

Дифференциальные уравнения

УДК 517.988.67

МОДЕЛИ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ БИФУРКАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Т. Е. Бадюкина

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарёва,
Россия, 430005, Саранск, ул. Большевикская, 68.

На примере кинематических граничных условий (левый край жестко закреплен, правый край свободен) рассматривается задача о вычислении разветвляющихся решений нелинейной задачи на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка, описывающего прогиб удлиненной пластины в сверхзвуковом потоке газа, сжимаемой (растягиваемой) внешними усилиями. Вычисления основываются на представлении бифуркационных параметров через корни характеристического уравнения соответствующего линеаризованного оператора. Такое представление позволяет исследовать задачу в точной постановке и найти критические бифуркационные поверхности и кривые, в окрестности точек которых строится асимптотика разветвляющихся решений в виде сходящихся по малым параметрам рядов. Наибольшие трудности возникают при исследовании линеаризованной спектральной задачи, фредгольмовость которой доказывается построением соответствующей функции Грина, которое для задач такого типа выполнено впервые.

Ключевые слова: сверхзвуковой поток газа, прогиб пластины, аэроупругость, бифуркация, уравнение разветвления.

1. Постановка задачи. Рассматривается класс двухточечных краевых задач [1, 2] для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) четвертого порядка, описывающих прогиб удлиненной упруго опертой пластины в сверхзвуковом потоке газа, сжимаемой / растягиваемой внешними усилиями.

В безразмерных переменных задача о прогибе пластины описывается уравнением [1, 2]

$$\chi^2 \left(\frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}} \right)'' - T w'' + \beta_0 w = k K(w', M, \kappa) + \theta w'' \int_0^1 [(1+w'^2)^{1/2} - 1] dx. \quad (1)$$

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1258>

© 2014 Самарский государственный технический университет.

Образец цитирования: Т. Е. Бадюкина, “Модели многопараметрических бифуркационных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка” // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2014. № 1 (34). С. 9–18. doi: [10.14498/vsgtu1258](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1258).

Сведения об авторе: Татьяна Евгеньевна Бадюкина, ассистент, каф. прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики.

E-mail address: badokinate@gmail.com

Общий подход к решению такого типа задач рассматривается при кинематических граничных условиях

$$w(0) = w'(0) = 0, \quad w''(1) = w^{(3)}(1) = 0. \quad (2)$$

Здесь $w = w(x)$ — прогиб пластины; $0 \leq x_1 \leq d$, $-\infty < y_1 < \infty$, $x = x_1/d$, $0 \leq x \leq 1$ — прямоугольные координаты;

$$K(w', M, \kappa) = 1 - \left[1 + \frac{\kappa - 1}{2} M w' \right]^{2\kappa/(\kappa-1)}$$

— при одностороннем обтекании;

$$K(w', M, \kappa) = \left[1 - \frac{\kappa - 1}{2} M w' \right]^{2\kappa/(\kappa-1)} - \left[1 + \frac{\kappa - 1}{2} M w' \right]^{2\kappa/(\kappa-1)}$$

— при двустороннем обтекании;

$$\chi^2 = \frac{h^2}{12(1 - \mu^2)d^2}, \quad T = \frac{qd}{Eh}, \quad \theta = \frac{1}{1 - \mu^2}, \quad k = \frac{p_0 d}{Eh},$$

где d — ширина пластины, h — её толщина, E — модуль Юнга, μ — коэффициент Пуассона, $M = v/c_\infty$ — число Маха (v — скорость потока газа, c_∞ — скорость звука в невозмущенном газе), κ — показатель политропы, p_0 — давление, β_0 — коэффициент жёсткости основания. Интегральное слагаемое учитывает дополнительное усилие в срединной плоскости при прогибе.

Для вычисления малых изгибных форм в окрестностях критических значений бифуркационных параметров (число Маха $M = M_0 + \varepsilon_1$, сжимающее (растягивающее) усилие $T = T_0 + \varepsilon_2$) применяются методы теории бифуркаций [3]. Зависимость дифференциального уравнения от бифуркационных параметров, выраженная через корни соответствующих характеристических уравнений линеаризации, которые можно считать заданными точно, позволяет определить критические бифуркационные поверхности и кривые, в окрестностях точек которых строится асимптотика разветвляющихся решений в виде сходящихся по малым параметрам рядов, и тем самым решать бифуркационную задачу о прогибе пластины в точной постановке. Наибольшие трудности возникают при исследовании линеаризованной спектральной задачи, фредгольмовость которой, подобно [4], доказывается построением соответствующей функции Грина, выполненным по стандартной схеме, изложенной в монографии [5].

В известных нам работах к бифуркационным задачам аэроупругости, как правило, применялся метод Галёркина. Методами теории бифуркаций задача о прогибе прямоугольной пластины исследована в работе [6]. Прогиб удлиненной пластины при учете только одного бифуркационного параметра — числа Маха — в работах П. А. Вельмисова и Б. В. Логинова [7], П. А. Вельмисова и С. В. Киреева [8], в которых применялся метод групповых преобразований Ц. На, позволяющий сводить двухточечные граничные задачи для ОДУ четвёртого порядка к задаче Коши. В работе [9] исследована наиболее простая модельная бифуркационная задача для удлиненной пластины с двумя

бифуркационными параметрами (сжатие/растяжение и число Маха) при использовании методов теории ветвления решений нелинейных уравнений [3]. Эта же техника применялась в работе [10].

2. Вычисление разветвляющихся решений. Разложение нелинейности в ряды по степеням малого по норме решения w в окрестности критических значений бифуркационных параметров даёт линейаризованную двухточечную граничную задачу на собственные значения

$$L(w) \equiv \chi^2 w^{(4)} - Tw'' + \sigma w' + \beta_0 w = 0, \quad \sigma = 1(2)k\kappa M \quad (3)$$

с граничными условиями (2), которой отвечает характеристическое уравнение

$$\chi^2 \lambda^4 - T\lambda^2 + \sigma\lambda + \beta_0 = 0. \quad (4)$$

Здесь множитель 1(2) в параметре σ соответствует одно(дву-)стороннему обтеканию пластины сверхзвуковым потоком газа.

Соответствующая сопряжённая линейаризованная задача строится стандартными методами [5, 11] — интегрированием по частям на промежутке $[0, 1]$ квадратичной формы $L(w) \cdot \omega$ — и имеет вид

$$\chi^2 \omega^{(4)} - T\omega'' - \sigma\omega' + \beta_0 \omega = 0 \quad (5)$$

с граничными условиями

$$\omega(0) = \omega'(0) = 0, \quad \chi^2 \omega''(1) - T\omega(1) = 0, \quad \chi^2 \omega^{(3)}(1) - T\omega'(1) - \sigma\omega(1) = 0.$$

При исследовании алгебраического уравнения (5) с тремя параметрами T/χ^2 , σ/χ^2 и β_0/χ^2 использован метод Штурма разделения корней алгебраического уравнения. Установлено, что уравнение (4) может иметь корни одного из следующих видов:

- А) $-\gamma \pm i\delta_1, \gamma \pm i\delta_2$ ($\gamma, \delta_1, \delta_2 > 0, \delta_2 > \delta_1$);
- В) $-\alpha_1, -\alpha_2, \gamma \pm i\delta$ ($\alpha_1, \alpha_2, \gamma, \delta > 0, \alpha_1 > \alpha_2$);
- С) $-\alpha \pm \beta_1, \alpha \pm \beta_2$ ($\alpha, \beta_1, \beta_2 > 0, \beta_2 < \beta_1 < \alpha$);
- А-В) $-\alpha, -\alpha, \alpha \pm i\delta$ ($\alpha, \delta > 0$);
- В-С) $-\alpha, -2\gamma + \alpha, \gamma, \gamma$ ($\alpha, \gamma > 0, \gamma < \alpha < 2\gamma$).

Вид корней характеристического уравнения выбран с учётом равенства нулю суммы корней таким образом, что в невырожденных случаях все искомые коэффициенты и функции являются функциями трёх аргументов, в вырожденных случаях — двух аргументов.

Асимптотика разветвляющихся решений по малым параметрам $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ в точке бифуркации (T_0, M_0) строится для случаев существования бифуркационных кривых.

Линеаризованная в точке бифуркации задача (1), (2) определяет фред-гольмов оператор

$$B : C^{4+\alpha}[0, 1] \rightarrow C^\alpha[0, 1]$$

с одномерным подпространством нулей $N(B) = \text{span}\{\varphi(x)\}$ и дефектным подпространством $N^*(B) = \text{span}\{\psi(x)\}$. Применение к уравнению (1) в разложении аналитической нелинейности

$$\begin{aligned}
 Bw &\equiv \chi^2 w^{(4)} - T_0 w'' + \sigma w' + \beta_0 w = R(w, \varepsilon) = \\
 &= \chi^2 \left(\frac{3}{2} w'^2 w^{(4)} + 3w''^3 + 9w'w''w''' \right) + \varepsilon_1 w'' - 1(2)k\kappa w' \varepsilon_2 + \frac{\theta}{2} w'' \int_0^1 w'^2 dx - \\
 &\quad - \left\{ \begin{aligned} &\frac{k\kappa(\kappa+1)}{4} M_0^2 w'^2 + \frac{k\kappa(\kappa+1)}{2} M_0 \varepsilon_2 w'^2 + \frac{k\kappa(\kappa+1)}{12} M_0^3 w'^3 + \dots \\ &\frac{k\kappa(\kappa+1)}{6} M_0^3 w'^3 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

(верхняя (нижняя) строка последнего слагаемого отвечает одностороннему (двустороннему) обтеканию пластины потоком газа) регуляризатора Шмидта [3] представляет его в виде системы

$$\tilde{B}w = R(w, \varepsilon) + \xi z, \quad \xi - \langle w, \gamma \rangle = 0.$$

В аналитическом случае решение первого уравнения представляется в виде ряда

$$w = w_{100}\xi + w_{010}\varepsilon_1 + w_{001}\varepsilon_2 + \sum_{\alpha_1 + |\alpha| > 1} w_{\alpha_1; \alpha} \xi^{\alpha_1} \varepsilon^\alpha.$$

Подстановка его во второе уравнение системы даёт уравнение разветвления (УР) Шмидта

$$L(\xi, \varepsilon) \equiv \xi - \langle w(\varepsilon), \gamma \rangle = 0,$$

эквивалентное уравнению (1) в том смысле, что оно имеет то же количество малых решений, представимых в виде сходящихся рядов по тем же дробным степеням малых параметров.

При одностороннем обтекании главная часть УР, определяемая методом диаграммы Ньютона [3], имеет вид

$$L(\xi, \varepsilon) = L_{200}\xi^2 + L_{110}\xi\varepsilon_1 + L_{101}\xi\varepsilon_2 + \dots = 0,$$

где

$$L_{200} = \frac{k\kappa(\kappa+1)}{4} M_0^2 \langle \varphi'^2, \psi \rangle, \quad L_{110} = -\langle \varphi'', \psi \rangle, \quad L_{101} = k\kappa \langle \varphi', \psi \rangle;$$

$\Gamma = \tilde{B}^{-1}$, $\tilde{B} = B + \langle \cdot, \gamma \rangle z$; γ и z — биортогональные системы к $\varphi \in N(B)$ и $\psi \in N^*(B)$ соответственно. Здесь и далее

$$\langle a, b \rangle = \int_0^1 a(x)b(x)dx.$$

При $L_{200} \neq 0$ решение задачи представляется рядом, сходящимся в малой окрестности $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$:

$$w(x) = -\frac{L_{110}\varepsilon_1 + L_{101}\varepsilon_2}{L_{200}} \varphi(x) + o(|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|).$$

Следовательно, при условии существования точек, где определитель матрицы граничных условий равен нулю, происходит транскритическая бифуркация.

Главная часть УР для двустороннего обтекания пластины сверхзвуковым потоком газа имеет вид

$$L(\xi, \varepsilon) = L_{300}\xi^3 + L_{110}\xi\varepsilon_1 + L_{101}\xi\varepsilon_2 + \dots = 0,$$

где

$$L_{300} = \frac{k\kappa(\kappa+1)}{6} M_0^3 \langle \varphi'^3, \psi \rangle - \chi^2 \left\langle \frac{3}{2} \varphi'^2 \varphi^{(4)} + 3\varphi''^3 + 9\varphi' \varphi'' \varphi''', \psi \right\rangle - \\ - \frac{\theta}{2} \left\langle \varphi'' \int_0^1 w'^2 dx, \psi \right\rangle,$$

$$L_{200} = 0, \quad L_{110} = -\langle \varphi'', \psi \rangle, \quad L_{101} = \sigma_0 \langle \varphi', \psi \rangle, \quad \sigma_0 = 2k\kappa M_0.$$

При $L_{300} \neq 0$ асимптотика сходящегося решения выражается формулой

$$w(x) = \pm \left[\frac{L_{110}\varepsilon_1 + L_{101}\varepsilon_2}{L_{300}} \right]^{1/2} \varphi(x) + O(|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|),$$

где знаки ε_1 и ε_2 определяются условием неотрицательности подкоренного выражения. Следовательно, при $L_{300} \neq 0$ имеет место бифуркация типа «вилки».

3. Исследование спектральной задачи. Прогиб возможен для тех видов корней, когда доказано существование точек, в которых определитель матрицы граничных условий равен нулю.

А. Характеристическое уравнение имеет две пары комплексно-сопряжённых корней $(-\gamma \pm i\delta_1, \gamma \pm i\delta_2)$, и решение линеаризованной задачи даётся соотношением

$$w(x) = e^{-\gamma x} (c_1 \cos(\delta_1 x) + c_2 \sin(\delta_1 x)) + e^{\gamma x} (c_3 \cos(\delta_2 x) + c_4 \sin(\delta_2 x)).$$

Множество точек бифуркации определяется равенством нулю определителя Δ матрицы граничных условий:

$$\Delta = \delta_1 \delta_2 [(\gamma^2 + \delta_1^2) e^{-2\gamma} + (\gamma^2 + \delta_2^2) e^{2\gamma}] + \\ + \sin \delta_1 \left\{ ((\gamma^2 - \delta_2^2) \delta_1^4 + (3\gamma^4 - \delta_2^4 + 6\gamma^2 \delta_2^2) \delta_1^2 + 3\gamma^4 \delta_2^2 + \gamma^2 \delta_2^4 - 4\gamma^6) \sin \delta_2 + \right. \\ \left. + 2\gamma \delta_2 (\delta_1^4 + (\gamma^2 + 3\delta_2^2) \delta_1^2 - \gamma^2 \delta_2^2 - 4\gamma^4) \cos \delta_2 \right\} + \\ + 2\delta_1 \cos \delta_1 \left\{ \gamma ((\gamma^2 - 3\delta_2^2) \delta_1^2 - \delta_2^4 - \gamma^2 \delta_2^2 + 4\gamma^4) \sin \delta_2 + \right. \\ \left. + \delta_2 ((3\gamma^2 - \delta_2^2) \delta_1^2 + 3\gamma^2 \delta_2^2 + 7\gamma^4) \cos \delta_2 \right\}.$$

Численный анализ на основе разработанной автором компьютерной программы показывает, что на всей области определения

$$\Omega = \{(\gamma, \delta_1, \delta_2) \mid \delta_2 > \delta_1, \gamma > 0, \delta_1 > 0, \delta_2 > 0\}$$

определитель $\Delta > 0$, то есть прогиб отсутствует.

В. Корнями характеристического уравнения являются два отрицательных и пара комплексно-сопряжённых чисел. С учётом равенства нулю суммы корней вводится замена $\alpha_1 = \gamma + \alpha$, $\alpha_2 = \gamma - \alpha$, $\alpha > 0$. Тогда решению

$$w(x) = c_1 e^{-(\gamma+\alpha)x} + c_2 e^{-(\gamma-\alpha)x} + e^{\gamma x} (c_3 \cos(\delta x) + c_4 \sin(\delta x))$$

отвечает определитель матрицы граничных условий

$$\begin{aligned} \Delta = & 2\alpha\delta[(\alpha^2 - \gamma^2)^2 e^{-2\gamma} + (\gamma^2 + \delta^2)^2 e^{2\gamma}] + \\ & + (\alpha + \gamma)^2 e^{-\alpha} \left[\sin \delta (4\gamma^4 - \gamma^2(\alpha^2 + 3\delta^2) + 4\gamma\alpha\delta^2 + \alpha^2\delta^2 - \delta^4) + \right. \\ & \left. + 2\delta \cos \delta (4\gamma^3 - \alpha\gamma^2 - \gamma(\alpha^2 - \delta^2) + \alpha\delta^2) \right] - \\ & - (\alpha - \gamma)^2 e^{\alpha} \left[\sin \delta (4\gamma^4 - \gamma^2(\alpha^2 + 3\delta^2) - 4\gamma\alpha\delta^2 + \alpha^2\delta^2 - \delta^4) + \right. \\ & \left. + 2\delta \cos \delta (4\gamma^3 - \alpha\gamma^2 - \gamma(\alpha^2 - \delta^2) - \alpha\delta^2) \right] > 0. \end{aligned}$$

ЛЕММА. На множестве $\Omega = \{(\alpha, \gamma, \delta) \mid \alpha \in (0, \gamma), \gamma > 0, \delta > 0\}$ прогиб отсутствует.

Доказательство. Рассмотрим определитель

$$\begin{aligned} \Delta = & 2\alpha\delta[(\alpha^2 - \gamma^2)^2 e^{-2\gamma} + (\gamma^2 + \delta^2)^2 e^{2\gamma}] + \\ & + (\alpha + \gamma)^2 e^{-\alpha} [A \sin \delta + B \cos \delta] - (\alpha - \gamma)^2 e^{\alpha} [C \sin \delta + D \cos \delta], \end{aligned}$$

причём

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 = C^2 + D^2 = \\ = (\gamma^2 + \delta^2)^2 (\delta^4 + 2\delta^2(4\gamma^2 + \alpha^2) + (4\gamma^2 - \alpha^2)^2) < \\ < (\gamma^2 + \delta^2)^2 (\delta^2 + 4\gamma^2 + \alpha^2)^2, \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} \Delta > & 2\alpha\delta[(\alpha^2 - \gamma^2)^2 e^{-2\gamma} + (\gamma^2 + \delta^2)^2 e^{2\gamma}] - \\ & - (\alpha + \gamma)^2 e^{-\alpha} (\gamma^2 + \delta^2) (\delta^2 + 4\gamma^2 + \alpha^2) - \\ & - (\alpha - \gamma)^2 e^{\alpha} (\gamma^2 + \delta^2) (\delta^2 + 4\gamma^2 + \alpha^2). \end{aligned}$$

Слагаемое $2\alpha\delta(\alpha^2 - \gamma^2)^2 e^{-2\gamma} > 0$ является малым и его можно не учитывать. Так как $\gamma > \alpha$, для Δ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \Delta > & (\gamma^2 + \delta^2) [2\alpha\delta(\gamma^2 + \delta^2) e^{2\alpha} - \\ & - (\alpha - \gamma)^2 e^{\alpha} (\delta^2 + 4\gamma^2 + \alpha^2) - (\alpha + \gamma)^2 e^{-\alpha} (\delta^2 + 4\gamma^2 + \alpha^2)]. \end{aligned}$$

Разложение экспонент в ряды приводит определитель к виду

$$\Delta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} [2^{n+1} \alpha \delta (\gamma^2 + \delta^2) - (\gamma - \alpha)^2 (\delta^2 + 4\gamma^2 + \alpha^2) - (-1)^n (\alpha + \gamma)^2 (\delta^2 + 4\gamma^2 + \alpha^2)].$$

Для нечётного n очевидно, что

$$a_n > \alpha \delta (\gamma^2 + \delta^2) + 4\alpha \gamma (\delta^2 + 4\gamma^2 + \alpha^2) > 0.$$

Если n — чётное, то

$$a_n = 2\alpha \delta (\gamma^2 + \delta^2) 2^n - (\gamma^2 + \alpha^2) (\delta^2 + 4\gamma^2 + \alpha^2).$$

Начиная с некоторого k все члены ряда будут положительными. В силу неограниченного возрастания функции 2^n с ростом числа n будем иметь, что $a_{k+1} > a_k$. Таким образом, все первые $k - 1$ отрицательных члена компенсируются последующими, начиная с k -того. Соответственно $\Delta > 0$, и, следовательно, прогиб отсутствует.

С. Характеристическое уравнение имеет два отрицательных и два положительных корня $(-\alpha \pm \beta_1, \alpha \pm \beta_2)$, его коэффициенты имеют вид

$$\frac{T}{\chi^2} = \beta_1^2 + \beta_2^2 + 2\alpha > 0, \quad \frac{\sigma}{\chi^2} = 2\alpha(\beta_1^2 - \beta_2^2), \quad \frac{\beta_0}{\chi^2} = (\alpha^2 - \beta_1^2)(\alpha^2 - \beta_2^2).$$

Таким образом, в этом случае возможно только растяжение пластины. Из теоремы Виета следует, что $\alpha > \beta_1$, $\beta_1 > \beta_2$. Определитель матрицы граничных условий для

$$w(x) = e^{-\alpha x} (c_1 e^{-\beta_1 x} + c_2 e^{\beta_1 x}) + e^{\alpha x} (c_3 e^{-\beta_2 x} + c_4 e^{\beta_2 x})$$

следующий:

$$\begin{aligned} \Delta = & 4\beta_1 \beta_2 ((\alpha^2 - \beta_1^2)^2 e^{-2\alpha} + (\alpha^2 - \beta_2^2)^2 e^{2\alpha}) - \\ & - (4\alpha^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2) \times \\ & \times ((\alpha + \beta_1)^2 (\alpha - \beta_2)^2 e^{-(\beta_1 + \beta_2)} + (\alpha - \beta_1)^2 (\alpha + \beta_2)^2 e^{\beta_1 + \beta_2}) + \\ & + (4\alpha^2 - (\beta_1 + \beta_2)^2) \times \\ & \times ((\alpha + \beta_1)^2 (\alpha + \beta_2)^2 e^{-(\beta_1 - \beta_2)} + (\alpha - \beta_1)^2 (\alpha - \beta_2)^2 e^{\beta_1 - \beta_2}). \end{aligned}$$

При $\alpha > \beta_1 > \beta_2$ он положительный ($\Delta > 0$).

В силу ограниченного объёма статьи доказательство отсутствия прогиба здесь не приводится.

А–В. Для вырожденного случая, когда уравнение (4) имеет отрицательный корень кратности два и пару комплексно-сопряжённых корней $(-\alpha, -\alpha, \alpha \pm i\delta)$, линеаризованное уравнение (3) имеет решение

$$w(x) = e^{-\alpha x} (c_1 + c_2 x) + e^{\alpha x} (c_3 \cos(\delta x) + c_4 \sin(\delta x)).$$

Определитель матрицы граничных условий является функцией двух переменных:

$$\begin{aligned}\Delta = & \alpha^4 \delta e^{-2\alpha} + \delta(\alpha^2 + \delta^2)^2 e^{2\alpha} + \\ & + \alpha(8\alpha^4 - 4\alpha^5 + 3\alpha^3 \delta^2 - 2\alpha^2 \delta^2 + \alpha \delta^4 + 2\delta^4) \sin \delta + \\ & + 2\alpha^2 \delta(7\alpha^2 - 4\alpha^3 - \alpha \delta^2 - 3\delta^2) \cos \delta.\end{aligned}$$

Бифуркационная кривая $\rho = \rho(\alpha, \delta)$ состоит из точек (α, δ) , в которых $\Delta = 0$. Численный анализ показывает, что в рассматриваемом случае таких точек нет.

Замечание. Контроль правильности вычислений определителей матриц граничных условий осуществляется предельным переходом от случая **A** при $\delta_1 \rightarrow 0$ либо от случая **B** при $\alpha \rightarrow \gamma$ с последующим исследованием этих определителей в предельных случаях.

B–C. Характеристическое уравнение имеет два отрицательных и положительный корень кратности два $(-\alpha, -2\gamma + \alpha, \gamma, \gamma)$, и соответствующее решение (3) записывается так:

$$w(x) = c_1 e^{-\alpha x} + c_2 e^{-(2\gamma - \alpha)x} + c_3 e^{\gamma x} + c_4 x e^{\gamma x}.$$

Возможные точки бифуркации определяются равенством нулю определителя

$$\begin{aligned}\Delta = & \gamma[\alpha^2(3\gamma^3 + 2\gamma^2(\alpha + 4) - \alpha\gamma(\alpha - 2) - 2\alpha^2)e^{-\alpha} + 2\gamma^3(\alpha - \gamma)e^{\gamma}]e^{\gamma} + \\ & + (2\gamma - \alpha)^2[2\alpha^2(\alpha - \gamma)e^{-\alpha} - \gamma(3\gamma^3 + 2\gamma^2(2 + \alpha) - \\ & - \alpha\gamma(\alpha - 6) + 2\alpha^2)e^{\gamma}]e^{-2\gamma + \alpha}.\end{aligned}$$

На множестве $\Omega = \{(\alpha, \gamma) \mid \alpha \in (\gamma, 2\gamma)\}$ прогиб отсутствует, так как $\Delta > 0$.

Таким образом, в работе установлено, что во всех возможных случаях распределения корней характеристического уравнения при граничных условиях (2) прогиб пластины не происходит.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (соглашение 14.B37.21.0373 от 14.11.2012).

This work was supported by Federal Target Program “Research and scientific-pedagogical personnel of innovative Russia in 2009-2013”, the agreement 14.B37.21.0373 on 14/11/2012.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ/ REFERENCES

1. В. В. Болотин, *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*, М.: Физматлит, 1961. 339 с.; V. V. Bolotin, *Non-conservative problems of the theory of elastic stability*, Oxford, Pergamon Press, 1963, 320 pp.
2. А. С. Вольмир, *Устойчивость деформируемых систем*, М.: Наука, 1967. 984 с. [A. S. Vol'mir, *Ustoychivost' deformiruyemykh sistem* [Stability of deformable systems], Moscow, Nauka, 1967, 984 pp. (In Russian)]
3. М. М. Вайнберг, В. А. Треногин, *Теория ветвления решений нелинейных уравнений*, М.: Наука, 1969. 524 с.; M. M. Vainberg, V. A. Trenogin, *The Theory of Branching of Solutions of Nonlinear Equations*, Groningen, Wolters-Noordhoff, 1974.

4. B. V. Loginov, T. E. Badokina, O. V. Makeeva, "Green functions construction for divergence problems in aero-elasticity", *ROMAI Jornal*, 2008, vol. 4, no. 2, pp. 33–44.
5. М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, М.: Наука, 1969. 528 с.; M. A. Naimark, *Linear differential operators*, V. 1, Elementary theory of linear differential operators, London, Toronto, Harapp, 1968; V. 2, Linear differential operators in Hilbert space, London, Toronto, Harapp, 1968.
6. Б. В. Логинов, О. В. Кожевникова, "Вычисление собственных изгибных форм и асимптотики разветвляющихся решений бифуркационной задачи о дивергенции пластины" // *Известия РАЕН*, 1998. Т. 2, № 3. С. 112–120. [B. V. Loginov, O. V. Kozhevnikova, "Computation of eigen-bending forms and branching solutions asymptotics for bifurcation problem on rectangular plate divergence", *Izvestiya RAEN*, 1998, vol. 2, no. 3, pp. 112–120. (In Russian)].
7. П. А. Вельмисов, Б. В. Логинов, "Метод групповых преобразователей и ветвление решений в двухточечных граничных задачах аэроупругости" / *Материалы Междунар. конф. "Дифференциальные уравнения и их приложения"* (Саранск, 20–22 декабря 1994 г.), Саранск, 1995. С. 120–125. [P. A. Vel'misov, B. V. Loginov, "Group transformation method and solutions branching in two-point boundary value problems of aeroelasticity", *Materialy Mezhdunar. konf. "Differentsial'nyye uravneniya i ikh prilozheniya"* [Materials of the International Conference "Differential Equations and their Applications"], Saransk, Mordovia Univ., 1995, pp. 120–125. (In Russian)].
8. П. А. Вельмисов, С. В. Киреев, А. О. Кузнецов, "Устойчивость пластины в сверхзвуковом потоке газа" // *Вестн. Ульяновск. гос. техн. ун-та. Сер. Естеств. науки*, 1999. № 1. С. 44–51. [P. A. Vel'misov, S. V. Kireyev, A. O. Kuznetsov, "Plate stability in supersonic gas flow", *Vestn. Ul'yanovsk. Gos. Tekh. Univ. Ser. Estestv. Nauki*, 1999, no. 1, pp. 44–51. (In Russian)].
9. B. V. Loginov, A. V. Tsyganov, O. V. Kozhevnikova, "Strip-plate divergence as bifurcational problem with two spectral parameters", *Proceedings of International Symposium on Trends in Applications of Mathematics to Mechanics* (Seeheim, Germany, August 22–28, 2004), Aachen, Shaker Verlag, 2005, pp. 235–246.
10. Т. Е. Бадюкина, Б. В. Логинов, Ю. Б. Русак, "Построение асимптотики решений нелинейной краевой задачи для дифференциального уравнения четвертого порядка с двумя бифуркационными параметрами" // *Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика*, 2012. Т. 5, № 1. С. 2–12. [T. E. Badokina, B. V. Loginov, Yu. B. Rusak, "Construction of the asymptotics of solutions of nonlinear boundary value problems for fourth order differential equation with two bifurcation parameters", *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Matematika*, 2012, vol. 5, no. 1, pp. 2–12. (In Russian)].
11. Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, М.: Наука, 1971. 576 с. [E. Kamke, *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nyim uravneniyam* [Handbook on Ordinary Differential Equations], Moscow, Nauka, 1971, 576 pp. (In Russian)]

Поступила в редакцию 03/IX/2013;
в окончательном варианте — 24/I/2014;
принята в печать — 21/II/2014.

MSC: 34B08, 58E07

**MODELS OF MULTIPARAMETER BIFURCATION PROBLEMS
FOR THE FOURTH ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL
EQUATIONS****T. E. Badokina**Ogarev Mordovia State University,
68, Bol'shevistskaya st., Saransk, 430005, Russian Federation.

We consider the problem of computing the bifurcating solutions of nonlinear eigenvalue problem for an ordinary differential equation of the fourth order, describing the divergence of the elongated plate in a supersonic gas flow, compressing (extending) by external boundary stresses on the example of the boundary conditions (the left edge is rigidly fixed, the right one is free). Calculations are based on the representation of the bifurcation parameter using the roots of the characteristic equation of the corresponding linearized operator. This representation allows one to investigate the problem in a precise statement and to find the critical bifurcation surfaces and curves in the neighborhood of which the asymptotics of branching solutions is being constructed in the form of convergent series in the small parameters. The greatest difficulties arise in the study of the linearized spectral problem. Its Fredholmness is proved by constructing the corresponding Green's function and for this type of problems it is performed for the first time.

Keywords: supersonic gas flow, buckling, aeroelasticity, bifurcation, branching equation.

Received 03/IX/2013;
received in revised form 24/I/2014;
accepted 21/II/2014.

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1258>

© 2014 Samara State Technical University.

Citation: T. E. Badokina, "Models of Multiparameter Bifurcation Problems for the Fourth Order Ordinary Differential Equations", *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 1(34), pp. 9–18. doi: [10.14498/vsgtu1258](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1258). (In Russian)

Author Details: *Tat'yana E. Badokina*, Assistant, Dept. of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics.

E-mail address: badokinate@gmail.com