i = \overline{1, n}$). Затем решается система (2), (6) и определяются напряжения $\sigma_i = \sigma_i(t_1)$, и процесс итерационно продолжается: находится новое приращение деформации ползучести Δp_i на интервале $\Delta t_2 = t_2 - t_1$ при постоянных напряжениях $\sigma_i = \sigma_i(t_1)$, определяются $p_i(t_2) = p_i(t_1) + \Delta p_i$, снова решается система (2), (6), находятся $\sigma_i = \sigma_i(t_2)$ и т. д.

Не снижая общности, реализацию приведенного метода (и последующих методик) рассмотрим применительно к конкретной трехэлементной плоской статически неопределимой стержневой конструкции, схема которой и основные обозначения приведены на рис. 1. Здесь же приведена декартова система координат. Стержни системы моделируются в виде сплошных цилиндрических образцов одинакового круглого поперечного сечения площадью $S = \pi a^2$ (a — радиус цилиндра), выполненных из одного материала, под действием температурно-силовой нагрузки (P — растягивающая сила).

Введем обозначения (см. рис. 1). Пусть N_s — возникающие в стержнях системы реакции, l_s — длины стержней, Δl_s — удлинения стержней в процессе деформирования всей конструкции ($s = 1, 2, 3$), Δl — перемещение узла A стержневой системы, φ — угол, образованный вектором перемещения с осью OY , α и β — углы, образованные первым I ($s = 1$) и вторым II ($s = 2$) стержнями системы с осью OY , то есть с третьим стержнем III ($s = 3$). Отметим, что здесь и далее задача рассматривается в рамках теории малых деформаций.

Уравнения равновесия системы имеют вид

$$\begin{cases} -\sigma_1 \sin \alpha + \sigma_2 \sin \beta = 0, \\ \sigma_1 \cos \alpha + \sigma_2 \cos \beta + \sigma_3 = P_*, \end{cases} \quad (7)$$

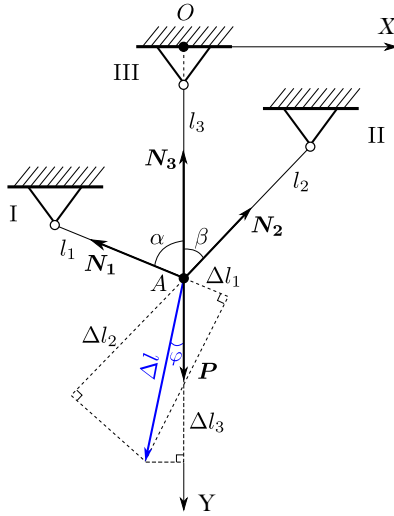


Рис. 1. Схема статически неопределимой стержневой системы
 [Figure 1. The scheme of statically indefinable rod system]

где σ_s ($s = 1, 2, 3$) — напряжения в стержнях, $P_* = P/S$, а уравнения совместности деформаций (УСД) —

$$\Delta l = \frac{\Delta l_1}{\cos(\alpha + \varphi)} = \frac{\Delta l_2}{\cos(\beta - \varphi)} = \frac{\Delta l_3}{\cos \varphi}. \quad (8)$$

Объединяя уравнения равновесия (7) и УСД (8), получим систему уравнений относительно неизвестных φ и σ_s ($s = 1, 2, 3$):

$$\begin{cases} -\sigma_1 \sin \alpha + \sigma_2 \sin \beta = 0, \\ \sigma_1 \cos \alpha + \sigma_2 \cos \beta + \sigma_3 = P_*, \\ \Delta l_1 \cos(\beta - \varphi) = \Delta l_2 \cos(\alpha + \varphi), \\ \Delta l_2 \cos \varphi = \Delta l_3 \cos(\beta - \varphi). \end{cases} \quad (9)$$

Рассмотрим решение задачи ползучести стержневой системы с учетом температурно-силового нагружения на основе системы уравнений (9). Считая, что прогрев изделия происходит «мгновенно», температурные деформации запишем как $\varepsilon^T = \alpha^T \Delta T$, где α^T — коэффициент линейного теплового расширения материала, $\Delta T = T_1 - T_0$.

Представим полную деформацию каждого из s стержней системы как сумму упругой деформации e_s , деформации ползучести p_s и температурной деформации ε^T (см. (2) и (5)):

$$\varepsilon_s(t) = e_s(t) + p_s(t) + \varepsilon^T, \quad (10)$$

$$e_s(t) = \frac{\sigma_s(t)}{E_1}, \quad p_s(t) : \sigma_s \xrightarrow{B} p_s, \quad s = 1, 2, 3, \quad (11)$$

где B — временной интегральный или дифференциальный оператор, связывающий напряжения и реологические деформации (скорости деформации) стержня, E_1 — модуль упругости материала при температуре T_1 .

С учетом выражений (10) и (11) преобразуем основную систему (9) к виду

$$\begin{cases} -\sigma_1(t) \sin \alpha + \sigma_2(t) \sin \beta = 0, \\ \sigma_1(t) \cos \alpha + \sigma_2(t) \cos \beta + \sigma_3(t) = P_*, \\ l_1 \left[\frac{\sigma_1(t)}{E_1} + p_1(t) + \varepsilon^T \right] \cos(\beta - \varphi) = l_2 \left[\frac{\sigma_2(t)}{E_1} + p_2(t) + \varepsilon^T \right] \cos(\alpha + \varphi), \\ l_2 \left[\frac{\sigma_2(t)}{E_1} + p_2(t) + \varepsilon^T \right] \cos \varphi = l_3 \left[\frac{\sigma_3(t)}{E_1} + p_3(t) + \varepsilon^T \right] \cos(\beta - \varphi). \end{cases} \quad (12)$$

После несложных преобразований из (12) определяются формулы для расчета напряжений $\sigma_s(t)$ в каждом из стержней:

$$\sigma_1(t) = \sigma_2(t) \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}, \quad (13)$$

$$\sigma_3(t) = P_* - \sigma_2(t) \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}, \quad (14)$$

$$\sigma_2(t) = \frac{l_3 (P_*/E_1 + p_3(t) + \varepsilon^T) \cos(\beta - \varphi) - l_2 (p_2(t) + \varepsilon^T) \cos \varphi}{\frac{1}{E_1} (l_2 \cos \varphi + l_3 \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} \cos(\beta - \varphi))}, \quad (15)$$

а для определения угла $\varphi = \varphi(t)$, характеризующего направление вектора перемещения узла A (см. рис. 1), после введения обозначений $\cos \varphi = z$, $\sin \varphi = \sqrt{1 - z^2}$ и элементарных преобразований получим уравнение для определения величины $z = \cos \varphi$:

$$\begin{aligned} & \left[\varepsilon^T \left(l_2 (z \cos \alpha - \sqrt{1 - z^2} \sin \alpha) - l_1 (z \cos \beta + \sqrt{1 - z^2} \sin \beta) \right) + \right. \\ & \quad \left. + l_2 p_2(t) (z \cos \alpha - \sqrt{1 - z^2} \sin \alpha) - l_1 p_1(t) (z \cos \beta + \sqrt{1 - z^2} \sin \beta) \right] \times \\ & \quad \times \left[l_2 z + l_3 \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} (z \cos \beta + \sqrt{1 - z^2} \sin \beta) \right] = \\ & = \left[l_3 \left(\frac{P_*}{E_1} + p_3(t) + \varepsilon^T \right) (z \cos \beta + \sqrt{1 - z^2} \sin \beta) - l_2 (p_2(t) + \varepsilon^T) z \right] \times \\ & \quad \times \left[l_1 \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} (z \cos \beta + \sqrt{1 - z^2} \sin \beta) - l_2 \cos(\alpha + \varphi) \right], \quad (16) \end{aligned}$$

которое разрешается численно.

Таким образом, решение системы (12) находится по схеме

$$t, l_1, l_2, l_3, \alpha^T, \Delta T, P_*, E_1, \alpha, \beta, p_1(t), p_2(t), p_3(t) \xrightarrow{(16)} z = \cos \varphi(t) \xrightarrow{(15)} \xrightarrow{(15)} \sigma_2(t) \xrightarrow{(13),(14)} \sigma_3(t), \sigma_1(t), \quad (17)$$

где цифры над стрелками означают номер формулы, по которой вычисляется соответствующая величина.

Отметим, что упругое решение, соответствующее «мгновенному» температурному и силовому нагружению при $t = 0 + 0$, также определяется по схеме (17) при $p_s(0 + 0) = 0$ ($s = 1, 2, 3$).

Для реализации схемы (17) необходимо иметь деформации ползучести $p_s(t)$, которые можно определить только при наличии известной теории ползучести для рассматриваемого материала.

Полагаем, что рассматриваемые материалы обладают только первой и второй стадиями ползучести, а деформация ползучести необратима. Для конкретизации оператора B в (11) воспользуемся вариантом одноосной реологической модели Ю. П. Самарина [29], который описывает первые две стадии одноосной ползучести следующим образом:

$$p(t) = v(t) + w(t); \quad (18)$$

$$\dot{v}(t) = \begin{cases} \lambda \left[b \left| \frac{\sigma(t)}{\sigma^*} \right|^{n_1-1} \cdot \frac{\sigma(t)}{\sigma^*} - v(t) \right], & \left[b \left| \frac{\sigma(t)}{\sigma^*} \right|^{n_1-1} \cdot \frac{\sigma(t)}{\sigma^*} - v(t) \right] > 0, \\ 0, & \left[b \left| \frac{\sigma(t)}{\sigma^*} \right|^{n_1-1} \cdot \frac{\sigma(t)}{\sigma^*} - v(t) \right] \leq 0; \end{cases} \quad (19)$$

$$\dot{w}(t) = c \left| \frac{\sigma(t)}{\sigma^*} \right|^{m_1-1} \cdot \frac{\sigma(t)}{\sigma^*}, \quad (20)$$

$$v(0) = w(0) = 0. \quad (21)$$

Здесь p — деформация ползучести; v — вязкопластическая, w — вязкая составляющие деформации p ; λ , b , c , n_1 , m_1 , σ^* — константы модели.

Как отмечалось выше, реализовать методику расчета (17) можно лишь численными методами. При численной реализации решения конкретной задачи ползучести для рассматриваемой стержневой системы будем использовать описанный выше известный метод — «шаги по времени» в моменты времени t_j ($j = 0, 1, \dots, \vartheta$). Используя метод Эйлера в (18)–(21), все приращения накопленной деформации ползучести и ее компонент для каждого из s стержней системы за промежутки времени $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ можно рассчитать по соотношениям

$$p_s(t_{j+1}) = v_s(t_{j+1}) + w_s(t_{j+1});$$

$$v_s(t_{j+1}) = v_s(t_j) + \Delta v_s(t_{j+1});$$

$$\Delta v_s(t_{j+1}) = \begin{cases} \lambda \left[b \left| \frac{\sigma_s(t_j)}{\sigma^*} \right|^{n_1-1} \cdot \frac{\sigma_s(t_j)}{\sigma^*} - v_s(t_j) \right] \Delta t_j, & [\dots] > 0; \\ 0, & [\dots] \leq 0; \end{cases}$$

$$w_s(t_{j+1}) = w_s(t_j) + \Delta w_s(t_{j+1});$$

$$\Delta w_s(t_{j+1}) = c \left| \frac{\sigma_s(t_j)}{\sigma^*} \right|^{m_1-1} \cdot \frac{\sigma_s(t_j)}{\sigma^*} \Delta t_j.$$

При $t = 0+0$ за начальные данные принимаем термоупругое решение $\sigma_s(0) = \sigma_s^0$ и $\varphi = \varphi^0$, определяемое также согласно (17) при $p_s(0) = 0$ ($s = 1, 2, 3$).

После достижения заданного расчетного времени ползучести t^* производятся последовательно силовая ($t = t^* - 0$) и температурная ($t = t^* + 0$) разгрузки. Чтобы получить напряжения в каждом из стержней системы после

мгновенной температурно-силовой разгрузки достаточно разрешить систему (12), положив во втором уравнении $P_* = 0$ и приняв $\varepsilon^T = 0$.

Частичная проверка «работоспособности» разработанного численного метода исследования ползучести стержневой системы «шагами по времени» выполнена сравнением расчетных данных по этому методу для напряжений при достаточно больших значениях времени с асимптотическими значениями для этих же величин при $t \rightarrow \infty$, полученных другим способом. При $t \rightarrow \infty$ напряжения в стержнях системы принимают фиксированные значения $\sigma_s^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_s(t)$ ($s = 1, 2, 3$), так же как и значение угла $\varphi^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t)$, и ползучесть системы характеризуется постоянной скоростью деформации, определяемой только вязкой компонентой w в реологических соотношениях (18), (20) (величинами упругой, температурной деформации и вязкопластической компоненты $v_s(t)$ в силу ее асимптотической ограниченности пренебрегаем). Тогда из (20) при $t \rightarrow \infty$ имеем

$$\dot{p}_s(t) = c \left| \frac{\sigma_s^*}{\sigma^*} \right|^{m_1 - 1} \cdot \frac{\sigma_s^*}{\sigma^*} = \text{const},$$

и система (12) принимает вид

$$\begin{cases} -\sigma_1^* \sin \alpha + \sigma_2^* \sin \beta = 0, \\ \sigma_1^* \cos \alpha + \sigma_2^* \cos \beta + \sigma_3^* = P_*, \\ l_1 \left(\frac{\sigma_1^*}{\sigma^*} \right)^{m_1} \cos(\beta - \varphi^*) = l_2 \left(\frac{\sigma_2^*}{\sigma^*} \right)^{m_1} \cos(\alpha + \varphi^*), \\ l_2 \left(\frac{\sigma_2^*}{\sigma^*} \right)^{m_1} \cos \varphi^* = l_3 \left(\frac{\sigma_3^*}{\sigma^*} \right)^{m_1} \cos(\beta - \varphi^*). \end{cases} \quad (22)$$

Вводя обозначения $\cos \varphi^* = z$, $\sin \varphi^* = \sqrt{1 - z^2}$, из (22) получаем

$$\sigma_1^* = \sigma_2^* \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}, \quad (23)$$

$$\sigma_3^* = P_* - \sigma_2^* \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}, \quad (24)$$

$$l_2 z \left(\frac{\sigma_2^*}{\sigma^*} \right)^{m_1} - l_3 \left(\frac{P_*}{\sigma^*} - \frac{\sigma_2^*}{\sigma^*} \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} \right)^{m_1} [z \cos \beta + \sqrt{1 - z^2} \sin \beta] = 0, \quad (25)$$

$$l_1 [z \cos \beta + \sqrt{1 - z^2} \sin \beta] \left(\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \right)^{m_1} - l_2 [z \cos \alpha - \sqrt{1 - z^2} \sin \alpha] = 0, \quad (26)$$

при этом уравнение (26) относительно z , а затем и уравнение (25) относительно слагаемого σ_2^* разрешаются численно.

Таким образом, схема расчета предельных значений σ_s^* и φ^* выражается следующей последовательностью соотношений (23)–(26):

$$P_*, l_1, l_2, l_3, \alpha, \beta \xrightarrow{(26)} z = \cos \varphi^*, \varphi^* \xrightarrow{(25)} \sigma_2^* \xrightarrow{(24)} \sigma_3^* \xrightarrow{(23)} \sigma_1^*. \quad (27)$$

Для модельных расчетов здесь и далее использовалась статически неопределимая система стержней (рис. 1) из сплава ЖС6У со следующими параметрами: $l_1 = 500$ мм, $l_2 = 4l_1$, $l_3 = 2l_1$ — длины стержней; $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$ —

углы между стержнями; $a = 3.76$ мм — их радиус. Изначально система находится в ненагруженном состоянии ($P = 0$) при комнатной температуре ($T_0 = 20^\circ\text{C}$), при этом $E_0 = 2.3 \cdot 10^5$ МПа — модуль Юнга, $\mu = 0.3$ — коэффициент Пуассона, $\alpha^T = 1.3 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ — коэффициент линейного теплового расширения материала.

Асимптотические и расчетные (шагами по времени) значения напряжений вычислялись в условиях температурно-силового нагружения: $T_1 = 675^\circ\text{C}$, соответствующий модуль Юнга $E_1 = 1.85 \cdot 10^5$ МПа; растягивающая сила $P = 41$ кН.

Параметры реологической модели (18)–(21) для материала ЖС6У при температуре 675°C взяты из работы [26]: $\lambda = -0.21$; $n_1 = 2.564$; $m_1 = 4.509$; $\sigma^* = 1$; $b = 4.221 \cdot 10^{-11}$ МПа $^{-n_1}$; $c = 4.237 \cdot 10^{-18}$ МПа $^{-m_1}$.

После температурно-силового нагружения имеем: $\sigma_1^0 = 188.51$ МПа, $\sigma_2^0 = 230.88$ МПа, $\sigma_3^0 = 665.61$ МПа, $\varphi^0 = 18.5^\circ$. Используя эти значения в качестве начальных данных для расчета ползучести, получим графики (см. рис. 2) изменения растягивающих напряжений $\sigma_s = \sigma_s(t)$ в каждом из стержней системы ($s = 1, 2, 3$) и угла $\varphi = \varphi(t)$. За расчетное время $t^* = 500$ ч растягивающие напряжения σ_s в условиях ползучести претерпевают существенные изменения и достигают следующих значений: $\sigma_1(t^*) = 330.70$ МПа, $\sigma_2(t^*) = 405.02$ МПа, $\sigma_3(t^*) = 471.38$ МПа, при этом $\varphi(t^*) = 23.95^\circ$.

Кривые на рис. 2 показывают, что напряжения σ_s при $t > 100$ ч практически перестают изменяться, т.е. наблюдается их асимптотическое поведение.

В табл. 1 приведены расчетные значения напряжений σ_s , полученные численным методом на момент времени $t^* = 500$ ч, и их асимптотические значения, полученные по схеме (27). Здесь же представлена относительная погрешность расчетных значений $\sigma_s(t^*)$ по отношению к соответствующим асимптотическим значениям σ_s^* . Малая величина погрешности подтверждает правомерность использования численного метода. Отметим интересный факт дрейфа направления вектора перемещения узла А (см. рис. 1) в процессе ползучести стержневой системы.

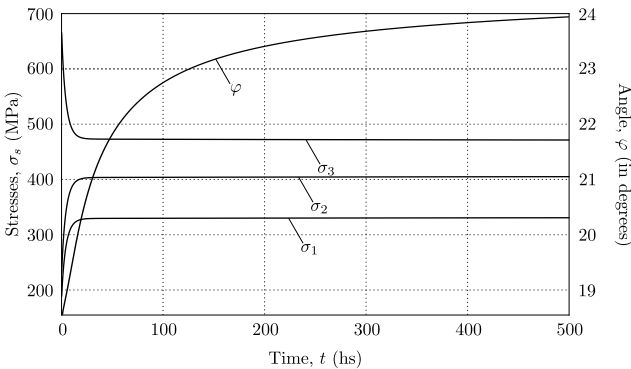


Рис. 2. Расчетные напряжения в боковых (кривые σ_1, σ_2) и центральном (кривая σ_3) стержнях системы (рис. 1) и изменение угла φ в процессе ползучести при температурно-силовой нагрузке ($T_1 = 675^\circ\text{C}$, $P = 41$ кН, материал стержней — ЖС6У)

[Figure 2. The plots of the calculated stresses in lateral (curves σ_1, σ_2) and central (curve σ_3) rods of the system (see Fig. 1) and φ angle change during creep under elevated temperature tensile testing ($T_1 = 675^\circ\text{C}$, $P = 41$ kN, the rods made of the ZhS6U alloy)]

Таблица 1

Asymptotic (limit) values of stresses obtained by Eqs. (27)			
σ_1^* , МПа	σ_2^* , МПа	σ_3^* , МПа	$\cos \varphi^*$
331.51	406.01	470.28	0.919
Calculated values of stresses obtained by Eqs. (17) for $t^* = 500$ hs			
$\sigma_1(t^*)$, МПа	$\sigma_2(t^*)$, МПа	$\sigma_3(t^*)$, МПа	$\cos \varphi(t^*)$
330.70	405.02	471.38	0.914
Relative error, %			
0.25	0.24	0.23	0.55

2. Схема решения задачи релаксации ОН в поверхностно упрочненных элементах статически неопределимой системы в условиях ползучести. Основной задачей данной работы является разработка метода расчета релаксации ОН в поверхностно упрочненных элементах статически неопределимой системы в условиях ползучести на примере конструкции, представленной на рис. 1. Такая задача является многоступенчатой, поэтому данная статья структурирована в соответствии со следующими этапами исследования:

- 1) реконструкция начального напряженно-деформированного состояния в цилиндрических стержневых элементах системы после процедуры анизотропного (в общем случае) ППД при нормальной температуре T_0 по методике [12, 25];
- 2) расчет полей ОН в каждом из упрочненных стержней системы после «мгновенной» температурно-силовой нагрузки с температуры упрочнения T_0 до температуры эксплуатации T_1 ($T_0 < T_1$);
- 3) решение краевой задачи релаксации ОН в каждом упрочненном стержне системы в условиях ползучести при заданной температурно-силовой нагрузке на фоне ползучести всей конструкции при температуре T_1 ;
- 4) расчет полей ОН в элементах системы в момент «мгновенной» температурно-силовой разгрузки системы от T_1 до значения T_0 за заданное время после окончания процесса ползучести.

Таким образом, реализация представленной схемы решения задачи даст полную картину кинетики ОН с течением времени в каждом из упрочненных стержневых элементов статически неопределимой стержневой системы в условиях ползучести на разных этапах режима «нагрузка – разгрузка». Рассмотрим каждый из вышеизложенных этапов.

3. Формирование напряженно-деформированного состояния элементов системы после поверхностного упрочнения и температурно-силового нагружения. Первый этап исследования поставленной задачи – реконструкция начального напряженно-деформированного состояния (полей остаточных напряжений и пластических деформаций) после ППД. Для этой цели используется известная феноменологическая методика восстановления напряженно-деформированного состояния в сплошном упрочненном цилиндрическом образце, разработанная в работах [12, 25]. Решение задачи осуществляется в цилиндрической системе координат (r, θ, z) , где σ_r^{res} , $\sigma_\theta^{\text{res}}$ и σ_z^{res} – радиальное, окружное и осевое остаточные напряжения, а q_r , q_θ и q_z – соот-

ответственно компоненты тензора пластических деформаций (ПД) после поверхностного упрочнения. Недиagonальные компоненты тензоров ОН и ПД являются малыми по сравнению с диагональными компонентами, что экспериментально установлено в работе [31], поэтому в данной методике они не рассматриваются. В [25] на основе использования уравнения равновесия, совместности деформаций, закона Гука, условия пластической несжимаемости материала и гипотезы о постулировании связи осевой и окружной компонент тензора ПД установлено, что все компоненты тензоров ОН и ПД в упрочненном слое выражаются через окружную компоненту $\sigma_\theta^{\text{res}}$.

Полагая, что в области сжатия поверхностного слоя вторичные ПД не возникают, расчетная схема включает в себя следующие зависимости [25]:

$$\sigma_r^{\text{res}}(r) = \frac{1}{r} \int_0^r \sigma_\theta^{\text{res}}(\xi) d\xi, \quad (28)$$

$$q_\theta(r) = \frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{E_0(1 + \alpha\mu)^2} r^{-\frac{2+\alpha}{1+\alpha\mu}} \int_0^r \xi^{\frac{1+\alpha-\alpha\mu}{1+\alpha\mu}} \left[\sigma_r^{\text{res}}(\xi) + (1 + \alpha)\sigma_\theta^{\text{res}}(\xi) \right] d\xi - \frac{1 + \mu}{E_0(1 + \alpha\mu)} \left[(1 - \mu)\sigma_\theta^{\text{res}}(r) - \mu\sigma_r^{\text{res}}(r) \right], \quad (29)$$

$$q_z(r) = \alpha q_\theta(r), \quad (30)$$

$$q_r = -q_\theta(1 + \alpha), \quad (31)$$

$$\varepsilon_z^0 = \frac{2}{a^2} \int_0^a \xi \left\{ q_z(\xi) - \frac{\mu}{E_0} \left[\sigma_r^{\text{res}}(\xi) + \sigma_\theta^{\text{res}}(\xi) \right] \right\} d\xi, \quad (32)$$

$$\sigma_z^{\text{res}}(r) = E_0(\varepsilon_z^0 - q_z(r)) + \mu(\sigma_r^{\text{res}}(r) + \sigma_\theta^{\text{res}}(r)), \quad (33)$$

где по-прежнему E_0 — модуль Юнга при температуре T_0 , μ — коэффициент Пуассона, a — радиус стержня, а α — параметр анизотропии упрочнения (в направлениях осей z и θ , см., например, [25]). Отметим, что $\alpha = 1$ для дробеструйной обработки, а, например, для обкатки роликом, алмазного выглаживания и некоторых других технологий $\alpha \neq 1$ [25, 26, 30, 31].

Приведем в соответствии с (28)–(33) схему расчета полей ОН и ПД в отдельном сплошном цилиндрическом образце непосредственно после упрочнения его поверхности методами ППД:

$$\sigma_\theta^{\text{res}}(r) \xrightarrow{(28)} \sigma_r^{\text{res}}(r) \xrightarrow{(29)} q_\theta(r) \xrightarrow{(30)} q_z(r) \xrightarrow{(31)} q_r(r) \xrightarrow{(32)} \varepsilon_z^0 \xrightarrow{(33)} \sigma_z^{\text{res}}(r). \quad (34)$$

Полученные поля ОН и ПД играют роль начальных данных для последующего решения краевой задачи релаксации ОН в условиях ползучести.

Из (34) можно заметить, что все компоненты тензоров ОН и ПД определяются исходя из значений окружной компоненты ОН и параметра α , при этом компонента $\sigma_\theta^{\text{res}}(r)$ должна быть определена для всех $r \in [0, a]$. Для этого дискретная экспериментальная зависимость для окружной компоненты ОН, заданная, как правило, в тонком упрочненном слое глубиной 100–200 мкм, экстраполируется аналитической функцией вида

$$\sigma_\theta^{\text{res}}(r) = \sigma_0 - \sigma_1 \exp\left(-\frac{(a - h^* - r)^2}{b^2}\right), \quad (35)$$

где $h^* = a - r$ — расстояние от упрочненной поверхности цилиндрического образца, при котором эпюра $\sigma_\theta^{\text{res}}(r)$ достигает экстремума (локального минимума); σ_0 , σ_1 и b — параметры, методика определения которых подробно изложена в [25, 26, 30].

Поскольку в рассматриваемой стержневой системе все элементы моделируются идентичными стержнями, включая процедуру их упрочнения, начальное НДС (после упрочнения в момент времени $t = 0 - 0$) в каждом из них будет идентичным. Поэтому начальные условия для всех стержней конструкции после ППД будут определяться тензором ОН с компонентами $\sigma_z^{\text{res}}(r)$, $\sigma_\theta^{\text{res}}(r)$, $\sigma_r^{\text{res}}(r)$, которые находятся согласно (34), и тензором полных деформаций с компонентами

$$\begin{aligned}\varepsilon_z^0(r) &= [\sigma_z^{\text{res}}(r) - \mu(\sigma_\theta^{\text{res}}(r) + \sigma_r^{\text{res}}(r))] / E_0 + q_z(r), \\ \varepsilon_\theta^0(r) &= [\sigma_\theta^{\text{res}}(r) - \mu(\sigma_r^{\text{res}}(r) + \sigma_z^{\text{res}}(r))] / E_0 + q_\theta(r), \\ \varepsilon_r^0(r) &= [\sigma_r^{\text{res}}(r) - \mu(\sigma_\theta^{\text{res}}(r) + \sigma_z^{\text{res}}(r))] / E_0 + q_r(r).\end{aligned}$$

Допустим, что в момент $t = 0 + 0$ происходит «мгновенная» температурная нагрузка конструкции с температуры T_0 (температура упрочнения, при которой модуль Юнга материала стержней равен E_0) до температуры T_1 (при которой модуль Юнга равен E_1). Предположим, что при этом не возникают дополнительные ПД, т. е. распределение ПД не зависит от температуры. Тогда на момент полного прогрева отдельно взятого стержня выражение (29) при температуре T_1 можно записать в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned}q_\theta(r) &= \frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{E_1(1 + \alpha\mu)^2} r^{-\frac{2+\alpha}{1+\alpha\mu}} \int_0^r \xi^{\frac{1+\alpha-\alpha\mu}{1+\alpha\mu}} \frac{E_1}{E_0} \left[\sigma_r^{\text{res}}(\xi) + (1 + \alpha)\sigma_\theta^{\text{res}}(\xi) \right] d\xi - \\ &\quad - \frac{1 + \mu}{E_1(1 + \alpha\mu)} \frac{E_1}{E_0} \left[(1 - \mu)\sigma_\theta^{\text{res}}(r) - \mu\sigma_r^{\text{res}}(r) \right].\end{aligned}\quad (36)$$

Выражение (36) позволяет объяснить влияние «мгновенного» повышения температуры на поведение ОН. Итак, поскольку компонента $q_\theta = q_\theta(r)$ не зависит от температуры, соотношения типа (29) при температуре T_1 и модуле Юнга E_1 получаются из (36) умножением всех компонент тензора ОН, сформированных после ППД при температуре T_0 и модуле Юнга E_0 , на коэффициент E_1/E_0 . Таким образом, «мгновенное» повышение температуры приводит к «скачку» эпюр ОН на коэффициент E_1/E_0 .

Вернемся к исходной задаче — статически неопределимой системе (рис. 1). Приложение к стержневой системе растягивающей нагрузки P и ее «мгновенный» прогрев до температуры T_1 приводят к возникновению в осевом направлении стержневой системы «рабочих» напряжений σ_s^0 ($s = 1, 2, 3$), которые накладываются на НДС, сформированное после ППД. За счет «рабочих» напряжений в стержнях конструкции наблюдается «упругий» скачок осевых напряжений на величину σ_s^0 , при этом напряжения σ_s^0 в момент $t = 0 + 0$, соответствующие продольным растягивающим нагрузкам в стержнях конструкции, находятся из системы (12) при отсутствии деформаций ползучести ($p_1(t) = p_2(t) = p_3(t) \equiv 0$).

Еще раз отметим, что в рассматриваемой стержневой системе все элементы моделируются идентичными стержнями, включая процедуру их упрочнения. Поэтому зависимость компонент $\sigma_z^{\text{res}}(r)$, $\sigma_\theta^{\text{res}}(r)$, $\sigma_r^{\text{res}}(r)$, возникающих

после ППД и повышения температуры до T_1 , будет одинаковой во всех стержнях. Следовательно, компоненты тензора ОН для каждого стержня системы ($s = 1, 2, 3$) после мгновенной температурно-силовой нагрузки (в момент $t = 0 + 0$) можно записать в виде

$$\sigma_{zs}(r, 0+0) = \frac{E_1}{E_0} \sigma_z^{\text{res}}(r) + \sigma_s^0, \quad \sigma_{\theta s}(r, 0+0) = \frac{E_1}{E_0} \sigma_{\theta}^{\text{res}}(r), \quad \sigma_{rs}(r, 0+0) = \frac{E_1}{E_0} \sigma_r^{\text{res}}(r). \quad (37)$$

Здесь используется описанная выше «трансформация» ОН при изменении температуры с T_0 до T_1 .

Изменения осевых напряжений за счет «рабочих» напряжений приводит к «скачку» упругих деформаций, поэтому компоненты тензора полных деформаций для каждого из стержней принимают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rs}(r, 0+0) &= [\sigma_r^{\text{res}}(r) - \mu(\sigma_{\theta}^{\text{res}}(r) + \sigma_{zs}(r, 0+0))] / E_1 + q_r(r), \\ \varepsilon_{\theta s}(r, 0+0) &= [\sigma_{\theta}^{\text{res}}(r) - \mu(\sigma_r^{\text{res}}(r) + \sigma_{zs}(r, 0+0))] / E_1 + q_{\theta}(r), \\ \varepsilon_{zs}(r, 0+0) &= [\sigma_{zs}(r, 0+0) - \mu(\sigma_{\theta}^{\text{res}}(r) + \sigma_r^{\text{res}}(r))] / E_1 + q_z(r). \end{aligned} \quad (38)$$

Соотношения (37), (38) задают НДС каждого упрочненного стержня рассматриваемой системы в момент $t = 0 + 0$ после процедуры ППД и «мгновенного» температурно-силового нагружения стержневой конструкции, т.е. они определяют начальные данные для решения краевой задачи релаксации ОН в процессе ползучести.

4. Расчет кинетики НДС в поверхностно упрочненных элементах статически неопределимой системы в условиях ползучести при температурно-силовом нагружении. Рассмотрим решение краевой задачи релаксации ОН в упрочненном слое стержней рассматриваемой системы на фоне ее ползучести при температуре T_1 (модуль Юнга материала стержней равен E_1) под действием растягивающей нагрузки P (рис. 1). Задача решается в цилиндрической системе координат r, θ, z . Решение данной задачи подразумевает расчет полей ОН и ПД в любой момент времени «эксплуатации» стержневой системы. Постановка краевой задачи в любой момент времени t для каждого стержня системы ($s = 1, 2, 3$) включает в себя следующие соотношения и условия:

– уравнения равновесия:

$$r \frac{d\sigma_{rs}(r, t)}{dr} + \sigma_{rs}(r, t) = \sigma_{\theta s}(r, t), \quad (39)$$

$$\int_0^a r \sigma_{zs}(r, t) dr = \frac{F_s(t)}{2\pi}, \quad (40)$$

где $\sigma_{rs}(r, t)$, $\sigma_{\theta s}(r, t)$, $\sigma_{zs}(r, t)$ – радиальная, окружная и осевая компоненты тензора напряжений в стержне соответственно; $F_s(t)$ – продольная растягивающая сила, возникающая в каждом стержне системы;

– уравнение совместности деформаций:

$$r \frac{d\varepsilon_{\theta s}(r, t)}{dr} + \varepsilon_{\theta s}(r, t) = \varepsilon_{rs}(r, t), \quad (41)$$

где $\varepsilon_{rs}(r, t)$, $\varepsilon_{\theta s}(r, t)$ — радиальная и окружная компоненты тензора полных деформаций;

– гипотеза плоских сечений:

$$\varepsilon_{zs}(r, t) = \varepsilon_{zs}^0(t), \quad (42)$$

где $\varepsilon_{zs}(r, t)$ — осевая компонента тензора полных деформаций;

– краевые условия:

$$\sigma_{rs}(r, t)|_{r=a} = 0. \quad (43)$$

Отметим, что в соотношениях (39) и (41) используются обычные производные по переменной r , так как время t входит в эти соотношения параметрически.

Начальное НДС при $t = 0 + 0$ (непосредственно после температурно-силового нагружения стержневой системы) задается соотношениями (37), (38).

Расчет кинетики напряжений стержневой системы при ползучести базируется на результатах работы [25], в которой разработан прямой метод решения задачи релаксации ОН в поверхностно упрочненном цилиндре, получивший последующее развитие на случай одноосного растяжения и комбинации растяжения с кручением в публикациях [20, 30]. Однако в отличие от перечисленных исследований в данной работе необходимо учитывать перераспределение растягивающих напряжений $\sigma_s(t)$ в стержнях системы ($s = 1, 2, 3$), поэтому методика работ [20, 25, 30] модифицируется с учетом отмеченного фактора.

Изложим схему решения поставленной краевой задачи с учетом упрочнения стержней.

В стержнях системы, в которых наведены поля ПД, компоненты тензора деформации в любой момент времени t представляются в виде суммы

$$\varepsilon_{ls}(r, t) = e_{ls}(r, t) + q_{ls}(r) + p_{ls}(r, t) + \varepsilon^T \quad (l = r, \theta, z), \quad (44)$$

где $e_{ls}(r, t)$ — упругая деформация, $q_{ls}(r) = q_l(r)$ — пластическая деформация, ε^T — температурная деформация, $p_{ls}(r, t)$ — деформация ползучести, определяемая по выбранной теории ползучести, адекватно описывающей экспериментальные данные (в рассматриваемом случае — по модели (18)–(21)).

В начальный момент времени во всех точках рассматриваемых стержней деформации ползучести отсутствуют: $p_{ls}(r, 0) = 0$.

В условиях температурно-силового нагружения в стержнях системы происходит перераспределение (релаксация) ОН на фоне ползучести, поэтому дальнейшая цель исследования — описание релаксации ОН в упрочненных стержнях рассматриваемой статически неопределимой системы. Для достижения этой цели необходимо разрешить поставленную краевую задачу (39)–(44) относительно $\sigma_{ls}(r, t)$ ($l = r, \theta, z$; $s = 1, 2, 3$).

При помощи математических преобразований эта задача сводится к решению дифференциального уравнения второго порядка относительно радиальной компоненты [20, 25]:

$$r^2 \frac{d^2 \sigma_{rs}(r, t)}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_{rs}(r, t)}{dr} = g_s(r, t), \quad (45)$$

где

$$g_s(r, t) = \frac{E_1}{1 - \mu^2} \left[\frac{2 + \alpha}{1 + \alpha} q_r(r) + p_{rs}(r, t) - p_{\theta s}(r, t) - r \left(\frac{dp_{\theta s}(r, t)}{dr} + \mu \frac{dp_{zs}(r, t)}{dr} \right) + \frac{r}{1 + \alpha} (1 + \alpha\mu) \frac{dq_{rs}(r)}{dr} \right],$$

с граничными условиями

$$\sigma_{rs}(r, t) \Big|_{r=a} = 0; \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{d\sigma_{rs}(r, t)}{dr} \Big|_{r=0} = 0.$$

Решение дифференциального уравнения (45) при заданных граничных условиях имеет вид

$$\sigma_{rs}(r, t) = - \int_r^a \frac{1}{\xi^3} \left(\int_0^\xi g_s(\eta, t) \eta d\eta \right) d\xi. \quad (46)$$

С учетом найденных величин $\sigma_{rs} = \sigma_{rs}(r, t)$ из уравнений равновесия определяются осевая и окружная компоненты тензора напряжений:

$$\sigma_{\theta s}(r, t) = \sigma_{rs}(r, t) + r \frac{d\sigma_{rs}(r, t)}{dr}, \quad (47)$$

$$\sigma_{zs}(r, t) = [\varepsilon_{zs}^0 - q_{zs}(r) - p_{zs}(r, t) - \varepsilon^T] E_1 + \mu [\sigma_{rs}(r, t) + \sigma_{\theta s}(r, t)], \quad (48)$$

где

$$\varepsilon_{zs}^0(t) = \frac{1}{E_1} \sigma_s(t) + p_s(t);$$

$$p_s(t) = \frac{2}{a^2} \int_0^a [q_{zs}(r) + p_{zs}(r, t) + \varepsilon^T - \frac{\mu}{E_1} (\sigma_{rs}(r, t) + \sigma_{\theta s}(r, t))] r dr$$

— интегральная величина осевой деформации каждого стержня рассматриваемой системы ($s = 1, 2, 3$), которая используется для определения напряжений $\sigma_s = \sigma_s(t)$ из решения системы (12).

Соотношения (46)–(48) позволяют отслеживать кинетику всех компонент тензора напряжений в упрочненном элементе стержневой системы в условиях ползучести при температурно-силовом нагружении.

При $t > 0$ деформации ползучести $p_{ls}(r, t)$ определяются с использованием компонент тензора напряжений $\sigma_{ls}(r, t)$ ($l = r, \theta, z; s = 1, 2, 3$).

Релаксация ОН проходит на фоне ползучести. В представленные выше формулы наряду с компонентами тензора деформаций ползучести $p_{ls}(r, t)$ входят и их производные dp_{ls}/dr ($l = r, \theta, z; s = 1, 2, 3$). Следовательно, решение поставленной задачи требует применения соответствующей реологической модели уже при сложном напряженном состоянии.

Для этой цели будем использовать реологическую модель, предложенную Ю. П. Самариным [29], которая является обобщением одноосной модели вида (18)–(21) на случай сложного напряженного состояния для первых двух стадий ползучести:

$$p_{ij} = v_{ij} + w_{ij}, \quad (49)$$

$$\dot{w}_{ij} = \frac{3}{2}c\left(\frac{S_*}{\sigma^*}\right)^{m_1-1} \cdot \frac{1}{\sigma^*}(\sigma_{ij} - \sigma_{kk}\delta_{ij}/3), \quad (50)$$

$$\dot{v}_{\nu\nu}(t) = (1 + \mu')\beta_{\nu\nu}(t) - \mu'(\beta_{11}(t) + \beta_{22}(t) + \beta_{33}(t)), \quad (51)$$

$$\dot{\beta}_{\nu\nu}(t) = \begin{cases} \lambda \left[b \left(\frac{S_*}{\sigma^*} \right)^{n_1-1} \frac{\sigma_{\nu\nu}}{\sigma^*} - \beta_{\nu\nu}(t) \right], & \left[b \left(\frac{S_*}{\sigma^*} \right)^{n_1-1} \frac{\sigma_{\nu\nu}}{\sigma^*} - \beta_{\nu\nu}(t) \right] \sigma_{\nu\nu} > 0, \\ 0, & \left[b \left(\frac{S_*}{\sigma^*} \right)^{n_1-1} \frac{\sigma_{\nu\nu}}{\sigma^*} - \beta_{\nu\nu}(t) \right] \sigma_{\nu\nu} \leq 0, \end{cases} \quad (52)$$

где p_{ij} — тензор деформаций ползучести; w_{ij} и v_{ij} — тензоры деформаций вязкого течения и вязкопластической (необратимой) компоненты p_{ij} ; μ' — коэффициент Пуассона для компоненты $v_{\nu\nu}$ (согласно рекомендациям [29] можно использовать $\mu' = 0.42$); S_* — интенсивность напряжений; c , n_1 , λ , b , m_1 , σ^* — константы модели, имеющие тот же смысл (и численные значения), что и в одноосной модели (18)–(21).

Отметим, что расчет v_{ij} осуществляется в главных осях, поэтому суммирование по индексу ν в (51), (52) не производится. Также в силу того, что оси r , θ и z являются главными, под числовыми индексами 1, 2 и 3 в соотношениях (49)–(52) следует подразумевать индексы r , θ и z соответственно, при этом диагональные компоненты записывать с одним индексом, например, $\sigma_{11} = \sigma_\theta$, $\sigma_{22} = \sigma_r$, $\sigma_{33} = \sigma_z$ и т.д., а все недиагональные компоненты p_{ij} , v_{ij} , w_{ij} , σ_{ij} полагаются равными нулю.

Рассмотрим теперь момент времени $t = t^* + 0$, когда производится «мгновенная» температурно-силовая разгрузка стержневой системы. При такой разгрузке происходит ступенчатое изменение напряжений на величины соответствующих «упругих» напряжений, полученных путем решения системы (12) при значениях напряжений и деформаций, соответствующих финальным значениям расчета деформации ползучести, когда $P_* = 0$, $\varepsilon^T = 0$ и модуль Юнга равен E_0 :

$$\begin{cases} -\sigma_1(t^* + 0) \sin \alpha + \sigma_2(t^* + 0) \sin \beta = 0, \\ \sigma_1(t^* + 0) \cos \alpha + \sigma_2(t^* + 0) \cos \beta + \sigma_3(t^* + 0) = 0, \\ l_2 \left[\frac{\sigma_2(t^*+0)}{E_0} + p_2(t^* - 0) \right] \cos \varphi = l_3 \left[\frac{\sigma_3(t^*+0)}{E_0} + p_3(t^* - 0) \right] \cos (\beta - \varphi), \\ l_1 \left[\frac{\sigma_1(t^*+0)}{E_0} + p_1(t^* - 0) \right] \cos (\beta - \varphi) = l_2 \left[\frac{\sigma_2(t^*+0)}{E_0} + p_2(t^* - 0) \right] \cos (\alpha + \varphi). \end{cases}$$

Здесь $p_s(t^* - 0)$ — деформации ползучести, соответствующие последнему шагу расчета; $\sigma_s(t^* + 0)$ — напряжения в стержнях системы, возникающие сразу после температурно-силовой разгрузки.

Полагаем, что пластические деформации и накопленные деформации ползучести не изменяются при температурной разгрузке. Поэтому для вычисления ОН после разгрузки ($t = t^* + 0$) достаточно напряжения, предшествующие моменту разгрузки, т.е. полученные к моменту $t = t^* - 0$, умножить на коэффициент E_0/E_1 , обратный коэффициенту для температурного нагружения:

$$\begin{aligned} \sigma_{rs}(r, t^* + 0) &= \frac{E_0}{E_1} \sigma_{rs}(r, t^* - 0), \\ \sigma_{\theta s}(r, t^* + 0) &= \frac{E_0}{E_1} \sigma_{\theta s}(r, t^* - 0), \end{aligned}$$

$$\sigma_{zs}(r, t^* + 0) = \frac{E_0}{E_1} \sigma_{zs}(r, t^* - 0) - \sigma_s(t^* + 0).$$

Таким образом, получаем полную картину кинетики ОН в каждом упрочненном элементе рассматриваемой стержневой системы при различных режимах нагружения за цикл «температурно-силовая нагрузка – ползучесть – температурно-силовая разгрузка».

5. Численная реализация, результаты расчета и их анализ. Приведенные в разделах 2–4 методики могут быть реализованы только численно, в частности методом «шагов по времени».

Для этой цели используется дискретизация по временной t (см. раздел 1) и пространственной r переменным: $0 = r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_{\varrho-1} < r_{\varrho} = a$, где a – радиус стержня рассматриваемой системы, с определенными шагами $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$, $j = 0, 1, \dots, \vartheta$, $\Delta r_i = r_{i+1} - r_i$, $i = 0, 1, \dots, \varrho$. В пределах каждого временного шага считаем, что все текущие величины постоянны и равны своим значениям в соответствующих точках дискретизации (r_i, t_j) .

Вычисление интегралов, входящих в расчетные формулы, осуществляется по квадратурным формулам. Расчет деформаций ползучести осуществляется по модели (49)–(52), которая записывается в приращениях на основе метода Эйлера. Все производные, входящие в расчетные соотношения, вычисляются через конечные разности.

Численная реализация изложенной методики выполнялась для модельного примера, в качестве которого выступала рассмотренная на рис. 1 система в предположении упрочнения стержней пневмодробеструйной обработкой микрошариками (в формуле (31) $\alpha = 1$).

Все геометрические параметры стержневой системы, численные значения механических характеристик и параметры реологической модели для сплава ЖС6У при температуре 675 °С, а также значение величины растягивающей нагрузки приведены в разделе 1.

Предполагается, что стержни рассматриваемой системы идентичны цилиндрическому образцу, рассмотренному в работе [26], где в качестве начальной информации по распределению ОН в стержнях после упрочнения используется экспериментальная эпюра распределения осевой компоненты ОН для этого образца, приведенная на рис. 3.

В этом случае схема (34) несколько видоизменяется [26]. Поскольку при процедурах упрочнения, для которых в (31) $\alpha = 1$, распределения окружных и осевых компонент тензора ОН близки, в первом приближении параметры для аппроксимации компоненты $\sigma_{\theta}^{\text{res}}(r)$ определяются по экспериментальным данным для осевой компоненты. Далее осуществляется вариация параметров b , σ_0 и σ_1 в (35) и схема (34) многократно повторяется до достижения минимума среднеквадратического отклонения расчетных данных от экспериментальных для осевой компоненты ОН. Реализация этого метода позволила найти для окружной компоненты следующие значения параметров аппроксимации (35): $a = 3.76$ мм, $b = 0.089$ мм, $\sigma_0 = 22.491$ МПа, $\sigma_1 = -1071.865$ МПа, $h^* = 0$.

Релаксация ОН в поверхностно упрочненных слоях стержней рассматриваемой статически неопределимой системы протекает на фоне ее деформирования в условиях ползучести. При этом она протекает при переменных растягивающих напряжениях $\sigma_s(t)$, которые возникают в стержнях и изме-

няются во времени, что приводит к существенным изменениям методики работ [20, 25], в которых релаксация ОН протекала при постоянных растягивающих нагрузках.

На рис. 4–6 приведены результаты расчетов релаксации ОН в стержнях рассматриваемой системы при температурно-силовом нагружении продолжительностью 500 ч («мгновенный» прогрев с температуры 20 °С до 675 °С и приложение растягивающей нагрузки $P = 41$ кН к точке А, см. рис. 1) и последующей разгрузки («мгновенное» охлаждение с температуры 675 °С до 20 °С и снятие растягивающей нагрузки).

Отметим, что в момент приложения температурно-силовой нагрузки в стержнях системы происходит перераспределение всех компонент тензора наведенных ОН пропорционально коэффициенту E_0/E_1 . Кроме этого, в каждом из трех стержней ($s = 1, 2, 3$) за счет температурных деформаций и действия

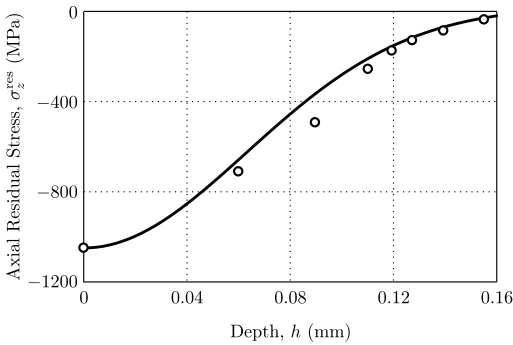


Рис. 3. Распределение осевой компоненты ОН по глубине упрочненного слоя $h = a - r$ цилиндрического образца из сплава марки ЖС6У после его упрочнения: линия — расчет, точки — эксперимент

[Figure 3. Distribution of the axial residual stress component over the depth of the hardened layer ($h = a - r$) of the cylindrical sample made of the ZhS6U alloy after hardening: curve illustrates calculations and points illustrates the experiment]

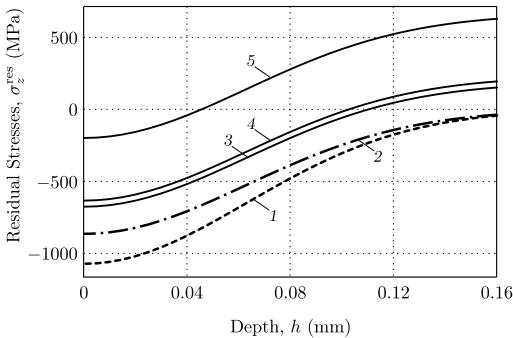


Рис. 4. Распределение осевых ОН в поверхностно упрочненных стержнях системы: 1 — после процедуры упрочнения ($t = 0 - 0$); 2 — после температурной нагрузки от $T_0 = 20$ °С до $T_1 = 675$ °С; 3, 4, 5 — после температурно-силовой нагрузки при $t = 0 + 0$ в первом, втором и третьем стержнях соответственно

[Figure 4. Axial residual stress distribution in the hardened rods system over the depth of the hardened layer: (1) after hardening at $t = 0 - 0$; (2) after temperature loading from $T_0 = 20$ °С to $T_1 = 675$ °С; (3, 4, 5) after elevated temperature and tensile force loading at $t = 0 + 0$ in the first, second and third rods, respectively]

приложенной нагрузки происходит дополнительное перераспределение осевых напряжений σ_{zs} .

На рис. 4 приведено распределение осевых ОН в поверхностно упрочненных стержнях рассматриваемой системы, при этом наблюдается «скачок» на величину «рабочих» напряжений σ_s^0 для каждого стержня системы (см. линии 3, 4, 5 и линию 2 на рис. 4). Представленные здесь поля ОН и соответствующие им ПД в момент времени $t = 0 + 0$ являются начальными данными для расчета релаксации ОН по методике, изложенной в разделе 4.

На рис. 5 в качестве примера приведены расчетные эпюры для радиальной и окружной компонент тензора ОН в первом упрочненном стержне системы в различные моменты времени $t = \{100; 300; 500\}$ ч, полученные по изложенной выше методике для расчета релаксации ОН. Отметим, что для остальных стержней эпюры этих компонент практически идентичны представленным на рис. 5.

На рис. 6 приведены эпюры осевой компоненты ОН для всех стержней системы. Здесь картина совсем иная. Если в первом и втором стержнях релаксация осевой компоненты носит «классический» монотонный характер, то в третьем стержне характер релаксации немонотонный: сначала вблизи поверхности значения осевой компоненты увеличиваются, а затем наблюдается их уменьшение (по модулю). Это связано со «скачком» осевой компоненты после приложения температурно-силового нагружения и существенным падением ее величины (по модулю) в поверхностном слое. В связи с этим процесс ползучести определяется в основном лишь напряжениями вне области сжатия материала, которые имеют там существенные значения.

Очевидно, с течением времени скорость релаксации замедляется, поскольку при уменьшении величины напряжений в поверхностном слое уменьшается и скорость деформирования (согласно реологической модели для сложного

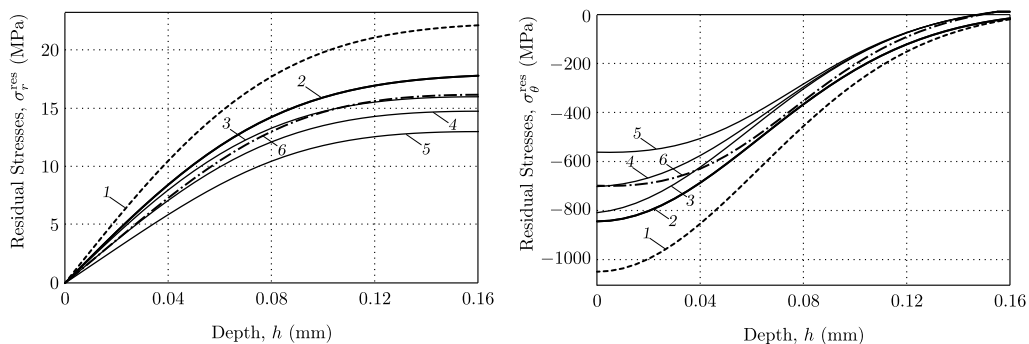


Рис. 5. Расчетные эпюры для радиальной (слева) и окружной (справа) компонент тензора ОН в первом упрочненном стержне системы в различные моменты времени: 1 — после процедуры упрочнения при $t = 0 - 0$; 2 — после температурно-силовой нагрузки при $t = 0 + 0$; 3, 4, 5 — в процессе ползучести в моменты времени $t = 100 - 0$ ч, $t = 200 - 0$ ч и $t = 300 - 0$ ч соответственно; 6 — после температурно-силовой разгрузки при $t = 500 + 0$ ч (финишные значения)

[Figure 5. The radial (left) and circumferential (right) components of the residual stress tensor in the first hardened rod of the system at different times: (1) after hardening at $t = 0 - 0$; (2) after elevated temperature (from $T_0 = 20^\circ\text{C}$ to $T_1 = 675^\circ\text{C}$) and tensile force ($P = 41$ kN) loading at $t = 0 + 0$; (3, 4, 5) during the creep at times $t = 100 - 0$ h, $t = 200 - 0$ h, and $t = 300 - 0$ h, respectively; (6) after reduced temperature (from $T_1 = 675^\circ\text{C}$ to $T_0 = 20^\circ\text{C}$) and tensile force ($P = 0$) unloading at $t = 500 + 0$ h (final values)]

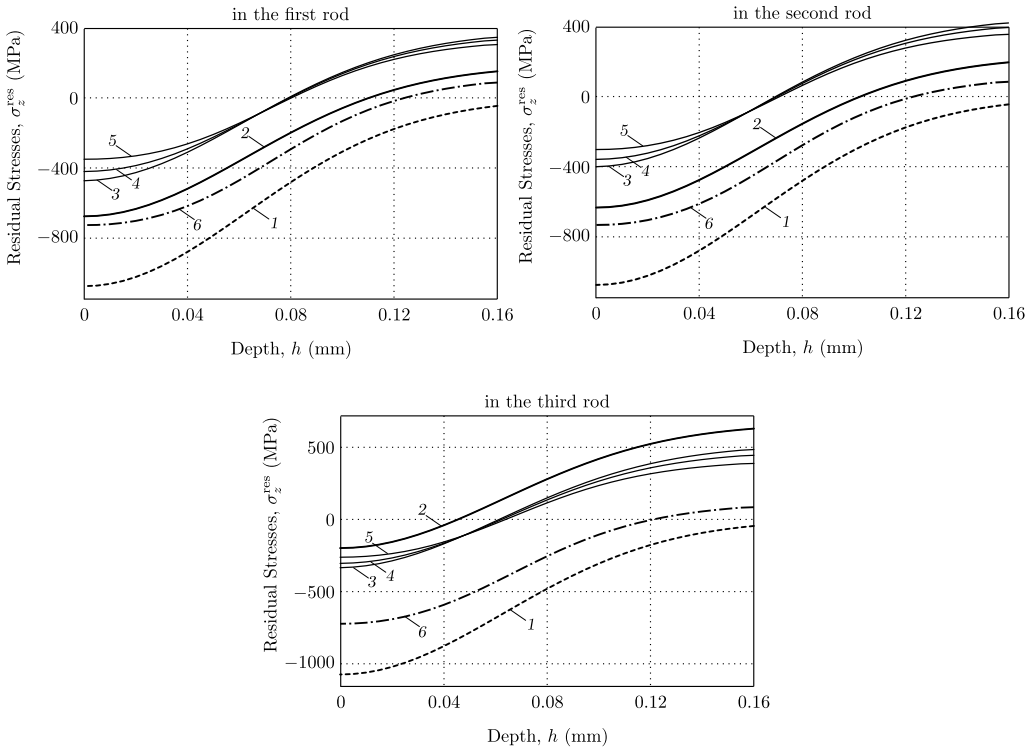


Рис. 6. Расчетные эпюры для осевой компоненты тензора ОН в упрочненных стержнях системы в различные моменты времени: 1 — после процедуры упрочнения при $t = 0 - 0$; 2 — после температурно-силовой нагрузки при $t = 0 + 0$; 3, 4, 5 — в процессе ползучести в моменты времени $t = 100 - 0$ ч, $t = 200 - 0$ ч и $t = 300 - 0$ ч соответственно; 6 — после температурно-силовой разгрузки при $t = 500 + 0$ ч (финишные значения)

[Figure 6. The axial component of the residual stress tensor in the hardened rods system at different times: (1) after hardening at $t = 0 - 0$; (2) after elevated temperature (from $T_0 = 20^\circ\text{C}$ to $T_1 = 675^\circ\text{C}$) and tensile force ($P = 41$ kN) loading at $t = 0 + 0$; (3, 4, 5) during the creep at times $t = 100 - 0$ h, $t = 200 - 0$ h, and $t = 300 - 0$ h, respectively; (6) after reduced temperature (from $T_1 = 675^\circ\text{C}$ to $T_0 = 20^\circ\text{C}$) and tensile force ($P = 0$) unloading at $t = 500 + 0$ h (final values)]

напряженного состояния). Отсюда можно сделать вывод о том, что ползучесть и релаксация являются сопутствующими и взаимосвязанными процессами. Наблюдается также интересный факт зависимости скорости релаксации от степени нагружения: чем более нагружен элемент, тем менее интенсивно в нем протекает релаксация остаточных напряжений.

Полученные результаты расчета позволяют сделать следующий вывод. Несмотря на достаточно продолжительное воздействие температурно-силового нагружения на рассмотренную систему, остаточные напряжения в приповерхностном слое ее элементов сохраняют значительную величину (см. линии 6 на рис. 5 и 6, соответствующие финишным значениям ОН после 500 ч).

Решение рассмотренных задач нуждается в большом объеме вычислений, который требует использования определенного программного обеспечения, способного эффективно использовать ресурсы вычислительной системы и автоматизировать расчеты.

Все разработанные методики алгоритмизированы и численно реализованы в виде программного комплекса, позволяющего реализовать расчет пол-

ного цикла «нагрузка – ползучесть – разгрузка» стержневой системы и автоматизировать следующие задачи:

- 1) определение параметров аппроксимации окружной компоненты тензора ОН по известным экспериментальным данным;
- 2) реконструкция НДС в сплошных цилиндрических образцах после процедуры поверхностного упрочнения по аппроксимации окружной компоненты ОН;
- 3) решение задачи ползучести статически неопределимой стержневой системы при одноосном напряженном состоянии (чистая ползучесть) и при сложном напряженном состоянии с учетом первоначального распределения полей ОН и ПД после процедуры поверхностного упрочнения для определения кинетики напряжений во времени во всех элементах системы при различных режимах нагружения;
- 4) расчет релаксации ОН в каждом упрочненном элементе стержневой системы при заданных значениях «рабочих» напряжений.

Заключение. Основные результаты, полученные в настоящей работе, состоят в следующем:

1. Разработаны математическая модель и алгоритм численного расчета для решения краевых задач ползучести и релаксации ОН в поверхностно упрочненных элементах статически неопределимой стержневой системы в условиях температурно-силового нагружения.
2. Исследовано НДС упрочненных элементов несимметричной статически неопределимой системы под действием температурно-силового нагружения на примере трехэлементной стержневой системы из сплава ЖС6У при температуре 675 °С и растягивающей нагрузке 41 кН. Получены зависимости кинетики остаточных напряжений во времени с учетом температурно-силовых нагрузок для каждого элемента системы. Выполнен сравнительный анализ скоростей релаксации ОН в зависимости от степени нагружения элемента конструкции.
3. Выполнена проверка адекватности разработанной математической модели при чистой ползучести (одноосное напряженное состояние в неупрочненных стержнях). Получено хорошее соответствие расчетных (на больших временных интервалах) и предельных асимптотических (при $t \rightarrow \infty$) значений.
4. Разработан программный комплекс, реализующий все разработанные методики и автоматизирующий алгоритмы численного решения рассмотренных краевых задач.

В заключение отметим, что разработанные математическая модель и алгоритм численного расчета могут быть использованы для прогнозирования эксплуатационного ресурса (по величине и характеру распределения ОН) упрочненных стержневых конструкций, эксплуатирующихся в условиях ползучести.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (РНФ 19–19–00062, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова).

Библиографический список

1. Altenberger I., Nalla R. K., Sano Y., et. al. On the effect of deep-rolling and laser-peening on the stress-controlled low- and high-cycle fatigue behavior of Ti-6Al-4V at elevated temperatures up to 550 °C // *Intern. J. Fatigue*, 2012. vol.44. pp. 292–302. doi: [10.1016/j.ijfatigue.2012.03.008](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2012.03.008).
2. Dai K., Shaw L. Analysis of fatigue resistance improvements via surface severe plastic deformation // *Intern. J. Fatigue*, 2008. vol. 30, no. 8. pp. 1398–1408. doi: [10.1016/j.ijfatigue.2007.10.010](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2007.10.010).
3. James M. N., Hughes D. J., Chen Z., et al. Residual stresses and fatigue performance // *Engng Failure Anal.*, 2007. vol. 14, no. 2. pp. 384–395. doi: [10.1016/j.engfailanal.2006.02.011](https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2006.02.011).
4. Majzoobi G. H., Azadikhah K., Nemati J. The effects of deep rolling and shot peening on fretting fatigue resistance of Aluminum-7075-T6 // *Mater. Sci. Engng: A*, 2009. vol. 516, no. 1–2. pp. 235–247. doi: [10.1016/j.msea.2009.03.020](https://doi.org/10.1016/j.msea.2009.03.020).
5. McClung R. C. A literature survey on the stability and significance of residual stresses during fatigue // *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.*, 2007. vol. 30, no. 3. pp. 173–205. doi: [10.1111/j.1460-2695.2007.011102.x](https://doi.org/10.1111/j.1460-2695.2007.011102.x).
6. Soady K. A. Life assessment methodologies incorporating shot peening process effects: mechanistic consideration of residual stresses and strain hardening. Part 1. Effect of shot peening on fatigue resistance // *Mater. Sci. Technol.*, 2013. vol. 29, no. 6. pp. 637–651. doi: [10.1179/1743284713Y.0000000222](https://doi.org/10.1179/1743284713Y.0000000222).
7. Terres M., Laalai N., Sidhom H. Effect of nitriding and shot-peening on the fatigue behavior of 42CrMo4 steel: Experimental analysis and predictive approach // *Mater. Design.*, 2013. vol. 35, no. 6. pp. 741–748. doi: [10.1016/j.matdes.2011.09.055](https://doi.org/10.1016/j.matdes.2011.09.055).
8. Павлов В. Ф., Кирпичев В. А., Вакулюк В. С. *Прогнозирование сопротивления усталости поверхностно упрочненных деталей по остаточным напряжениям*. Самара: Сам. научн. центр РАН, 2012. 125 с.
9. Ножницкий Ю. А., Фишгойт А. В., Ткаченко Р. И., Теплова С. В. Разработка и применение новых методов упрочнения деталей ГТД, основанных на пластическом деформировании поверхностных слоев (обзор) // *Вестн. двигателестроения*, 2006. Т. 2. С. 8–16.
10. Биргер И. А. *Остаточные напряжения*. М.: Mashgiz, 1963. 262 с.
11. Кравченко Б. А., Круцило В. Г., Гутман Г. Н. *Термопластическое упрочнение — резерв повышения прочности и надежности деталей машин*. Самара: СамГТУ, 2000. 216 с.
12. Радченко В. П., Саушкин М. Н. *Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях*. М.: Машиностроение-1, 2005. 226 с.
13. Колотникова О. В. Эффективность упрочнения методами поверхностного пластического деформирования деталей, работающих при повышенных температурах // *Пробл. прочности*, 1983. Т. 15, № 2. С. 112–114.
14. Цейтлин В. И., Колотникова О. В. Релаксация остаточных напряжений в деталях турбины ГТД в процессе эксплуатации // *Пробл. прочности*, 1980. Т. 12, № 8. С. 46–48.
15. Foss B. J., Gray S., Hardy M. C., et al. Analysis of shot-peening and residual stress relaxation in the nickel-based superalloy RR1000 // *Acta Materialia*, 2013. vol. 61, no. 7. pp. 2548–2559. doi: [10.1016/j.actamat.2013.01.031](https://doi.org/10.1016/j.actamat.2013.01.031).
16. Hoffmann J., Scholtes B., Vohringer O., et al. Thermal relaxation of shot peening residual stresses in the differently heat treated plain carbon steel Ck 45 // *Shot Peening: Sci., Technol., Appl.*, 1987. vol. 61, no. 7. pp. 239–246, <https://www.shotpeener.com/library/pdf/1987102.pdf>.

17. Khadraoui M., Cao W., Castex L. Experimental investigations and modeling of relaxation behavior of shot peening residual stresses at high temperature for nickel base superalloys // *Materials Science and Technology*, 1997. vol. 13, no. 4. pp. 360–367. doi: [10.1179/mst.1997.13.4.360](https://doi.org/10.1179/mst.1997.13.4.360).
18. Xie L., Jiang C., Ji V. Thermal relaxation of residual stresses in shot peened surface layer of (TiB + TiC)/Ti-6Al-4V composite at elevated temperatures // *Materials Science and Engineering: A*, 2011. vol. 528, no. 21. pp. 6478–6489. doi: [10.1016/j.msea.2011.04.075](https://doi.org/10.1016/j.msea.2011.04.075).
19. Захарова Т. П., Розанов М. А., Теплова С. В. Влияние условий эксплуатации на релаксацию остаточных напряжений сжатия в наклепанных пазах хвостовиков лопаток ТВД из жаропрочных монокристаллических никелевых сплавов // *Вестник УГАТУ*, 2015. Т. 19, № 3 (69). С. 21–27.
20. Радченко В. П., Кочеров Е. П., Саушкин М. Н., Смыслов В. А. Экспериментальное и теоретическое исследование влияния растягивающей нагрузки на релаксацию остаточных напряжений в упрочненном цилиндрическом образце в условиях ползучести // *ПМТФ*, 2015. Т. 56, № 2. С. 169–177. doi: [10.15372/PMTF20150217](https://doi.org/10.15372/PMTF20150217).
21. Buchanan D. J., John R. Relaxation of shot-peened residual stresses under creep loading // *Scripta Materialia*, 2008. vol. 59, no. 3. pp. 286–289. doi: [10.1016/j.scriptamat.2008.03.021](https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2008.03.021).
22. Evans A., Kim S-B., Shackleton J., et al. Relaxation of residual stress in shot peened Udimet 720Li under high temperature isothermal fatigue // *Int. J. Fatigue*, 2005. vol. 27, no. 10–12. pp. 1530–1534. doi: [10.1016/j.ijfatigue.2005.07.027](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2005.07.027).
23. Kim J.-C., Cheong S.-K., Noguchi H. Residual stress relaxation and low- and high-cycle fatigue behavior of shot-peened medium-carbon steel // *Int. J. Fatigue*, 2013. vol. 56. pp. 114–122. doi: [10.1016/j.ijfatigue.2013.07.001](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2013.07.001).
24. Benedetti M., Fontanari V., Scardi P., Ricardo C. L. A., Bandini M. Reverse bending fatigue of shot peened 7075-T651 aluminium alloy: The role of residual stress relaxation // *Int. J. Fatigue*, 2009. vol. 31, no. 8. pp. 1225–1236. doi: [10.1016/j.ijfatigue.2008.11.017](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2008.11.017).
25. Радченко В. П., Саушкин М. Н. Прямой метод решения краевой задачи релаксации остаточных напряжений в упрочненном изделии цилиндрической формы при ползучести // *ПМТФ*, 2009. Т. 50, № 6. С. 90–99.
26. Радченко В. П., Саушкин М. Н., Цветков В. В. Влияние термоэкспозиции на релаксацию остаточных напряжений в упрочненном цилиндрическом образце в условиях ползучести // *ПМТФ*, 2016. Т. 57, № 3. С. 196–207. doi: [10.15372/PMTF20160320](https://doi.org/10.15372/PMTF20160320).
27. Радченко В. П., Саушкин М. Н., Бочкова Т. И. Математическое моделирование формирования и релаксации остаточных напряжений в плоских образцах из сплава ЭП742 после ультразвукового упрочнения в условиях высокотемпературной ползучести // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2016. № 1. С. 93–112. doi: [10.15593/perm.mech/2016.1.07](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.1.07).
28. Радченко В. П., Деревянка Е. Е. Моделирование ползучести и релаксации остаточных напряжений в поверхностно упрочненных элементах статически неопределимых стержневых систем // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 4. С. 647–668. doi: [10.14498/vsgtu1631](https://doi.org/10.14498/vsgtu1631).
29. Самарин Ю. П. *Уравнения состояния материалов со сложными реологическими свойствами*. Куйбышев: Куйб. гос. ун-т, 1979. 84 с.
30. Радченко В. П., Цветков В. В. Напряженно-деформированное состояние цилиндрического образца из сплава Д16Т в условиях осевого растяжения и кручения при ползучести // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. № 3(32). С. 77–86. doi: [10.14498/vsgtu1277](https://doi.org/10.14498/vsgtu1277).
31. Радченко В. П., Павлов В. Ф., Саушкин М. Н. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния в поверхностно упрочненных втулках с учетом остаточных касательных напряжений // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2019. № 1. С. 138–150. doi: [10.15593/perm.mech/2019.1.12](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.1.12).

MSC: 74A10, 74D10, 74K10

The effect of elevated temperature and tensile force loading on the relaxation of residual stresses in surface-hardened elements of the rod structure under creep conditions

V. P. Radchenko^{1,2}, E. E. Derevyanka¹

¹ Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

² Lomonosov Moscow State University,
Institute of Mechanics,
1, Michurinsky prospekt, Moscow, 119192, Russian Federation.


Abstract

A mathematical model for the relaxation of residual stresses in surface-hardened cylindrical elements of statically indefinable rod systems under creep conditions with elevated temperature and tensile force loading was developed. The following problems were solved during the modeling: reconstruction of the stress-strain state in a cylindrical rod after the surface treatment by microspheres; consideration of the influence of temperature loading on the magnitude and the fields of residual stresses due to the temperature dependence of Young's modulus; calculation of relaxation of residual stresses in hardened elements of the system under the influence of elevated temperature and tensile force loading under creep conditions; analysis of the final residual stresses after creep and reduced temperature and tensile force unloading.

The problems were solved within the first two stages of creep of the system of material elements. For a detailed analysis a three-element statically indefinable system with hardened elements at the temperature of 20 °C and an operating temperature of 675 °C made of ZhS6U alloy was used.

To implement the solutions of the problems mentioned, numerical algorithms were developed using discretization by spatial and temporal coordinates and using the method of time steps. For a posteriori estimation of the convergence and stability of the numerical method the numerical results were compared for large values of the calculation time with the asymptotic

Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Radchenko V. P., Derevyanka E. E. The effect of elevated temperature and tensile force loading on the relaxation of residual stresses in surface-hardened elements of the rod structure under creep conditions, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 3, pp. 497–524. doi: [10.14498/vsgtu1688](https://doi.org/10.14498/vsgtu1688) (In Russian).

Authors' Details:

Vladimir P. Radchenko  <https://orcid.org/0000-0003-4168-9660>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Department; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science¹; Leading Researcher; Lab. of Creep and Long-Term Strength²;
e-mail: radchenko.vp@samgtu.ru

Ekaterina E. Derevyanka  <https://orcid.org/0000-0001-9229-6766>

Postgraduate Student; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science;
e-mail: derevyanka.ee@samgtu.ru

values of the stress-strain state characteristics corresponding to the steady-state creep stage obtained by the analytical method. The results obtained by both approaches are consistent.

The results of calculations were illustrated the kinetics of residual stresses in all three rods of the system during creep under the influence of elevated temperature and tensile force loading, starting from the moment of their formation after hardening. It was shown that a stepwise change in the magnitude and the distribution of residual stresses occurs only due to the “instantaneous” temperature heating of the elements of the rod structure due to the temperature dependence of the Young’s modulus. It was also established by calculations that the relaxation of residual stresses in the most loaded rods system is much slower than in less loaded ones. To illustrate the main results obtained in this paper, we plotted the distribution of residual stresses along the depth of the hardened layer.

Keywords: solid rod system, elevated temperature tensile testing, surface hardening, residual stresses, creep, stress relaxation.

Received: 11th April, 2019 / Revised: 30th July, 2019 /

Accepted: 16th September, 2019 / First online: 1st October, 2019

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors’ contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This study was supported by the Russian Science Foundation (RSF 19–19–00062, Lomonosov Moscow State University).

References

1. Altenberger I., Nalla R. K., Sano Y., et. al. On the effect of deep-rolling and laser-peening on the stress-controlled low- and high-cycle fatigue behavior of Ti–6Al–4V at elevated temperatures up to 550 °C, *Intern. J. Fatigue*, 2012, vol.44, pp. 292–302. doi: [10.1016/j.ijfatigue.2012.03.008](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2012.03.008).
2. Dai K., Shaw L. Analysis of fatigue resistance improvements via surface severe plastic deformation, *Intern. J. Fatigue*, 2008, vol. 30, no. 8, pp. 1398–1408. doi: [10.1016/j.ijfatigue.2007.10.010](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2007.10.010).
3. James M. N., Hughes D. J., Chen Z., et al. Residual stresses and fatigue performance, *Engng Failure Anal.*, 2007, vol. 14, no. 2, pp. 384–395. doi: [10.1016/j.engfailanal.2006.02.011](https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2006.02.011).
4. Majzoobi G. H., Azadikhah K., Nemati J. The effects of deep rolling and shot peening on fretting fatigue resistance of Aluminum-7075-T6, *Mater. Sci. Engng: A*, 2009, vol. 516, no. 1–2, pp. 235–247. doi: [10.1016/j.msea.2009.03.020](https://doi.org/10.1016/j.msea.2009.03.020).
5. McClung R. C. A literature survey on the stability and significance of residual stresses during fatigue, *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.*, 2007, vol. 30, no. 3, pp. 173–205. doi: [10.1111/j.1460-2695.2007.01102.x](https://doi.org/10.1111/j.1460-2695.2007.01102.x).
6. Soady K. A. Life assessment methodologies incorporating shot peening process effects: mechanistic consideration of residual stresses and strain hardening. Part 1. Effect of shot peening on fatigue resistance, *Mater. Sci. Technol.*, 2013, vol. 29, no. 6, pp. 637–651. doi: [10.1179/1743284713Y.0000000222](https://doi.org/10.1179/1743284713Y.0000000222).
7. Terres M., Laalai N., Sidhom H. Effect of nitriding and shot-peening on the fatigue behavior of 42CrMo4 steel: Experimental analysis and predictive approach, *Mater. Design.*, 2013, vol. 35, no. 6, pp. 741–748. doi: [10.1016/j.matdes.2011.09.055](https://doi.org/10.1016/j.matdes.2011.09.055).

8. Pavlov V. F., Kirpichev V. A., Vakulyuk V. S. *Prognozirovanie soprotivleniia ustalosti poverkhnostno uprochnennykh detalei po ostatochnym napriazheniim* [Prediction of fatigue resistance of surfacehardened parts by residual stresses]. Samara, Samara Scientific Center of RAS, 2012, 125 pp. (In Russian)
9. Nozhnitskii Yu. A., Fishgoit A. V., Tkachenko R. I., Teplova S. V. Development and application of new methods of hardening GTE parts, which are based on the plastic deformation of surface layers (review), *Vestn. Dvigatelsestr.*, 2006, vol. 2, pp. 8–16 (In Russian).
10. Birger I. A. *Ostatochnye napryazheniya* [Residual Stresses]. M., 1963, 262 pp. (In Russian)
11. Kravchenko B. A., Krucilo V. G., Gutman G. N. *Termoplasticheskoe uprochnenie – rezerv povysheniya prochnosti i nadezhnosti detalei mashin* [Thermoplastic hardening as a reserve for increasing the strength and reliability of machine parts]. Samara, Samara State Technical Univ., 2000, 216 pp. (In Russian)
12. Radchenko V. P., Saushkin M. N. *Polzuchest' i relaksatsiya ostatochnykh napryazheniy v uprochnonnykh konstruktsiyakh* [Creep and Relaxation of Residual Stresses in Hardened Structures]. Moscow, Mashinostroenie-1, 2005, 226 pp. (In Russian)
13. Kolotnikova O. V. Effectiveness of hardening by methods of plastic surface deformation of components operating at high temperatures, *Strength of Materials*, 1983, vol. 15, no. 2, pp. 292–295. doi: [10.1007/BF01523487](https://doi.org/10.1007/BF01523487).
14. Tseitlin V. I., Kolotnikova O. V. Relaxation of residual stresses in gas-turbine engine parts, *Strength of Materials*, 1980, vol. 12, no. 8, pp. 982–984. doi: [10.1007/BF00770521](https://doi.org/10.1007/BF00770521).
15. Foss B. J., Gray S., Hardy M. C., et al. Analysis of shot-peening and residual stress relaxation in the nickel-based superalloy RR1000, *Acta Materialia*, 2013, vol. 61, no. 7, pp. 2548–2559. doi: [10.1016/j.actamat.2013.01.031](https://doi.org/10.1016/j.actamat.2013.01.031).
16. Hoffmann J., Scholtes B., Vohringer O., et al. Thermal relaxation of shot peening residual stresses in the differently heat treated plain carbon steel Ck 45, *Shot Peening: Sci., Technol., Appl.*, 1987, vol. 61, no. 7, pp. 239–246, <https://www.shotpeener.com/library/pdf/1987102.pdf>.
17. Khadraoui M., Cao W., Castex L. Experimental investigations and modeling of relaxation behavior of shot peening residual stresses at high temperature for nickel base superalloys, *Materials Science and Technology*, 1997, vol. 13, no. 4, pp. 360–367. doi: [10.1179/mst.1997.13.4.360](https://doi.org/10.1179/mst.1997.13.4.360).
18. Xie L., Jiang C., Ji V. Thermal relaxation of residual stresses in shot peened surface layer of (TiB + TiC)/Ti-6Al-4V composite at elevated temperatures, *Materials Science and Engineering: A*, 2011, vol. 528, no. 21, pp. 6478–6489. doi: [10.1016/j.msea.2011.04.075](https://doi.org/10.1016/j.msea.2011.04.075).
19. Zaharova T. P., Rozanov M. A., Teplova S. V. Influence of operation conditions at the residual stress relaxation in turbine root slots of HPT, made of monocrystal nickel super alloys, *Vestnik UGATU*, 2015, vol. 19, no. 3 (69), pp. 21–27 (In Russian).
20. Radchenko V. P., Kocherov E. P., Saushkin M. N., Smyslov V. A. Experimental and theoretical studies of the influence of a tensile load on the relaxation of residual stresses in a hardened cylindrical specimen under creep conditions, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2015, vol. 56, no. 2, pp. 169–177. doi: [10.1134/S0021894415020170](https://doi.org/10.1134/S0021894415020170).
21. Buchanan D. J., John R. Relaxation of shot-peened residual stresses under creep loading, *Scripta Materialia*, 2008, vol. 59, no. 3, pp. 286–289. doi: [10.1016/j.scriptamat.2008.03.021](https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2008.03.021).
22. Evans A., Kim S-B., Shackleton J., et al. Relaxation of residual stress in shot peened Udimet 720Li under high temperature isothermal fatigue, *Int. J. Fatigue*, 2005, vol. 27, no. 10–12, pp. 1530–1534. doi: [10.1016/j.ijfatigue.2005.07.027](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2005.07.027).
23. Kim J.-C., Cheong S.-K., Noguchi H. Residual stress relaxation and low- and high-cycle fatigue behavior of shot-peened medium-carbon steel, *Int. J. Fatigue*, 2013, vol. 56, pp. 114–122. doi: [10.1016/j.ijfatigue.2013.07.001](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2013.07.001).
24. Benedetti M., Fontanari V., Scardi P., Ricardo C. L. A., Bandini M. Reverse bending fatigue of shot peened 7075-T651 aluminium alloy: The role of residual stress relaxation, *Int. J. Fatigue*, 2009, vol. 31, no. 8, pp. 1225–1236. doi: [10.1016/j.ijfatigue.2008.11.017](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2008.11.017).

25. Radchenko V. P., Saushkin M. N. Direct method of solving the boundary-value problem of relaxation of residual stresses in a hardened cylindrical specimen under creep conditions, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2009, vol. 50, no. 6, pp. 989–997. doi: [10.1007/s10808-009-0133-8](https://doi.org/10.1007/s10808-009-0133-8).
26. Radchenko V. P., Saushkin M. N., Tsvetkov V. V. Effect of thermal exposure on the residual stress relaxation in a hardened cylindrical sample under creep conditions, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2016, vol. 57, no. 3, pp. 559–568. doi: [10.1134/S0021894416030202](https://doi.org/10.1134/S0021894416030202).
27. Radchenko V. P., Saushkin M. N., Bochkova T. I. Mathematical modeling and experimental study of forming and relaxation of the residual stresses in plane samples made of EP742 alloy after the ultrasonic hardening under the hightemperature creep conditions, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2016, no. 1, pp. 93–112 (In Russian). doi: [10.15593/perm.mech/2016.1.07](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.1.07).
28. Radchenko V. P., Derevyanka E. E. Mathematical modeling of creep and residual stresses relaxation in surface hardened elements of statically indefinable rod systems, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 4, pp. 647–668 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu1631](https://doi.org/10.14498/vsgtu1631).
29. Samarin Yu. P. *Uravneniya sostoyaniya materialov so slozhnymi reologicheskimi svoystvami* [Equations of state of materials with complex rheological properties]. Kuibyshev, Kuibyshev State Univ., 1979, 84 pp. (In Russian)
30. Radchenko V. P., Tsvetkov V. V. The stress-strain state of cylindrical sample from alloy D16T under axial tension and torsion creep, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2013, no. 3(32), pp. 77–86 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu1277](https://doi.org/10.14498/vsgtu1277).
31. Radchenko V. P., Pavlov V. F., Saushkin M. N. Mathematical modeling of the stress-strain state in surface hardened thin-walled tubes with regard to the residual shear stresses, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 1, pp. 138–150 (In Russian).