

Краткие сообщения

УДК 519.642.2



Устойчивость и сходимость разностных схем для уравнения диффузии дискретно-распределенного порядка с обобщенными функциями памяти

А. Х. ХибиевИнститут прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Россия, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 а.

Аннотация

Методом энергетических неравенств получена априорная оценка решения первой краевой задачи для уравнения диффузии дискретно-распределенного порядка с обобщенными функциями памяти. Построен разностный аналог дробной производной дискретно-распределенного порядка с обобщенными функциями памяти (аналог формулы L1). Исследованы основные свойства этого разностного оператора и на его основе построены разностные схемы второго и четвертого порядков аппроксимации по пространственной переменной и дробного порядка $2-\alpha_0$ по временной переменной. Доказана устойчивость предложенных разностных схем, а также их сходимость в сеточной L_2 -норме со скоростью, равной порядку погрешности аппроксимации. Достоверность полученных результатов подтверждают численные расчеты, проведенные для тестовых примеров.

Ключевые слова: дробная производная, обобщенная функция памяти, априорные оценки, уравнение диффузии дробного порядка, разностные схемы, устойчивость, сходимость.

Получение: 16 апреля 2019 г. / Исправление: 25 мая 2019 г. /

Принятие: 10 июня 2019 г. / Публикация онлайн: 21 июня 2019 г.

Введение. Дифференциальные уравнения с производными дробного порядка являются математическим аппаратом для более точного описания физических и химических процессов, для которых необходимо учитывать предысторию (память) процесса [1–4]. Характеристиками, учитывающими память

Краткое сообщение

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Хибиев А. Х. Устойчивость и сходимость разностных схем для уравнения диффузии дискретно-распределенного порядка с обобщенными функциями памяти // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 3. С. 582–597. doi: [10.14498/vsgtu1690](https://doi.org/10.14498/vsgtu1690).

Сведения об авторе

Асланбек Хизирович Хибиев  <https://orcid.org/0000-0002-5727-7540>

аспирант; стажер-исследователь; отдел вычислительных методов;

e-mail: akkhbiev@gmail.com

в таких уравнениях, являются функции памяти, которые представляют собой ядра интегралов, определяющих операторы дробного интегро-дифференцирования. Для операторов дробного интегро-дифференцирования таковой является степенная функция. Показатель степенной функции памяти определяет порядок производной и связан с фрактальной размерностью среды, в которой протекает исследуемый процесс. Для более точного описания процесса в неоднородных пористых средах используются дифференциальные уравнения с дробными производными распределенных порядков [5, 6]. Для описания более сложных процессов могут привлекаться функции памяти более сложной структуры, чем степенная функция.

В прямоугольнике $Q_T = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ рассмотрим первую краевую задачу для уравнения диффузии дискретно-распределенного порядка с обобщенными функциями памяти и переменными коэффициентами:

$$P_{(\lambda)}^{(\alpha)}(\partial_{0t})u = \mathcal{L}u + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

где

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x, t)u,$$

$$P_{(\lambda)}^{(\alpha)}(\partial_{0t})u = \sum_{r=0}^m \partial_{0t}^{\alpha_r, \lambda_r(t)} u(x, t),$$

$$\partial_{0t}^{\beta, \mu(t)} u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \beta)} \int_0^t \frac{\mu(t - \eta)}{(t - \eta)^\beta} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x, \eta) d\eta$$

— дробная производная Капуто порядка β ($0 < \beta < 1$) с весовой функцией $\mu(t) \in \mathcal{C}^1[0, T]$; $0 < \alpha_m < \alpha_{m-1} < \dots < \alpha_0 < 1$; $\lambda_r(t) > 0$, $\lambda'_r(t) \leq 0$ для всех $t \in [0, T]$ и $r = 0, 1, \dots, m$; $0 < c_1 \leq k(x, t) \leq c_2$, $q(x, t) \geq 0$ для всех $(x, t) \in \bar{Q}_T$.

Заметим, что, в частности, при $\lambda_r(t) \equiv \omega_r = \text{const} > 0$ оператор $P_{(\lambda)}^{(\alpha)}(\partial_{0t})$ представляет собой известный оператор дробного дифференцирования дискретно-распределенного порядка [7, 8].

Уравнение диффузии и уравнение Фоккера—Планка—Смолуховского с обобщенной функцией памяти были изучены в [9]. В этой работе показано, что представление функции памяти в обобщенном уравнении диффузии имеет различные формы, которые могут описать широкий спектр экспериментальных явлений.

В работах [8, 10, 11, 13–15] методом энергетических неравенств были получены априорные оценки для решения первой и третьей краевых задач для уравнения диффузии дробного, переменного и распределенного порядков как для дифференциальных, так и для разностных задач. С помощью принципа максимума в работе [16] получены априорные оценки для разностных задач, аппроксимирующих уравнение диффузии дробного по времени порядка.

В данной работе для построения разностных схем с порядком точности $O(\tau^{2-\alpha_0})$ по времени мы должны требовать наличия достаточно гладкого решения исходной задачи. Это приводит к значительному сужению класса входных данных задачи, для которой применим предложенный метод. Как

известно (см. например [17, 18]), в случае гладких входных данных для уравнения диффузии дробного порядка по времени решения могут быть негладкими в замкнутой области, так как производные функции $u(x, t)$ по переменной t могут иметь особенность при $t = 0$. В этом случае, если это возможно, необходимо представить решение в виде суммы двух функций, одна из которых известная, но не гладкая, а другая гладкая, но не известная, как это показано в работе [19].

В статье [20] рассмотрена первая краевая задача для уравнения реакции диффузии с производной Капуто порядка $\alpha \in (0, 1)$. Показано, что решение такой задачи в целом имеет слабую особенность при $t = 0$. Представлен новый анализ стандартного метода конечных разностей для задачи с учетом наличия слабой особенности.

Анализ схемы L1 для уравнения субдиффузии с негладкими данными был рассмотрен в [21]. Оценка погрешности аппроксимации для уравнения диффузии распределенного порядка по времени с негладкими данными исследовалась в [22].

1. Априорная оценка для решения разностной задачи. Далее будем предполагать существование решения $u(x, t) \in \mathcal{C}_{x,t}^{2,1}(\bar{Q}_T)$ задачи (1), (2), где $\mathcal{C}_{x,t}^{m,n}(\bar{Q}_T)$ — класс непрерывных функций вместе с их частными производными порядка m по отношению к x и порядка n по отношению к t в $\bar{Q}_T$.

ЛЕММА 1. *Для любой абсолютно непрерывной на $[0, T]$ функции $v(t)$ справедливо неравенство*

$$v(t)P_{(\lambda)}^{(\alpha)}v \geq \frac{1}{2}P_{(\lambda)}^{(\alpha)}v^2. \quad (3)$$

где $0 < \alpha < 1$, $\lambda_r(t) \in \mathcal{C}^1[0, T]$, $\lambda_r(t) > 0$, $\lambda'_r(t) \leq 0$ для всех $t \in [0, T]$, $r = 1, 2, \dots, m$.

Доказательство. Для всех фиксированных α_r и $\lambda_r(t)$ таких, что $0 < \alpha_r < 1$, $\lambda_r(t) > 0$, $\lambda'_r(t) \leq 0$ при всех $r \in \{0, 1, \dots, m\}$ и $t \in [0, T]$, с учетом леммы 2.1 из [12] приходим к следующему неравенству:

$$v(t)\partial_{0t}^{\alpha_r, \lambda_r(t)}v \geq \frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha_r, \lambda_r(t)}v^2.$$

Просуммировав последнее неравенство по r от 0 до m , получим неравенство (3). $\square$

Будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\|u(\cdot, t)\|_0^2 = \int_0^1 u^2(x, t)dx,$$

$$P_{(\lambda)}^{(-\alpha)}(D_{0t})u = \sum_{r=0}^m D_{0t}^{-\alpha_r, \lambda_r(t)}u(x, t).$$

$$D_{0t}^{-\beta, \mu(t)}u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \mu(t-\eta)(t-\eta)^{\beta-1}u(x, \eta)d\eta$$

— оператор дробного интегрирования в смысле Римана—Лиувилля порядка $\beta > 0$ с обобщенными функциями памяти.

ЛЕММА 2 [12]. Для любой абсолютно непрерывной на $[0, T]$ функции $v(t)$ справедливо равенство

$$\int_0^t \partial_{0\eta}^{\beta, \mu(t)} v(\eta) d\eta = D_{0t}^{\beta-1, \mu(t)} v(t) - \frac{v(0)}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{\mu(\eta)}{\eta^\beta} d\eta,$$

где $\beta \in (0, 1)$, $\mu(t) \in \mathcal{C}^1[0, T]$.

ТЕОРЕМА 1. Если $k(x, t) \in \mathcal{C}_{x,t}^{1,0}(\bar{Q}_T)$, $q(x, t)$, $f(x, t) \in \mathcal{C}(\bar{Q}_T)$, $k(x, t) \geq c_1 > 0$, $q(x, t) \geq 0$ всюду в $\bar{Q}_T$, то для решения $u(x, t)$ задачи (1), (2) справедлива априорная оценка

$$\begin{aligned} P_{(\lambda)}^{(\alpha-1)}(D_{0t}) \|u(\cdot, t)\|_0^2 + c_1 \int_0^t \|u_x(\cdot, \eta)\|_0^2 d\eta \leq \\ \leq \frac{1}{2c_1} \int_0^t \|f(\cdot, \eta)\|_0^2 d\eta + \sum_{r=0}^m \frac{\lambda_r(0)t^{1-\alpha_r}}{\Gamma(2-\alpha_r)} \|u_0\|_0^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Доказательство. Умножим уравнение (1) на $u(x, t)$ и проинтегрируем по x от 0 до 1:

$$\int_0^1 u(x, t) P_{(\lambda)}^{(\alpha)} u(x, t) dx - \int_0^1 u(x, t) \mathcal{L}u(x, t) dx = \int_0^1 u(x, t) f(x, t) dx. \quad (5)$$

Преобразуем слагаемые тождества (5):

$$\begin{aligned} - \int_0^1 u(x, t) \mathcal{L}u(x, t) dx = \\ = \int_0^1 k(x, t) u_x^2(x, t) dx + \int_0^1 q(x, t) u^2(x, t) dx \geq c_1 \|u_x(\cdot, t)\|_0^2, \\ \int_0^1 u(x, t) f(x, t) dx \leq \varepsilon \|u(\cdot, t)\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|f(\cdot, t)\|_0^2, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Используя неравенство (3), получаем

$$\int_0^1 u(x, t) P_{(\lambda)}^{(\alpha)} u(x, t) dx \geq \frac{1}{2} \int_0^1 P_{(\lambda)}^{(\alpha)} u^2(x, t) dx = \frac{1}{2} P_{(\lambda)}^{(\alpha)} \|u(\cdot, t)\|_0^2.$$

С учетом приведенных выше преобразований из тождества (5) следует неравенство

$$\frac{1}{2} P_{(\lambda)}^{(\alpha)} \|u(\cdot, t)\|_0^2 + c_1 \|u_x(\cdot, t)\|_0^2 \leq \varepsilon \|u(\cdot, t)\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|f(\cdot, t)\|_0^2. \quad (6)$$

Из неравенства (6) и неравенства $\|u(\cdot, t)\|_0^2 \leq \frac{1}{2} \|u_x(\cdot, t)\|_0^2$ при $\varepsilon = c_1$ имеем

$$P_{(\lambda)}^{(\alpha)} \|u(\cdot, t)\|_0^2 + c_1 \|u_x(\cdot, t)\|_0^2 \leq \frac{1}{2c_1} \|f(\cdot, t)\|_0^2. \quad (7)$$

Заменяя переменную t на η в неравенстве (7) и интегрируя его по η от 0 до t , получим априорную оценку (4). $\square$

Из априорной оценки (4) следует единственность и непрерывная зависимость решения задачи (1), (2) от входных данных.

2. Устойчивость и сходимость семейства разностных схем. В этом разделе приводятся результаты, полученные в работе [13], для семейства разностных схем общего вида, заданных на неравномерной временной сетке.

В прямоугольнике $\bar{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ рассмотрим сетку $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$, где

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N; hN = l\},$$

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{M-1} < t_M = T\}.$$

В основном семейство разностных схем, аппроксимирующих задачу (1), (2) на сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$, имеет вид

$${}_g\Delta_{0t_{j+1}}^\alpha y_i = \Lambda y_i^{(\sigma_{j+1})} + \varphi_i^{j+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, M-1, \quad (8)$$

$$y(0, t) = 0, \quad y(l, t) = 0, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (9)$$

где

$${}_g\Delta_{0t_{j+1}}^\alpha y_i = \sum_{s=0}^j (y_i^{s+1} - y_i^s) g_s^{j+1}, \quad g_s^{j+1} > 0$$

— разностный аналог обобщенной дробной производной Капуто; Λ — разностный оператор, аппроксимирующий непрерывный оператор $\mathcal{L}$ так, что оператор $-\Lambda$ сохраняет свойства положительной определенности:

$$(-\Lambda y, y) \geq \kappa \|y\|_0^2, \quad (y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h, \quad \|y\|_0^2 = (y, y), \quad \kappa > 0;$$

$$y^{(\sigma_{j+1})} = \sigma_{j+1} y^{j+1} + (1 - \sigma_{j+1}) y^j, \quad 0 \leq \sigma_{j+1} \leq 1 \quad \text{для } j = 0, 1, \dots, M-1.$$

ЛЕММА 3 [13]. Если $g_j^{j+1} > g_{j-1}^{j+1} > \dots > g_0^{j+1} > 0$, $j = 0, 1, \dots, M-1$, то для любой функции $v(t)$, заданной на сетке $\bar{\omega}_\tau$, справедливы неравенства

$$v^{j+1} {}_g\Delta_{0t_{j+1}}^\alpha v \geq \frac{1}{2} {}_g\Delta_{0t_{j+1}}^\alpha (v^2) + \frac{1}{2g_j^{j+1}} ({}_g\Delta_{0t_{j+1}}^\alpha v)^2,$$

$$v^j {}_g\Delta_{0t_{j+1}}^\alpha v \geq \frac{1}{2} {}_g\Delta_{0t_{j+1}}^\alpha (v^2) - \frac{1}{2(g_j^{j+1} - g_{j-1}^{j+1})} ({}_g\Delta_{0t_{j+1}}^\alpha v)^2,$$

где $g_{-1}^1 = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 1 [13]. Если

$$g_j^{j+1} > g_{j-1}^{j+1} > \dots > g_0^{j+1} > 0, \quad \frac{g_j^{j+1}}{2g_j^{j+1} - g_{j-1}^{j+1}} \leq \sigma_{j+1} \leq 1,$$

где $j = 0, 1, \dots, M-1$, $g_{-1}^1 = 0$, то для любой функции $v(t)$, заданной на сетке $\bar{\omega}_\tau$, справедливо неравенство

$$(\sigma_{j+1}v^{j+1} + (1 - \sigma_{j+1})v^j)_g \Delta_{0t_{j+1}}^\alpha v \geq \frac{1}{2} g \Delta_{0t_{j+1}}^\alpha (v^2).$$

ТЕОРЕМА 2 [13]. Если

$$g_j^{j+1} > g_{j-1}^{j+1} > \dots > g_0^{j+1} \geq c_2 > 0, \quad \frac{g_j^{j+1}}{2g_j^{j+1} - g_{j-1}^{j+1}} \leq \sigma_{j+1} \leq 1,$$

где $j = 0, 1, \dots, M-1$, $g_{-1}^1 = 0$, то разностная схема (8), (9) безусловно устойчива и для ее решения справедлива априорная оценка

$$\|y^{j+1}\|_0^2 \leq \|y^0\|_0^2 + \frac{1}{2\kappa c_2} \max_{0 \leq j \leq M} \|\varphi^j\|_0^2. \quad (10)$$

Из априорной оценки (10) следует устойчивость разностной схемы (8), (9).

ТЕОРЕМА 3 [13]. Если выполняются условия Теоремы 2 и разностная схема (8), (9) имеет порядок аппроксимации $\mathcal{O}(N^{-r_1} + M^{-r_2})$, где r_1 и r_2 — некоторые известные положительные числа, то решение разностной схемы (8), (9) сходится к решению дифференциальной задачи (1), (2) в сеточной L_2 -норме со скоростью, равной порядку погрешности аппроксимации $\mathcal{O}(N^{-r_1} + M^{-r_2})$.

3. Разностный аналог производной Капуто дискретно-распределенного порядка с обобщенными функциями памяти. Предположим, что существует решение $u(x, t) \in \mathcal{C}_{x,t}^{4,2}$ задачи (1), (2), а коэффициенты уравнения (1) и функции $f(x, t)$, $u_0(x)$ удовлетворяют условиям, требуемым для построения разностных схем с порядком аппроксимации $\mathcal{O}(h^2 + \tau^{2-\alpha_0})$. Кроме того, будем предполагать, что $\lambda_r(t) \in \mathcal{C}^{(2)}[0, T]$, $r = 0, 1, \dots, m$.

Рассмотрим равномерную сетку $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, M, \tau M = T\}$. Дробную производную дискретно-распределенного порядка с обобщенными функциями памяти будем аппроксимировать следующим дискретным аналогом:

$$P_{(\lambda)}^{(\alpha)}(\Delta_{0t_{j+1}})v = \sum_{r=0}^m \Delta_{0t_{j+1}}^{\alpha_r, \lambda_r(t)} v,$$

где

$$\Delta_{0t_{j+1}}^{\alpha_r, \lambda_r(t)} v = \sum_{s=0}^j c_{j-s}^{(r)} (v(t_{s+1}) - v(t_s)); \quad (11)$$

$$c_l^{(r)} = \frac{\tau^{-\alpha_r}}{\Gamma(2 - \alpha_r)} (\lambda_r^{l+1/2} a_l^{(r)} + (\lambda_r^l - \lambda_r^{l+1}) b_l^{(r)}), \quad l \geq 0,$$

$$a_l^{(r)} = (l+1)^{1-\alpha_r} - l^{1-\alpha_r}, \quad \lambda_r^l = \lambda_r(t_l),$$

$$b_l^{(r)} = \frac{1}{2 - \alpha_r} ((l+1)^{2-\alpha_r} - l^{2-\alpha_r}) - \frac{1}{2} ((l+1)^{1-\alpha_r} + l^{1-\alpha_r}), \quad l \geq 1.$$

Разностный аналог обобщенной дробной производной Капуто (11) был предложен в работе [12].

ЛЕММА 4 [12]. Для любого $\alpha \in (0, 1)$ и функции $v(t) \in \mathcal{C}^2[0, t_{j+1}]$ справедливо равенство

$$\partial_{0t_{j+1}}^{\alpha, \lambda(t)} v = \Delta_{0t_{j+1}}^{\alpha, \lambda(t)} v + \mathcal{O}(\tau^{2-\alpha}),$$

где $\lambda(t) > 0$, $\lambda'(t) \leq 0$ и $\lambda(t) \in \mathcal{C}^2[0, t_{j+1}]$, $r = 1, 2, \dots, m$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любой функции $v(t) \in \mathcal{C}^2[0, t_{j+1}]$ справедливо равенство

$$P_{(\lambda)}^{(\alpha)}(\partial_{0t_{j+1}})v = P_{(\lambda)}^{(\alpha)}(\Delta_{0t_{j+1}})v + \mathcal{O}(\tau^{2-\alpha_0}), \quad (12)$$

где $\lambda_r(t) > 0$, $\lambda'_r(t) \leq 0$ и $\lambda_r(t) \in \mathcal{C}^2[0, t_{j+1}]$, $r = 1, 2, \dots, m$.

ЛЕММА 5 [23]. Для любого $l = 0, 1, \dots$ и $\alpha_r \in (0, 1)$ имеют место следующие неравенства:

$$a_0^{(r)} > a_1^{(r)} > \dots > a_l^{(r)} > \frac{1 - \alpha_r}{(l+1)^{\alpha_r}}, \quad b_0^{(r)} > b_1^{(r)} > \dots > b_l^{(r)} > 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Для любого $l = 0, 1, \dots$, $\alpha_r \in (0, 1)$ и $\lambda_r(t) \in \mathcal{C}^2[0, T]$, где $\lambda_r(t) > 0$, $\lambda'_r(t) \leq 0$ для всех $t \in [0, T]$, справедливы неравенства

$$c_0^{(r)} > c_1^{(r)} > \dots > c_l^{(r)} > \frac{\lambda_r(t_{l+1/2})}{\Gamma(1 - \alpha_r)t_{l+1}^{\alpha_r}}.$$

Из леммы 3 и следствия 3 следует

ЛЕММА 6. Для любой функции $v(t)$, определенной на сетке $\bar{\omega}_\tau$, имеет место неравенство

$$v^{j+1} P_{(\lambda)}^{(\alpha)}(\Delta_{0t_{j+1}})v \geq \frac{1}{2} P_{(\lambda)}^{(\alpha)}(\Delta_{0t_{j+1}})v^2.$$

4. Разностная схема для уравнения диффузии дискретно-распределенного порядка с обобщенными функциями памяти. Рассмотрим следующую разностную схему:

$$P_{(\lambda)}^{(\alpha)}(\Delta_{0t_{j+1}})y_i = \Lambda y_i^{j+1} + \varphi_i^{j+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, M-1; \quad (13)$$

$$y(0, t) = 0, \quad y(l, t) = 0, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (14)$$

где

$$\Lambda y_i = ((ay_{\bar{x}})_x - dy)_i = \frac{a_{i+1}y_{i+1} - (a_{i+1} + a_i)y_i + a_i y_{i-1}}{h^2} - d_i y_i, \quad i=1, \dots, N-1,$$

$$y_{\bar{x}, i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \quad y_{x, i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h},$$

$$a_i^{j+1} = k(x_{i-1/2}, t_{j+1}), \quad d_i^{j+1} = q(x_i, t_{j+1}), \quad \varphi_i^{j+1} = f(x_i, t_{j+1}).$$

Если решение задачи (1), (2) $u(x, t) \in \mathcal{C}_{x,t}^{4,2}$, то порядок аппроксимации разностной схемы (13), (14) равен $\mathcal{O}(h^2 + \tau^{2-\alpha_0})$. Это следует из [24, р. 462] и формулы (12).

ТЕОРЕМА 4. *Разностная схема (13), (14) безусловно устойчива и для ее решения справедлива априорная оценка:*

$$\|y^{j+1}\|_0^2 \leq \|y^0\|_0^2 + \frac{1}{4c_1 \sum_{r=0}^m \frac{\lambda_r(T)}{\Gamma(1-\alpha_r)T^{\alpha_r}}} \max_{0 \leq j \leq M} \|\varphi^j\|_0^2. \quad (15)$$

Доказательство. Для разностного оператора Λ , используя первую разностную формулу Грина и теорему вложения [24] для функции, обращающихся в нуль при $x = 0$ и $x = 1$, получаем $(-\Lambda y, y) \geq 2c_1 \|y\|_0^2$. Это значит, что для этого оператора можно выбрать $\varkappa = 4c_1$.

Поскольку разностная схема (13), (14) имеет вид (8), (9) где

$$g_s^{j+1} = \sum_{r=0}^m c_{j-s}^{(r)},$$

то из следствия 3 следуют следующие неравенства:

$$g_0^{j+1} = \sum_{r=0}^m c_j^{(r)} > \sum_{r=0}^m \frac{\lambda_r(t_{j+1/2})}{\Gamma(1-\alpha_r)t_{j+1}^{\alpha_r}} > \sum_{r=0}^m \frac{\lambda_r(T)}{\Gamma(1-\alpha_r)T^{\alpha_r}},$$

$$g_j^{j+1} > g_{j-1}^{j+1} > \dots > g_0^{j+1}, \quad \sigma = 1.$$

Из теоремы 2 и приведенных выше неравенств следует справедливость теоремы 4. $\square$

Если решение задачи (1), (2) $u(x, t) \in \mathcal{C}_{x,t}^{4,2}$, то из априорной оценки (15) следует сходимость разностной схемы (13), (14) к решению соответствующей дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку погрешности аппроксимации $\mathcal{O}(h^2 + \tau^{2-\alpha_0})$.

Численные результаты. Численные расчеты¹ проведены для тестового примера, когда функция

$$u(x, t) = \sin(\pi x)(1 + 2t^2 + t^3)$$

является точным решением задачи (1), (2) при $m = 2$, где $\alpha_0 = 0.8$, $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 0.2$,

$$\lambda_0(t) = e^{-t}, \quad \lambda_1(t) = \frac{1}{1+t}, \quad \lambda_2(t) = \frac{1}{1+t^2},$$

с коэффициентами $k(x, t) = 2 - \cos(xt)$, $q(x, t) = 1 - \sin(xt)$, $T = 1$.

В табл. 1 и 2 представлены погрешности ($z = y - u$) и порядок сходимости (СО) в нормах $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_{\mathcal{C}(\bar{\omega}_{h\tau})}$, где $\|z\|_{\mathcal{C}(\bar{\omega}_{h\tau})} = \max_{(x_i, t_j) \in \bar{\omega}_{h\tau}} |z|$.

¹Все расчеты проведены с помощью языка программирования Julia, версия v1.0.1.

Таблица 1

Погрешность в сеточных нормах L_2 и C при $\tau^{2-\alpha} = h^2$ [The convergence order (CO) in the grid L_2 - and C -norm when $\tau^{2-\alpha} = h^2$]

α	h	$\max_{0 \leq n \leq M} \ z^n\ _0$	CO in $\ \cdot\ _0$	$\ z\ _{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$	CO in $\ \cdot\ _{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$
$\alpha_0 = 0.8$	1/10	1.8240E-2		2.5601E-2	
$\alpha_1 = 0.5$	1/20	4.5277E-3	2.0103	6.3664E-3	2.0077
$\alpha_2 = 0.2$	1/40	1.1268E-3	2.0066	1.5877E-3	2.0036
	1/80	2.8073E-4	2.0049	3.9556E-4	2.0050

Таблица 2

Погрешность в сеточных нормах L_2 и C при $h = 1/10000$ [The convergence order (CO) in the grid L_2 - and C -norm when $h = 1/10000$]

α	τ	$\max_{0 \leq n \leq M} \ z^n\ _0$	CO in $\ \cdot\ _0$	$\ z\ _{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$	CO in $\ \cdot\ _{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$
$\alpha_0 = 0.8$	1/10	1.6044E-2		2.2832E-2	
$\alpha_1 = 0.5$	1/20	6.6949E-3	1.2610	9.5272E-3	1.2610
$\alpha_2 = 0.2$	1/40	2.8018E-3	1.2567	3.9871E-3	1.2567
	1/80	1.1782E-3	1.2497	1.6766E-3	1.2497

Данные табл. 1 показывают, что по мере увеличения числа шагов сетки по правилу $h^2 = \tau^{2-\alpha_0}$ уменьшается максимальная погрешность со скоростью $\mathcal{O}(\tau^{2-\alpha_0} + h^2) = \mathcal{O}(h^2)$, равной порядку сходимости разностной схемы. Порядок сходимости вычисляется по следующей формуле: $\text{CO} = \log_{\frac{h_1}{h_2}} \frac{\|z_1\|}{\|z_2\|}$ (z_i — это погрешность, соответствующая h_i).

Из данных табл. 2 следует, что при достаточно малом $h = 1/10000$ с возрастанием числа шагов по временной сетке уменьшается погрешность в соответствующих нормах со скоростью $\mathcal{O}(\tau^{2-\alpha_0})$. Порядок сходимости для данного случая вычисляется по формуле $\text{CO} = \log_{\frac{\tau_1}{\tau_2}} \frac{\|z_1\|}{\|z_2\|}$.

5. Компактная разностная схема для уравнения диффузии дискретно-распределенного порядка с обобщенными функциями памяти. Дифференциальной задаче (1), (2) для случая, когда $k = k(t)$ и $q = q(t)$, поставим в соответствие следующую компактную разностную схему:

$$P_{(\lambda)}^{(\alpha)}(\Delta_{0t_{j+1}})\mathcal{H}_h y_i = a^{j+1}y_{\bar{x},i}^{j+1} - d^{j+1}\mathcal{H}_h y_i^{j+1} + \mathcal{H}_h \varphi_i^{j+1}, \quad (16)$$

$$i = 1, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, M-1;$$

$$y(0, t) = 0, \quad y(l, t) = 0, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (17)$$

где

$$\mathcal{H}_h v_i = v_i + \frac{h^2}{12} v_{\bar{x},i}, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

$$a^{j+1} = k(t_{j+1}), \quad d^{j+1} = q(t_{j+1}), \quad \varphi_i^{j+1} = f(x_i, t_{j+1}).$$

Разностная схема (16), (17) имеет порядок аппроксимации $\mathcal{O}(\tau^{2-\alpha_0} + h^4)$, если $u \in \mathcal{C}_{x,t}^{6,2}$. Это следует из [25] и (12).

ТЕОРЕМА 5. Разностная схема (16), (17) безусловно устойчива и для ее решения справедлива следующая априорная оценка:

$$\|\mathcal{H}_h y^{j+1}\|_0^2 \leq \|\mathcal{H}_h y^0\|_0^2 + \frac{1}{8c_1 \sum_{r=0}^m \frac{\lambda_r(T)}{\Gamma(1-\alpha_r)T^{\alpha_r}}} \max_{0 \leq j \leq M} \|\mathcal{H}_h \varphi^j\|_0^2. \quad (18)$$

Доказательство. Умножим уравнение (16) скалярно на $\mathcal{H}_h y^{j+1} = (\mathcal{H}_h y)^{j+1}$ и получим

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_h y^{j+1}, P_{(\lambda)}^{(\alpha)}(\Delta_{0t_{j+1}})\mathcal{H}_h y) - a^{j+1}(\mathcal{H}_h y^{j+1}, y_{\bar{x}\bar{x}}^{(\sigma)}) + \\ + d^{j+1}(\mathcal{H}_h y^{j+1}, \mathcal{H}_h y^{j+1}) = (\mathcal{H}_h y^{j+1}, \mathcal{H}_h \varphi^{j+1}). \end{aligned} \quad (19)$$

Преобразуем слагаемые тождества (19):

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_h y^{j+1}, P_{(\lambda)}^{(\alpha)}(\Delta_{0t_{j+1}})\mathcal{H}_h y) &\geq \frac{1}{2} P_{(\lambda)}^{(\alpha)}(\Delta_{0t_{j+1}}) \|\mathcal{H}_h y\|_0^2, \\ -(\mathcal{H}_h y^{j+1}, y_{\bar{x}\bar{x}}^{j+1}) &= -(y^{j+1}, y_{\bar{x}\bar{x}}^{j+1}) - \frac{h^2}{12} \|y_{\bar{x}\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 = \\ &= \|y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 - \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{N-1} (y_{\bar{x},i+1}^{j+1} - y_{\bar{x},i}^{j+1})^2 h \geq \\ &\geq \|y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 - \frac{1}{3} \|y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 = \frac{2}{3} \|y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 \geq \frac{8}{3} \|y^{j+1}\|_0^2, \end{aligned}$$

где

$$\|y\|_0^2 = \sum_{i=1}^N y_i^2 h,$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_h y^{j+1}, \mathcal{H}_h \varphi^{j+1}) &\leq \varepsilon \|\mathcal{H}_h y^{j+1}\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\mathcal{H}_h \varphi^{j+1}\|_0^2 = \\ &= \varepsilon \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{y_{i-1}^{j+1} + 10y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}}{12} \right)^2 h + \frac{1}{4\varepsilon} \|\mathcal{H}_h \varphi^{j+1}\|_0^2 \leq \\ &\leq \varepsilon \|y^{j+1}\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\mathcal{H}_h \varphi^{j+1}\|_0^2. \end{aligned}$$

С учетом приведенных выше преобразований из тождества (19) при $\varepsilon = 8c_1/3$ получим неравенство

$$P_{(\lambda)}^{(\alpha)}(\Delta_{0t_{j+1}}) \|\mathcal{H}_h y\|_0^2 \leq \frac{1}{8c_1} \|\mathcal{H}_h \varphi^{j+1}\|_0^2.$$

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 1 в [13], и поэтому его можно пропустить. $\square$

Норма $\|\mathcal{H}_h y\|_0$ эквивалентна норме $\|y\|_0$, что следует из неравенства

$$\frac{5}{12}\|y\|_0^2 \leq \|\mathcal{H}_h y\|_0^2 \leq \|y\|_0^2. \quad (20)$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть $u(x, t) \in \mathcal{C}_{x,t}^{6,2}$ — решение задачи (1), (2) для случая $k = k(t)$, $q = q(t)$, и $\{y_i^j \mid 0 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M\}$ — решение разностной схемы (16), (17). Тогда справедлива оценка

$$\|u(\cdot, t_j) - y^j\|_0 \leq C_R(\tau^{2-\alpha} + h^4), \quad 1 \leq j \leq M,$$

где C_R — положительная постоянная, не зависящая от τ и h .

Справедливость теоремы 6 непосредственно следует из априорной оценки (18) и эквивалентности норм (20).

Заключение. В данной работе методом энергетических неравенств получены априорные оценки решения первой краевой задачи для уравнения диффузии дискретно-распределенного порядка с обобщенными функциями памяти. Построен разностный аналог производной Капуто дискретно-распределенного порядка с обобщенными функциями памяти (аналог формулы L1). Исследованы основные свойства этого разностного оператора и на его основе построены разностные схемы второго и четвертого порядков аппроксимации по пространственной переменной и порядка $2 - \alpha_0$ по временной переменной для обобщенного уравнения диффузии дискретно-распределенного порядка с переменными коэффициентами. Доказана устойчивость предложенных разностных схем, а также их сходимости в сеточной L_2 -норме со скоростью, равной порядку погрешности аппроксимации. Полученные теоретические результаты подтверждаются численными расчетами тестовых задач.

Конкурирующие интересы. У меня нет конфликта интересов в авторстве и публикации этой статьи.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Oldham K. B., Spanier J. *The fractional calculus; Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order* / Mathematics in Science and Engineering. vol. 111. New York, London: Academic Press, 1974. xiii+234 pp.
2. Podlubny I. *Fractional Differential Equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications* / Mathematics in Science and Engineering. vol. 198. San Diego: Academic Press, 1999. xxiv+340 pp. doi: [10.1016/S0076-5392\(99\)X8001-5](https://doi.org/10.1016/S0076-5392(99)X8001-5).
3. *Applications of Fractional Calculus in Physics* / ed. R. Hilfer. Singapore: World Scientific, 2000. viii+463 pp.
4. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations* / North-Holland Mathematics Studies. vol. 204. Amsterdam: Elsevier Science B. V., 2006. xvi+523 pp. doi: [10.1016/S0304-0208\(06\)80001-0](https://doi.org/10.1016/S0304-0208(06)80001-0).

5. Jiao Z., Chen Y., Podlubny I. *Distributed-Order Dynamic Systems: Stability, Simulation, Applications and Perspectives* / Springer Briefs in Control, Automation and Robotics. London: Springer-Verlag, 2012. xiii+90 pp. doi: [10.1007/978-1-4471-2852-6](https://doi.org/10.1007/978-1-4471-2852-6).
6. Luchko Y. Boundary value problems for the generalized time-fractional diffusion equation of distributed order // *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2009. vol. 12, no. 4. pp. 409–422, http://www.math.bas.bg/~fcaa/volume12/fcaa124/Luchko_fcaa_12_4.pdf.
7. Luchko Y. Initial-boundary-value problems for the generalized multi-term time-fractional diffusion equation // *J. Math. Anal. Appl.*, 2011. vol. 374, no. 2. pp. 538–548. doi: [10.1016/j.jmaa.2010.08.048](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.08.048).
8. Gao G. H., Alikhanov A. A., Sun Z. Z. The temporal second order difference schemes based on the interpolation approximation for solving the time multi-term and distributed-order fractional sub-diffusion equations // *J. Sci. Comput.*, 2017. vol. 73, no. 1. pp. 93–121. doi: [10.1007/s10915-017-0407-x](https://doi.org/10.1007/s10915-017-0407-x).
9. Sandev T., Chechkin A., Kantz H., Metzler R. Diffusion and Fokker–Planck–Smoluchowski equations with generalized memory kernel // *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2015. vol. 18, no. 4. pp. 1006–1038. doi: [10.1515/fca-2015-0059](https://doi.org/10.1515/fca-2015-0059).
10. Алиханов А. А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // *Дифференц. уравнения*, 2010. Т. 46, № 5. С. 658–664.
11. Alikhanov A. A. Boundary value problems for the diffusion equation of the variable order in differential and difference settings // *Appl. Math. Comput.*, 2012. vol. 219. pp. 3938–3946, arXiv: [1105.2033](https://arxiv.org/abs/1105.2033) [math.NA]. doi: [10.1016/j.amc.2012.10.029](https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.10.029).
12. Alikhanov A. A. A time-fractional diffusion equation with generalized memory kernel in differential and difference settings with smooth solutions // *Comput. Methods Appl. Math.*, 2017. vol. 17, no. 4. pp. 647–660. doi: [10.1515/cmam-2017-0035](https://doi.org/10.1515/cmam-2017-0035).
13. Alikhanov A. A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // *J. Comput. Phys.*, 2015. vol. 280. pp. 424–438, arXiv: [1404.5221](https://arxiv.org/abs/1404.5221) [math.NA]. doi: [10.1016/j.jcp.2014.09.031](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.09.031).
14. Alikhanov A. A. Numerical methods of solutions of boundary value problems for the multi-term variable-distributed order diffusion equation // *Appl. Math. Comput.*, 2015. vol. 268. pp. 12–22, arXiv: [1311.2035](https://arxiv.org/abs/1311.2035) [math.NA]. doi: [10.1016/j.amc.2015.06.045](https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.06.045).
15. Алиханов А. А. Устойчивость и сходимость разностных схем для краевых задач уравнения диффузии дробного порядка // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2016. Т. 56, № 4. С. 572–586. doi: [10.7868/S0044466916040049](https://doi.org/10.7868/S0044466916040049).
16. Таукенова Ф. И., Шхануков-Лафишев М. Х. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2006. Т. 46, № 10. С. 1871–1881.
17. Sakamoto K., Yamamoto M. Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems // *J. Math. Anal. Appl.*, 2011. vol. 382, no. 1. pp. 426–447. doi: [10.1016/j.jmaa.2011.04.058](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.04.058).
18. Luchko Y. Initial-boundary-value problems for the one-dimensional time-fractional diffusion equation // *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2012. vol. 15, no. 1. pp. 141–160, arXiv: [1111.2961](https://arxiv.org/abs/1111.2961) [math.AP]. doi: [10.2478/s13540-012-0010-7](https://doi.org/10.2478/s13540-012-0010-7).
19. Alikhanov A. A. A difference method of solving the Steklov nonlocal boundary value problem of second kind for the time-fractional diffusion equation // *Comput. Methods Appl. Math.*, 2017. vol. 17, no. 1. pp. 1–16, arXiv: [1405.0030](https://arxiv.org/abs/1405.0030) [math.NA]. doi: [10.1515/cmam-2016-0030](https://doi.org/10.1515/cmam-2016-0030).
20. Stynes M., O’Riordan E., Gracia J. L. Error analysis of a finite difference method on graded meshes for a time-fractional diffusion equation // *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 55, no. 2. pp. 1057–1079. doi: [10.1137/16M1082329](https://doi.org/10.1137/16M1082329).
21. Jin B., Lazarov R., Zhou Z. An analysis of the L1 scheme for the subdiffusion equation with nonsmooth data // *IMA J. Numer. Anal.*, vol. 36, no. 1. pp. 197–221, arXiv: [1501.00253](https://arxiv.org/abs/1501.00253) [math.NA]. doi: [10.1093/imanum/dru063](https://doi.org/10.1093/imanum/dru063).
22. Jin B., Lazarov R., Sheen D., Zhou Z. Error estimates for approximations of distributed order time fractional diffusion with nonsmooth data // *Fract. Calc. Appl. Anal.*, vol. 19, no. 1. pp. 69–93, arXiv: [1504.01529](https://arxiv.org/abs/1504.01529) [math.NA]. doi: [10.1515/fca-2016-0005](https://doi.org/10.1515/fca-2016-0005).

23. Gao G. H., Sun Z. Z., Zhang H. W. A new fractional numerical differentiation formula to approximate the Caputo fractional derivative and its applications // *J. Comput. Phys.*, 2014. vol. 259. pp. 33–50. doi: [10.1016/j.jcp.2013.11.017](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2013.11.017).
24. Samarskii A. A. *The Theory of Difference Schemes* / Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker. vol. 240. New York: Marcel Dekker Inc., 2001. 786 pp.
25. Gao G. H., Sun Z. Z. A compact finite difference scheme for the fractional sub-diffusion equations // *J. Comput. Phys.*, 2011. vol. 230, no. 3. pp. 586–595. doi: [10.1016/j.jcp.2010.10.007](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.10.007).

MSC: 65M06, 65N06, 65N12

Stability and convergence of difference schemes for the multi-term time-fractional diffusion equation with generalized memory kernels

A. K. Khibiev

Institute of Applied Mathematics and Automation
of Kabardin-Balkar Scientific Centre of RAS,
89 a, Shortanova st., Nal'chik, 360000, Russian Federation.

Abstract

In this paper, a priori estimate for the corresponding differential problem is obtained by using the method of the energy inequalities. We construct a difference analog of the multi-term Caputo fractional derivative with generalized memory kernels (analog of L1 formula). The basic properties of this difference operator are investigated and on its basis some difference schemes generating approximations of the second and fourth order in space and the $(2-\alpha_0)$ -th order in time for the generalized multi-term time-fractional diffusion equation with variable coefficients are considered. Stability of the suggested schemes and also their convergence in the grid L_2 -norm with the rate equal to the order of the approximation error are proved. The obtained results are supported by numerical calculations carried out for some test problems.

Keywords: fractional derivative, generalized memory kernel, a priori estimates, fractional diffusion equation, finite difference scheme, stability, convergence.

Received: 16th April, 2019 / Revised: 25th May, 2019 /

Accepted: 10th June, 2019 / First online: 21st June, 2019

Competing interests. I hereby declare that I have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

Short Communication

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Khibiev A. K. Stability and convergence of difference schemes for the multi-term time-fractional diffusion equation with generalized memory kernels, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 3, pp. 582–597. doi: [10.14498/vsgtu1690](https://doi.org/10.14498/vsgtu1690) (In Russian).

Author's Details:

Aslanbek K. Khibiev  <https://orcid.org/0000-0002-5727-7540>

Postgraduate Student; Research Intern; Lab. of Numerical Methods;

e-mail: akhibiev@gmail.com

References

1. Oldham K. B., Spanier J. *The fractional calculus; Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 111. New York, London, Academic Press, 1974, xiii+234 pp.
2. Podlubny I. *Fractional Differential Equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 198. San Diego, Academic Press, 1999, xxiv+340 pp. doi: [10.1016/S0076-5392\(99\)X8001-5](https://doi.org/10.1016/S0076-5392(99)X8001-5).
3. *Applications of Fractional Calculus in Physics*, ed. R. Hilfer. Singapore, World Scientific, 2000, viii+463 pp.
4. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 204. Amsterdam, Elsevier Science B. V., 2006, xvi+523 pp. doi: [10.1016/S0304-0208\(06\)80001-0](https://doi.org/10.1016/S0304-0208(06)80001-0).
5. Jiao Z., Chen Y., Podlubny I. *Distributed-Order Dynamic Systems: Stability, Simulation, Applications and Perspectives*, Springer Briefs in Control, Automation and Robotics. London, Springer-Verlag, 2012, xiii+90 pp. doi: [10.1007/978-1-4471-2852-6](https://doi.org/10.1007/978-1-4471-2852-6).
6. Luchko Y. Boundary value problems for the generalized time-fractional diffusion equation of distributed order, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2009, vol. 12, no. 4, pp. 409–422, http://www.math.bas.bg/~fcaa/volume12/fcaa124/Luchko_fcaa_12_4.pdf.
7. Luchko Y. Initial-boundary-value problems for the generalized multi-term time-fractional diffusion equation, *J. Math. Anal. Appl.*, 2011, vol. 374, no. 2, pp. 538–548. doi: [10.1016/j.jmaa.2010.08.048](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.08.048).
8. Gao G. H., Alikhanov A. A., Sun Z. Z. The temporal second order difference schemes based on the interpolation approximation for solving the time multi-term and distributed-order fractional sub-diffusion equations, *J. Sci. Comput.*, 2017, vol. 73, no. 1, pp. 93–121. doi: [10.1007/s10915-017-0407-x](https://doi.org/10.1007/s10915-017-0407-x).
9. Sandev T., Chechkin A., Kantz H., Metzler R. Diffusion and Fokker–Planck–Smoluchowski equations with generalized memory kernel, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2015, vol. 18, no. 4, pp. 1006–1038. doi: [10.1515/fca-2015-0059](https://doi.org/10.1515/fca-2015-0059).
10. Alikhanov A. A. A priori estimates for solutions of boundary value problems for fractional-order equations, *Differ. Equ.*, 2010, vol. 46, no. 5, pp. 660–666, arXiv: [1105.4592](https://arxiv.org/abs/1105.4592) [math.NA]. doi: [10.1134/S0012266110050058](https://doi.org/10.1134/S0012266110050058).
11. Alikhanov A. A. Boundary value problems for the diffusion equation of the variable order in differential and difference settings, *Appl. Math. Comput.*, 2012, vol. 219, pp. 3938–3946, arXiv: [1105.2033](https://arxiv.org/abs/1105.2033) [math.NA]. doi: [10.1016/j.amc.2012.10.029](https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.10.029).
12. Alikhanov A. A. A time-fractional diffusion equation with generalized memory kernel in differential and difference settings with smooth solutions, *Comput. Methods Appl. Math.*, 2017, vol. 17, no. 4, pp. 647–660. doi: [10.1515/cmam-2017-0035](https://doi.org/10.1515/cmam-2017-0035).
13. Alikhanov A. A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation, *J. Comput. Phys.*, 2015, vol. 280, pp. 424–438, arXiv: [1404.5221](https://arxiv.org/abs/1404.5221) [math.NA]. doi: [10.1016/j.jcp.2014.09.031](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.09.031).
14. Alikhanov A. A. Numerical methods of solutions of boundary value problems for the multi-term variable-distributed order diffusion equation, *Appl. Math. Comput.*, 2015, vol. 268, pp. 12–22, arXiv: [1311.2035](https://arxiv.org/abs/1311.2035) [math.NA]. doi: [10.1016/j.amc.2015.06.045](https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.06.045).
15. Alikhanov A. A. Stability and convergence of difference schemes for boundary value problems for the fractional-order diffusion equation, *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2016, vol. 56, no. 4, pp. 561–575. doi: [10.1134/S0965542516040035](https://doi.org/10.1134/S0965542516040035).
16. Taukenova F. I., Shkhanukov-Lafishev M. Kh. Difference methods for solving boundary value problems for fractional differential equations, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2006, vol. 46, no. 10, pp. 1785–1795. doi: [10.1134/S0965542506100149](https://doi.org/10.1134/S0965542506100149).
17. Sakamoto K., Yamamoto M. Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems, *J. Math. Anal. Appl.*, 2011, vol. 382, no. 1, pp. 426–447. doi: [10.1016/j.jmaa.2011.04.058](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.04.058).

18. Luchko Y. Initial-boundary-value problems for the one-dimensional time-fractional diffusion equation, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2012, vol. 15, no. 1, pp. 141–160, arXiv: [1111.2961](#) [math.AP]. doi: [10.2478/s13540-012-0010-7](#).
19. Alikhanov A. A. A difference method of solving the Steklov nonlocal boundary value problem of second kind for the time-fractional diffusion equation, *Comput. Methods Appl. Math.*, 2017, vol. 17, no. 1, pp. 1–16, arXiv: [1405.0030](#) [math.NA]. doi: [10.1515/cmam-2016-0030](#).
20. Stynes M., O’Riordan E., Gracia J. L. Error analysis of a finite difference method on graded meshes for a time-fractional diffusion equation, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 55, no. 2, pp. 1057–1079. doi: [10.1137/16M1082329](#).
21. Jin B., Lazarov R., Zhou Z. An analysis of the L1 scheme for the subdiffusion equation with nonsmooth data, *IMA J. Numer. Anal.*, vol. 36, no. 1, pp. 197–221, arXiv: [1501.00253](#) [math.NA]. doi: [10.1093/imanum/dru063](#).
22. Jin B., Lazarov R., Sheen D., Zhou Z. Error estimates for approximations of distributed order time fractional diffusion with nonsmooth data, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, vol. 19, no. 1, pp. 69–93, arXiv: [1504.01529](#) [math.NA]. doi: [10.1515/fca-2016-0005](#).
23. Gao G. H., Sun Z. Z., Zhang H. W. A new fractional numerical differentiation formula to approximate the Caputo fractional derivative and its applications, *J. Comput. Phys.*, 2014, vol. 259, pp. 33–50. doi: [10.1016/j.jcp.2013.11.017](#).
24. Samarskii A. A. *The Theory of Difference Schemes*, Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, vol. 240. New York, Marcel Dekker Inc., 2001, 786 pp.
25. Gao G. H., Sun Z. Z. A compact finite difference scheme for the fractional sub-diffusion equations, *J. Comput. Phys.*, 2011, vol. 230, no. 3, pp. 586–595. doi: [10.1016/j.jcp.2010.10.007](#).