Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 23, № 2. С. 394–401
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1679

Краткие сообщения

УДК 517.957

О сингулярных решениях многомерного дифференциального уравнения типа Клеро со степенной и показательной функциями

Л. Л. Рыскина

Томский государственный педагогический университет,
Россия, 634061, Томск, ул. Киевская, 60.

Аннотация

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений хорошо известно уравнение Клеро. Это уравнение представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение, неразрешенное относительно производной. Нахождение общего решения уравнения Клеро подробно описано в литературе, и известно, что оно представляет собой семейство интегральных прямых. Однако наряду с общим решением для таких уравнений существует сингулярное (особое) решение, представляющее собой огибающую данного семейства интегральных прямых. Отметим, что сингулярное решение уравнения Клеро представляет определенный интерес в ряде прикладных задач.

Помимо обыкновенного дифференциального уравнения Клеро известно дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных типа Клеро. Данное уравнение представляет собой многомерное обобщение обыкновенного дифференциального уравнения Клеро на случай, когда искомая функция зависит от многих переменных. Задача нахождения общего решения для уравнений типа Клеро в частных производных решена. Известно, что полный интеграл уравнения представляет собой семейство интегральных (гипер)плоскостей. Помимо общего решения могут существовать частные решения, а в некоторых случаях удается найти сингулярное решение. Общего алгоритма нахождения сингулярного решения, вообще говоря, не существует, поскольку задача сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений.

В статье изучается проблема нахождения сингулярного решения дифференциального уравнения типа Клеро в частных производных для частного выбора функции от производных в правой части. Работа устроена

Краткое сообщение

Образец для цитирования
Рыскина Л. Л. О сингулярных решениях многомерного дифференциального уравнения типа Клеро со степенной и показательной функциями // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 2. С. 394–401. doi: 10.14498/vsgtu1679.

Сведения об авторе
Лилия Леонидовна Рыскина https://orcid.org/0000-0003-2080-8579
кандидат физико-математических наук; доцент; каф. математического анализа;
e-mail: ryskina@tspu.edu.ru

следующим образом. Во введении дан краткий обзор некоторых современных результатов, относящихся к исследованию уравнений типа Клеро в теории поля и классической механике. В первой части даются общие сведения о дифференциальных уравнениях типа Клеро в частных производных и структуре его общего решения. В основной части работы обсуждается метод нахождения сингулярных решений многомерных дифференциальных уравнений типа Клеро. Основным результатом работы является нахождение сингулярных решений уравнений, содержащих степенную и показательную функции.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных, уравнения типа Клеро, особые решения.

Получение: 6 марта 2019 г. / Исправление: 14 мая 2019 г. /
Принятие: 10 июня 2019 г. / Публикация онлайн: 28 июня 2019 г.

Введение. Известно, что общее решение одномерного уравнения Клеро [1] представляет собой семейство интегральных прямых [2]. Помимо этого существует еще сингулярное (особое) решение уравнения, представляющее собой огибающую этого семейства прямых. Это особое решение в многомерных обобщениях уравнения Клеро не всегда существует [3, 4]. Однако если сингулярное решение удается найти, оно играет важную роль и представляет определенный интерес. В частности, в работах [5, 6] была показана связь между сингулярным решением уравнения типа Клеро и однопетлевым эффективным действием в квантовой теории поля с составными полями. Также отметим, что в работе [7] обсуждалось применение формализма типа Клеро без связей к Чо-Дуэань-Ге разложению в хромодинамике с калибровочной группой $SU(2)$. Приложение уравнений типа Клеро в механике обсуждалось в работах [8, 9]. В работе [10] с помощью метода разделения переменных проводится анализ решений многомерного уравнения типа Клеро с произвольным числом независимых переменных для случая, когда нелинейная функция от производных, входящая в состав уравнения, представляет собой мультиоднородную функцию.

В данной статье будет рассмотрено многомерное обобщение дифференциального уравнения типа Клеро в частных производных со специальной правой частью. Работа посвящена нахождению сингулярного решения уравнения, когда функция от производных либо степенная, либо показательная.

1. Общие сведения о решениях уравнений типа Клеро. Обыкновенное дифференциальное уравнение типа Клеро имеет вид [3, 4]:

$$y - y'x = \psi(y'), \tag{1}$$

где $y = y(x)$ — искомая функция, $y' = dy/dx$ — ее производная и $\psi = \psi(y')$ — заданная непрерывно дифференцируемая функция своего аргумента. Известно, что общее решение уравнения Клеро (1) представляет собой семейство интегральных прямых

$$y(x) = Cx + \psi(C),$$

где $C \in \mathbb{R}$ [2]. Помимо этого существует еще сингулярное (особое) решение, представляющее собой огибающую этого семейства прямых. Для определения

сингулярного решения необходимо выразить y' как функцию переменной x из следующего уравнения:
$$\psi'(y') + x = 0. \tag{2}$$
Подставляя в уравнение (1) решение уравнения (2), $y' = \varphi(x)$, получим
$$y = \varphi(x)x + \psi(\varphi(x)),$$
которое является сингулярным решением уравнения (1).

Уравнением типа Клеро называется дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка [3, 4] следующего вида:
$$y = \psi(y') + x^i y'_i, \tag{3}$$
где $y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — искомая функция переменных x^i, $i = \overline{1, n}$; $\forall i\ x^i \in \mathbb{R}$; функция $\psi(y') = \psi(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)$ — заданная действительная непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов. Здесь и далее используются следующие обозначения:
$$y'_i = \frac{\partial y}{\partial x^i}, \quad \partial_i x^j = \delta_i^j;$$
по повторяющимся индексам в (3) проводится суммирование: $y'_i x^i = \sum_{i=1}^n y'_i x^i$.

Введем обозначение $z_i = y'_i(x)$, тогда уравнение (3) запишется следующим образом:
$$y = x^i z_i + \psi(z), \tag{4}$$
где $\psi(z) = \psi(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Общее решение уравнения (3) отвечает постоянным $z_i = C_i$ и имеет вид [4]
$$y(x) = x^i C_i + \psi(C). \tag{5}$$

Пусть функция $\psi(z)$ — непрерывно дифференцируемая в некоторой области. Предположим, что в этой области $\det \| \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \| \neq 0$. Тогда в этой области дифференциальное уравнение (3) может иметь нелинейный интеграл, определяемый системой уравнений
$$\frac{\partial \psi}{\partial z_i} + x^i = 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{6}$$

Решение системы уравнений (6) существует не всегда. Однако если удается найти решение системы (6), $z_i = \varphi_i(x)$, то, подставляя это решение в выражение (4), будем иметь сингулярное решение исходного уравнения (3).

2. Сингулярное решение уравнения типа Клеро. В статье [6] была предложена процедура нахождения сингулярного решения уравнения (3) для случая, когда функция $\psi(z)$ имеет вид логарифмической функции:
$$\psi(z) = \ln(1 - a^i z_i).$$
Основная идея заключается в нахождении не самих функций $z_i(x)$, а выражений $a^i z_i$ и $x^i z_i$. Данный метод может быть применен для нахождения

сингулярных решений уравнений типа Клеро и для другого класса функций, в которых эта структура сохраняется.

В данной работе рассмотрен случай нахождения сингулярного решения уравнения (3) для случая, когда функция ψ является a) степенной функцией, b) показательной функцией.

2*a*. *Сингулярное решение для степенной функции.* Рассмотрим функцию

$$\psi(z) = -\beta(a^i z_i)^\alpha\,, \tag{7}$$

где a^i — некоторые постоянные, $i = \overline{1,n}$.

Общее решение уравнения (3) для рассматриваемого случая, согласно (5), имеет вид

$$y(x) = C_i x^i - \beta(a^i C_i)^\alpha. \tag{8}$$

Система уравнений (6) для функции (7) запишется следующим образом:

$$-\alpha\beta(a^i z_i)^{\alpha-1}\cdot a^j + x^j = 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{9}$$

Для нахождения сингулярного решения уравнения (3) для функции (7) из системы уравнений (9) определим суммы $a^i z_i$ и $x^i z_i$ как функции от x. Затем, подставив их в исходное уравнение (3), получим сингулярное решение. Для этого введем некоторые постоянные b_i, $i = \overline{1,n}$, таким образом, чтобы выполнялось тождество $b^i a_i = 1$.

Свернем выражение (9) с b_i, получим

$$-\alpha\beta(a^i z_i)^{\alpha-1} + x^i b_i = 0. \tag{10}$$

Выразим из (10) сумму $a^i z_i$ как функцию только от переменных x_i:

$$a^i z_i = \left(\frac{x^i b_i}{\alpha\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}. \tag{11}$$

Для нахождения суммы $x^i z_i$ свернем (9) с z_i и, подставив значение $a^i z_i$ из (11), получим

$$x^i z_i = \alpha\beta\left(\frac{x^i b_i}{\alpha\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}. \tag{12}$$

Подставив найденные выражения (11) и (12) в выражение (4), будем иметь

$$y(x) = (\alpha-1)\beta\left(\frac{x^i b_i}{\alpha\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}. \tag{13}$$

Выражение (13) представляет собой сингулярное решение дифференциального уравнения типа Клеро (3). Отметим, что данное решение нельзя получить из общего решения уравнения (8) для случая, когда функция от производной $\psi(z)$ имеет вид (7).

2*b*. *Сингулярное решение для показательной функции.* Для начала рассмотрим случай, когда функция $\psi(z)$ в (4) имеет вид

$$\psi(z) = -\exp(a^i z_i), \tag{14}$$

где a^i — некоторые постоянные, $i = \overline{1,n}$. Общее решение уравнения (3) для рассматриваемого случая, согласно (14), имеет вид

$$y(x) = C_i x^i - \exp(a^i C_i). \tag{15}$$

Система уравнений (6) для функции (14) записывается следующим образом:

$$-\exp(a^i z_i) \cdot a^j + x^j = 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{16}$$

Для нахождения сингулярного решения уравнения (3) для функции (14), как и в предыдущем случае, из системы уравнений (16) определим суммы $a^i z_i$ и $x^i z_i$ как функции от x_i. Затем, подставив их в исходное уравнение (3), получим сингулярное решение исходного уравнения. Для этого, как и в предыдущей части, введем постоянные b_i так, чтобы выполнялось равенство $b^i a_i = 1$. Сворачивая выражение (16) с b_i, получаем

$$-\exp(a^i z_i) + x^i b_i = 0. \tag{17}$$

Выразим из (17) сумму $a^i z_i$:

$$a^i z_i = \ln(x^j b_j). \tag{18}$$

Для нахождения суммы $x^i z_i$ свернем (16) с z_i и подставим найденное значение $a^i z_i$ в (18), получим

$$x^i z_i = (x^i b_i) \ln(x^i b_i). \tag{19}$$

Подставим найденные выражения (18) и (19) в выражение (4):

$$y(x) = (x^i b_i) \left[\ln(x^i b_i) - 1\right]. \tag{20}$$

Полученная функция (20) является сингулярным решением дифференциального уравнения типа Клеро (3) для случая, когда функция от производных имеет вид (14). Данное решение нельзя получить из общего решения вида (15).

Рассмотрим обобщение (15) на случай произвольного постоянного α в основании показательной функции:

$$\psi(z) = -\alpha^{(a^i z_i)}, \quad \alpha = \mathrm{const},$$

где a^i — некоторые постоянные, $i = \overline{1,n}$.

В этом случае суммы $a^i z_i$ и $x^i z_i$ будут иметь следующий вид:

$$a^i z_i = \log_\alpha \frac{x^i b_i}{\ln \alpha}, \quad x^i z_i = (x^i b_i) \log_\alpha \frac{(x^i b_i)}{\ln \alpha}. \tag{21}$$

Подставив найденные выражения (21) в уравнение (4), получим

$$y(x) = x^i b_i \left[\log_\alpha \frac{x^j b_j}{\ln \alpha} - \frac{1}{\ln \alpha}\right]. \tag{22}$$

Выражение (22) представляет собой сингулярное решение дифференциального уравнения типа Клеро с показательной функцией. Для частного выбора $\alpha = e$ выражение (22) переходит в полученное ранее сигулярное решение (20).

Заключение. В данной работе изучались сингулярные решения дифференциального уравнения в частных производных первого порядка типа Клеро (3). Для случая, когда функция от производных в (3) представляет собой степенную функцию, сингулярное решение имеет вид (13). Также в статье рассмотрен еще один случай выбора функции от производных в виде показательной функции. В этом случае сингулярное решение уравнения (3) имеет вид (22), а для частного выбора основания в виде экспоненты получаем выражение (20). Известно, что для уравнения в частных производных типа Клеро особое решение не всегда существует. Вследствие этого поиск особых решений для конкретных функций представляет собой актуальное направление исследований.

Конкурирующие интересы. У меня нет конфликта интересов в авторстве и публикации этой статьи.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Clairaut A. Solution de plusieurs problèmes où il s'agit de trouver des Courbes dont la propriété consiste dans une certaine relation entre leurs branches, exprimée par une Équation donnée // *Histoire Acad. R. Sci. Paris (1734)*, 1736. pp. 196–215, https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3531x/f344.table.
2. Эльсгольц Л. Е. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.* М.: Наука, 1969. 424 с.
3. Kamke E. *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen.* vol. I: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Stuttgart: B.G. Teubner, 1977. xxvi+668 pp. (In German)
4. Courant R., Hilbert D. *Methods of mathematical physics.* vol. 2: Partial differential equations. New York, London: John Wiley & Sons, 1962. xxii+830 pp.
5. Lavrov P. M., Merzlikin B. S. Loop expansion of the average effective action in the functional renormalization group approach // *Phys. Rev. D*, 2015. vol. 92, no. 8, 085038, arXiv: 1506.04491 [hep-th]. doi: 10.1103/PhysRevD.92.085038.
6. Lavrov P. M., Merzlikin B. S. Legendre transformations and Clairaut-type equations // *Phys. Lett. B*, 2016. vol. 756. pp. 188–193, arXiv: 1602.04911 [hep-th]. doi: 10.1016/j.physletb.2016.03.019.
7. Walker M., Duplij S. Cho-Duan-Ge decomposition of QCD in the constraintless Clairaut-type formalism // *Phys. Rev. D*, 2015. vol. 91, no. 6, 064022, arXiv: 1411.6968 [hep-th]. doi: 10.1103/PhysRevD.91.064022.
8. Duplij S. A new Hamiltonian formalism for singular Lagrangian theories // *Journal of Kharkov National University, Ser. Nuclei, Particles and Fields*, 2011. vol. 969, no. 3. pp. 34–39, arXiv: 0909.2695 [math-ph].
9. Зырянова О. В., Мудрук В. И. Об особых решениях уравнений Клеро // *Изв. вузов. Физика*, 2018. Т. 61, № 4. С. 35–40.
10. Рахмелевич И. В. О решениях многомерного уравнения Клеро с мультиоднородной функцией от производных // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2014. Т. 14, № 4(1). С. 374–381.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 2, pp. 394–401
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1679

MSC: 35F20

On singular solutions of a multidimensional differential equation of Clairaut-type with power and exponential functions

L. L. Ryskina

Tomsk State Pedagogical University,
60, Kievskaya st., Tomsk, 634061, Russian Federation.

Abstract

In the theory of ordinary differential equations, the Clairaut equation is well known. This equation is a non-linear differential equation unresolved with respect to the derivative. Finding the general solution of the Clairaut equation is described in detail in the literature and is known to be a family of integral lines. However, along with the general solution, for such equations there exists a singular (special) solution representing the envelope of the given family of integral lines. Note that the singular solution of the Clairaut equation is of particular interest in a number of applied problems.

In addition to the ordinary Clairaut differential equation, a differential equation of the first order in partial derivatives of the Clairaut type is known. This equation is a multidimensional generalization of the ordinary differential Clairaut equation, in the case when the sought function depends on many variables. The problem of finding a general solution for partial differential equations of the Clairaut is known to be. It is known that the complete integral of the equation is a family of integral (hyper) planes. In addition to the general solution, there may be partial solutions, and, in some cases, it is possible to find a singular solution. Generally speaking, there is no general algorithm for finding a singular solution, since the problem is reduced to solving a system of nonlinear algebraic equations.

The article is devoted to the problem of finding a singular solution of Clairaut type differential equation in partial derivatives for the particular choice of a function from the derivatives in the right-hand side. The work is organized as follows. The introduction provides a brief overview of some of the current results relating to the study of Clairaut-type equations in field theory and classical mechanics. The first part provides general information about differential equations of the Clairaut-type in partial derivatives and the structure of its general solution. In the main part of the paper, we discuss the method for finding singular solutions of the Clairaut-type equations. The

Short Communication

Please cite this article in press as:
Ryskina L. L. On singular solutions of a multidimensional differential equation of Clairaut-type with power and exponential functions, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 2, pp. 394–401. doi: 10.14498/vsgtu1679 (In Russian).

Author's Details:
Liliya L. Ryskina https://orcid.org/0000-0003-2080-8579
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Mathematical Analysis;
e-mail: ryskina@tspu.edu.ru

main result of the work is to find singular solutions of equations containing power and exponential functions.

Keywords: partial differential equations, Clairaut-type equations, singular solutions.

Received: 6th March, 2019 / Revised: 14th May, 2019 /
Accepted: 10th June, 2019 / First online: 28th June, 2019

Competing interests. I hereby declare that I have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. Clairaut A. Solution de plusieurs problèmes où il s'agit de trouver des Courbes dont la propriété consiste dans une certaine relation entre leurs branches, exprimée par une Équation donnée, *Histoire Acad. R. Sci. Paris (1734)*, 1736, pp. 196–215, https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3531x/f344.table.
2. El'sgol'ts L. E. *Differentsial'nye uravneniia i variatsionnoe ischislenie* [Differential equations and calculus of variations]. Moscow, Nauka, 1969, 424 pp. (In Russian)
3. Kamke E. *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen*, vol. I, Gewöhnliche Differentialgleichungen. Stuttgart, B.G. Teubner, 1977, xxvi+668 pp. (In German)
4. Courant R., Hilbert D. *Methods of mathematical physics*, vol. 2, Partial differential equations. New York, London, John Wiley & Sons, 1962, xxii+830 pp.
5. Lavrov P. M., Merzlikin B. S. Loop expansion of the average effective action in the functional renormalization group approach, *Phys. Rev. D*, 2015, vol. 92, no. 8, 085038, arXiv: 1506.04491 [hep-th]. doi: 10.1103/PhysRevD.92.085038.
6. Lavrov P. M., Merzlikin B. S. Legendre transformations and Clairaut-type equations, *Phys. Lett. B*, 2016, vol. 756, pp. 188–193, arXiv: 1602.04911 [hep-th]. doi: 10.1016/j.physletb.2016.03.019.
7. Walker M., Duplij S. Cho-Duan-Ge decomposition of QCD in the constraintless Clairaut-type formalism, *Phys. Rev. D*, 2015, vol. 91, no. 6, 064022, arXiv: 1411.6968 [hep-th]. doi: 10.1103/PhysRevD.91.064022.
8. Duplij S. A new Hamiltonian formalism for singular Lagrangian theories, *Journal of Kharkov National University, Ser. Nuclei, Particles and Fields*, 2011, vol. 969, no. 3, pp. 34–39, arXiv: 0909.2695 [math-ph].
9. Zyryanova O. V., Mudruk V. I. Singular Solutions of Clairaut Equations, *Russ. Phys. J.*, 2018, vol. 61, no. 4, pp. 635–642. doi: 10.1007/s11182-018-1442-2.
10. Rakhmelevich I. V. On the Solutions of Multi-dimensional Clairaut Equation with Multi-homogeneous Function of the Derivatives, *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, no. 4(1), pp. 374–381 (In Russian).