УДК 517.956.326

# ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ВНУТРИ ОБЛАСТИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

***О. А. Репин***[1,2]***, С. К. Кумыкова***[3]

[1] Самарский государственный экономический университет,
Россия, 443090, Самара, ул. Советской Армии, 141.
[2] Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
[3] Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова
Россия, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173.

*Для вырождающегося гиперболического уравнения в характеристической области (двуугольнике) исследована внутреннекраевая задача с операторами дробного интегро-дифференцирования (в смысле Римана—Лиувилля), в которой значения решения уравнения на характеристиках поточечно связаны со значением решения и производной от него на линии вырождения уравнения. Модифицированным методом Трикоми при ограничениях в виде неравенств на известные функции доказана теорема единственности. Вопрос существования решения задачи редуцирован к разрешимости сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши нормального типа.*

**Ключевые слова:** *задача Коши, задача со смещением, операторы дробного интегро-дифференцирования, сингулярное уравнение с ядром Коши, регуляризатор, гипергеометрическая функция Гаусса, гамма-функция Эйлера.*

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим уравнение

$$|y|^m u_{xx} - u_{yy} + a|y|^{m/2-1} u_x = 0, \tag{1}$$

где $m = \mathrm{const} > 2$; $a \neq 0$ — действительная постоянная, $|a| \leqslant m/2$ в конечной области $\Omega$, ограниченной характеристиками

$$AC : x - \frac{2}{m+2} y^{(m+2)/2} = 0, \quad BC : x + \frac{2}{m+2} y^{(m+2)/2} = 1,$$
$$AD : x - \frac{2}{m+2} (-y)^{(m+2)/2} = 0, \quad BD : x + \frac{2}{m+2} (-y)^{(m+2)/2} = 1.$$

Пусть $\Omega_1 = \Omega \cap (y > 0)$, $\Omega_2 = \Omega \cap (y < 0)$, $I \equiv AB$ — единичный интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$; $\left(I^\alpha_{0+} f\right)(x)$, $\left(I^\alpha_{1-} f\right)(x)$, $\left(D^\alpha_{0+} f\right)(x)$, $\left(D^\alpha_{1-} f\right)(x)$ — операторы дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана—Лиувилля [1, с. 42–43]; $\Theta^i_0(x)$, $\Theta^i_1(x)$ — точки пересечения характеристик уравнения

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1280


**Образец цитирования:** О. А. Репин, С. К. Кумыкова, “Задача со смещением для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 1 (34). С. 37–47. doi: 10.14498/vsgtu1280.

**Сведения об авторах:** *Олег Александрович Репин* (д.ф.-м.н., проф.), заведующий кафедрой, каф. математической статистики и эконометрики[1]; профессор, каф. прикладной математики и информатики[2]. *Светлана Каншубиевна Кумыкова* (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. теории функций и функционального анализа.

**E-mail addresses:** matstat@mail.ru (O.A. Repin, *Corresponding author*), bsk@rect.kbsu.ru (S.K. Kumykova)

(1), выходящих из точки $(x,0) \in I$, с характеристиками $AC$, $BC$, $AD$, $BD$ соответственно, $i = 1, 2$.

Задача. *Найти решение $u(x,y)$ уравнения (1) со свойствами*

1) $u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega_1 \cup I) \cap C^1(\Omega_2 \cup I) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$;
2) $u(x,+0) = u(x,-0), x \in \overline{I}$;
$\lim\limits_{y\to+0} u_y(x,y) = \mu(x) \lim\limits_{y\to-0} u_y(x,y) + \lambda(x)$, $x \in I$;
3) $A_i(x) I_{0+}^{p_i} \delta_i(x) u[\Theta_0^i(x)] + B_i(x) I_{1-}^{q_i} w_i(x) u[\Theta_1^i(x)] +$
$+ C_i(x) u_{i\,y}(x,0) + D_i(x) u_i(x,0) = \gamma_i(x), \quad i = 1, 2, x \in I$,
*где* $A_i(x)$, $B_i(x)$, $C_i(x)$, $D_i(x)$ $\gamma_i(x)$, $\delta_i(x)$, $w_i(x)$, $\mu(x)$, $\lambda(x)$ — *заданные функции такие, что*

$$
\begin{array}{l}
A_i^2(x) + B_i^2(x) + C_i^2(x) + D_i^2(x) \neq 0, \\
A_i(x), B_i(x), C_i(x), D_i(x), \gamma_i(x) \in C^1(\overline{I}) \cap C^3(I), \quad \mu(x), \lambda(x) \in C^1(I), \\
p_i, q_i \text{ — действительные постоянные, причём } 0 < p_i,\ q_i < 1.
\end{array}
\tag{2}
$$

Отметим, что рассматриваемая задача относится к классу краевых задач со смещением [2] (по терминологии А. М. Нахушева).

**2. Единственность решения задачи.**

Теорема. *В области $\Omega$ не может существовать более одного решения задачи, если*

$$
\begin{array}{llll}
\mu(x) = 1, & \lambda(x) = 0, & p_1 = p_2 = \alpha, & q_1 = q_2 = \beta, \\
\delta_1(x) = \delta_2(x) = x^{\alpha+\beta-1}, & \multicolumn{3}{l}{w_1(x) = w_2(x) = (1-x)^{\alpha+\beta-1};}
\end{array}
\tag{3}
$$

$$
E_i(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)} (1-x)^{1-\alpha} A_i(x) + \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)} x^{1-\beta} B_i(x) + \\
+ x^{1-\beta}(1-x)^{1-\alpha} D_i(x) \neq 0, \quad i = 1, 2,\ x \in \overline{I} \tag{4}
$$

*и выполняются неравенства*

$$
\Big[\frac{A_1(x)}{E_1(x)}(1-x)^{1-\alpha}\Big]' \leqslant 0,\ \Big[\frac{B_1(x)}{E_1(x)} x^{1-\beta}\Big]' \geqslant 0,\ \frac{C_1(x)}{E_1(x)} x^{1-\beta}(1-x)^{1-\alpha} \leqslant 0, \tag{5}
$$
$$
\Big[\frac{A_2(x)}{E_2(x)}(1-x)^{1-\alpha}\Big]' \geqslant 0,\ \Big[\frac{B_2(x)}{E_2(x)} x^{1-\beta}\Big]' \leqslant 0,\ \frac{C_2(x)}{E_2(x)} x^{1-\beta}(1-x)^{1-\alpha} \geqslant 0,\ x \in \overline{I},
$$

*либо*

$$
\begin{array}{l}
\mu(x) > 0, \quad \lambda(x) = 0, \quad p_1 = p_2 = 1-\beta, \\
q_1 = q_2 = 1-\alpha, \quad \delta(x) = w(x) = 1;
\end{array}
\tag{6}
$$

$$
\widetilde{E}_i(x) = \frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)} \Big(\frac{m+2}{4}\Big)^{2/(m+2)} (1-x)^{\beta} A_i(x) + \\
+ \frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} \Big(\frac{m+2}{4}\Big)^{2/(m+2)} x^{\alpha} B_i(x) + \\
+ x^{\alpha}(1-x)^{\beta} C_i(x) \neq 0, \quad i = 1, 2,\ x \in \overline{I} \tag{7}
$$

*и выполняются неравенства*

$$\frac{A_1(x)}{\widetilde{E}_1(x)}(1-x)^\beta < 0, \ \frac{B_1(x)}{\widetilde{E}_1(x)}x^\alpha < 0, \ \frac{D_1(x)}{\widetilde{E}_1(x)}x^\alpha(1-x)^\beta < 0, \tag{8}$$

$$\frac{A_2(x)}{\widetilde{E}_2(x)}(1-x)^\beta > 0, \ \frac{B_2(x)}{\widetilde{E}_2(x)}x^\alpha > 0, \ \frac{D_2(x)}{\widetilde{E}_2(x)}x^\alpha(1-x)^\beta > 0, \quad x \in \overline{I}, \tag{9}$$

*либо*

$$p_1 = \alpha, \quad p_2 = 1-\beta, \quad q_1 = \beta, \quad q_2 = 1-\alpha, \quad \delta(x) = w(x) = 1; \tag{10}$$

*выполняются условия* (4), (5) *в области* $\Omega_1$, *а в области* $\Omega_2$ *справедливы условия* (7), (9), *где*

$$\alpha = \frac{m-2a}{2(m+2)}, \quad \beta = \frac{m+2a}{2(m+2)}.$$

*Доказательство.* Переходя к доказательству единственности решения задачи, положим

$$\tau(x) = u(x,0), \quad \nu_1(x) = \lim_{y\to 0+0} u_y(x,y), \quad \nu_2(x) = \lim_{y\to 0-0} u_y(x,y).$$

Пусть выполняются условия (3), (4) теоремы.

Используя формулу решения задачи Коши для уравнения (1) в областях $\Omega_1$, $\Omega_2$ [3, с. 13–14] и удовлетворяя краевым условиям 3), получим соотношения между $\tau(x)$ и $\nu_i(x)$, принесённые на $I$ из $\Omega_1$ и $\Omega_2$ соответственно:

$$\tau(x) = \overline{A}_i(x) I_{0+}^{1-\alpha-\beta}\nu_i(x) + \overline{B}_i(x) I_{1-}^{1-\alpha-\beta}\nu_i(x) + \overline{C}_i(x)\nu_i(x) + \overline{\gamma}_i(x), \tag{11}$$

где

$$\overline{A}_i(x) = -\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)}\Big(\frac{m+2}{4}\Big)^{2/(m+2)}\frac{A_i(x)}{E_i(x)}\,(1-x)^{1-\alpha},$$

$$\overline{B}_i(x) = -\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)}\Big(\frac{m+2}{4}\Big)^{2/(m+2)}\frac{B_i(x)}{E_i(x)}\,x^{1-\beta},$$

$$\overline{C}_i(x) = -\frac{C_i(x)}{E_i(x)}\,x^{1-\beta}(1-x)^{1-\alpha},$$

$$\overline{\gamma}_i(x) = \frac{\gamma_i(x)}{E_i(x)}\,x^{1-\beta}(1-x)^{1-\alpha}, \quad i = 1, 2.$$

После преобразований, аналогичных [4, 5], получим, что

$$\int_0^1 \tau(x)\nu_i(x)dx = 0.$$

Затем нетрудно доказать равенство $\nu_i(x) = 0$ (см., например, [4]). Тогда из (11) при $\widetilde{\gamma}_i(x) = 0$ имеем $\tau(x) = 0$. Следовательно, $u_i(x,y) \equiv 0$ как решения задачи Коши с нулевыми данными в областях $\Omega_1$, $\Omega_2$, что и завершает доказательство единственности решения исследуемой задачи для уравнения (1).

Если выполняются условия (6), (7) теоремы, то соотношения между $\tau(x)$ и $\nu_i(x)$ имеют вид

$$\nu_i(x) = \widetilde{A}_i(x) D_{0+}^{1-\alpha-\beta}\tau(x) + \widetilde{B}_i(x) D_{1-}^{1-\alpha-\beta}\tau(x) + \widetilde{D}_i(x)\tau(x) + \widetilde{\gamma}_i(x), \tag{12}$$

где

$$\widetilde{A}_i(x) = -\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)}\frac{A_i(x)}{\widetilde{E}_i(x)}(1-x)^{\beta}, \quad \widetilde{B}_i(x) = -\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)}\frac{B_i(x)}{\widetilde{E}_i(x)}x^{\alpha},$$
$$\widetilde{D}_i(x) = -\frac{D_i(x)}{\widetilde{E}_i(x)}x^{\alpha}(1-x)^{\beta}, \quad \widetilde{\gamma}_i(x) = \frac{\gamma_i(x)}{\widetilde{E}_i(x)}x^{\alpha}(1-x)^{\beta}, \quad i = 1, 2.$$

В силу принципа экстремума для гиперболических уравнений положительный максимум (отрицательный минимум) функции $u(x, y)$ в $\overline{\Omega}_1$, $\overline{\Omega}_2$ достигается на $\overline{I}$. Пусть положительный максимум функции $u(x, y)$ достигается в точке $(x_0, 0) \in I$.

Пользуясь тем, что дробные производные $D_{0+}^{1-\alpha-\beta}\tau(x)$, $D_{1-}^{1-\alpha-\beta}\tau(x)$ в точке положительного максимума строго положительны (в точке отрицательного минимума строго отрицательны) [2, с. 82–83], получаем при выполнении условий (8), (9) $\nu_1(x_0) > 0$, $\nu_2(x_0) < 0$.

Это противоречит условию сопряжения 2) при $\mu(x) > 0$, $\lambda(x) = 0$, откуда и следует справедливость теоремы единственности решения рассматриваемой задачи для уравнения (1). $\square$

**3. Существование решения задачи.** *Доказательство* существования решения задачи проведём для трёх случаев.

Случай 1. Пусть в областях $\Omega_1$ и $\Omega_2$ выполняются условия (3) и

$$C_2(x)E_1(x) - C_1(x)E_2(x) = 0.$$

Полагая $\nu_1(x) = \nu_2(x) = \nu(x)$ и удовлетворяя (11), требованию сопряжения 2), получим

$$A(x) I_{0+}^{1-\alpha-\beta}\nu(x) + B(x) I_{1-}^{1-\alpha-\beta}\nu(x) = F(x), \tag{13}$$

где

$$A(x) = \overline{A}_1(x) - \overline{A}_2(x), \quad B(x) = \overline{B}_1(x) - \overline{B}_2(x), \quad F(x) = \overline{\gamma}_2(x) - \overline{\gamma}_1(x).$$

Здесь $m > 2$, $0 < \alpha$, $\beta < 1$, $\alpha + \beta = m/(m+2)$.

Разделим обе части (13) на $A(x) \neq 0$, а затем к обеим частям получившегося соотношения применим оператор $D_{0+}^{1-\alpha-\beta}$.

В результате будем иметь

$$\nu(x) + D_{0+}^{1-\alpha-\beta} M(x) I_{1-}^{1-\alpha-\beta}\nu(x) = D_{0+}^{1-\alpha-\beta}\left[\frac{F(x)}{A(x)}\right], \tag{14}$$

где $M(x) = B(x)/A(x)$.

Используя методику и результаты работы [6], а также монографии [7, с. 81–89], можно записать

$$I_1(x) = D_{0+}^{1-\alpha-\beta} M(x) I_{1-}^{1-\alpha-\beta} \nu(x)$$

в виде

$$I_1(x) = \cos[\pi(\alpha+\beta)] M(x)\nu(x) + \mu \int_0^x K_1(x,\xi)\nu(\xi)d\xi + \mu \int_x^1 K_2(x,\xi)\nu(\xi)d\xi,$$

где

$$\mu = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(1-\alpha-\beta)} = \frac{\sin[\pi(\alpha+\beta)]}{\pi},$$
$$K_1(x,\xi) = \frac{d}{dx}\int_0^\xi \frac{M(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha-\beta}(\xi-t)^{\alpha+\beta}},$$
$$K_2(x,\xi) = \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{M(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha-\beta}(\xi-t)^{\alpha+\beta}}.$$

Исследуем поведение ядер $K_1(x,\xi)$ и $K_2(x,\xi)$. Имеем

$$K_1(x,\xi) = M(\xi)\frac{d}{dx}\int_0^\xi \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha-\beta}(\xi-t)^{\alpha+\beta}} - \\ - \frac{d}{dx}\int_0^\xi \frac{[M(\xi)-M(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha-\beta}(\xi-t)^{\alpha+\beta}}.$$

Гладкость ядра $K_1(x,\xi)$ определяется гладкостью первого интеграла

$$I_2(x,\xi) = M(\xi)\frac{d}{dx}\int_0^\xi \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha-\beta}(\xi-t)^{\alpha+\beta}} = \\ = \frac{M(\xi)}{1-\alpha-\beta}\frac{d}{dx}\Big[\Big(\frac{\xi}{x}\Big)^{1-\alpha-\beta} F\Big(1-\alpha-\beta, 1; 2-\alpha-\beta; \frac{\xi}{x}\Big)\Big] = \\ = -\Big(\frac{\xi}{x}\Big)^{1-\alpha-\beta}\frac{M(\xi)}{x-\xi},$$

где $F(a,b;c;z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса [1, с. 31].

Аналогично

$$K_2(x,\xi) = M(\xi)\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha-\beta}(\xi-t)^{\alpha+\beta}} - \\ - \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{[M(\xi)-M(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha-\beta}(\xi-t)^{\alpha+\beta}},$$

$$I_3(x,\xi) = M(\xi)\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha-\beta}(\xi-t)^{\alpha+\beta}} =$$

$$= \frac{M(\xi)}{\alpha+\beta} \frac{d}{dx} \Big[ \Big(\frac{x}{\xi}\Big)^{\alpha+\beta} F\Big(\alpha+\beta, 1; 1+\alpha+\beta; \frac{x}{\xi}\Big) \Big] = \Big(\frac{\xi}{x}\Big)^{1-\alpha-\beta} \frac{M(\xi)}{\xi - x}.$$

Тогда уравнение (14) примет вид

$$A^*(x)\nu(x) + \int_0^1 \frac{K^*(x,\xi)\nu(\xi)d\xi}{\xi - x} = F^*(x), \tag{15}$$

где

$$A^*(x) = 1 + \cos[\pi(\alpha+\beta)]M(x),$$
$$K^*(x,\xi) = \begin{cases} \mu K_1(x,\xi)(x-\xi), & \xi \leqslant x, \\ \mu K_2(x,\xi)(\xi - x), & \xi \geqslant x, \end{cases}$$
$$F^*(x) = D_{0+}^{1-\alpha-\beta} \left[ \frac{F(x)}{A(x)} \right].$$

Из установленных свойств ядер $K_1(x,\xi)$ и $K_2(x,\xi)$ заключаем, что ядро $K^*(x,\xi)$ дважды непрерывно дифференцируемо в квадрате $0 < x$, $\xi < 1$ при $\xi \neq x$ и допускает оценку

$$K^*(x,\xi) = \mathsf{O}(1)(\xi - x)^{-1},$$

где $\mathsf{O}(1)$ означает ограниченную в $\overline{I} \times \overline{I}$ величину.

В силу условий (2) и свойств дробных производных можно заключить, что $F^*(x) \in C^1(I)$.

Таким образом, уравнение (15) при $A^*(x) \neq 0$ есть сингулярное интегральное уравнение [8, с. 157] с ядром Коши.

Условие

$$[A^*(x)]^2 + \pi^2 [K^*(x)]^2 \neq 0$$

гарантирует существование регуляризатора, приводящего уравнение (15) к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Отсюда и из единственности искомого решения следует существование решения исследуемой задачи.

Случай 2. Пусть в областях $\Omega_1$ и $\Omega_2$ выполняются требования (6), (7). Тогда на основании условия сопряжения 2) и соотношений (12) имеем

$$D_{0+}^{1-\alpha-\beta}\tau(x) + N(x) D_{1-}^{1-\alpha-\beta}\tau(x) + P(x)\tau(x) = Q(x),$$

где

$$N(x) = \frac{\widetilde{B}_1(x) - \mu(x)\widetilde{B}_2(x)}{\widetilde{A}_1(x) - \mu(x)\widetilde{A}_2(x)}, \quad P(x) = \frac{\widetilde{D}_1(x) - \mu(x)\widetilde{D}_2(x)}{\widetilde{A}_1(x) - \mu(x)\widetilde{A}_2(x)},$$
$$Q(x) = \frac{\mu(x)\widetilde{\gamma}_2(x) + \lambda(x) - \widetilde{\gamma}_1(x)}{\widetilde{A}_1(x) - \mu(x)\widetilde{A}_2(x)}, \quad \widetilde{A}_1(x) - \mu(x)\widetilde{A}_2(x) \neq 0.$$

Действуя на обе части оператором $I_{0+}^{1-\alpha-\beta}$ и используя результаты [4, с. 98–103], после преобразований получим

$$\overline{A}^{\,*}(x)\tau(x) + \int_0^1 \frac{\overline{K}^{\,*}(x,\xi)\tau(\xi)d\xi}{\xi - x} = \overline{F}^{\,*}(x),$$

где

$$\overline{A}^{\,*}(x) = 1 + \pi\,\mathrm{ctg}[\pi(\alpha+\beta)]N(x), \quad \overline{F}^{\,*}(x) = I_{0+}^{1-\alpha-\beta}Q(x),$$

$$\overline{K}^{\,*}(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\sin[\pi(\alpha+\beta)]}{\pi}[K_5(x,\xi) - K_3(x,\xi)](x-\xi) + \\ \qquad + \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha-\beta)}P(\xi)(x-\xi)^{1-\alpha-\beta} & \text{при} \quad x \geqslant \xi, \\ \dfrac{\sin[\pi(\alpha+\beta)]}{\pi}[K_6(x,\xi) - K_4(x,\xi)](\xi - x) & \text{при} \quad x \leqslant \xi, \end{cases}$$

$$K_3(x,\xi) = \int_0^{\xi} \frac{N'(t)dt}{(x-t)^{\alpha+\beta}(\xi-t)^{1-\alpha-\beta}},$$

$$K_4(x,\xi) = \int_0^{x} \frac{N'(t)dt}{(x-t)^{\alpha+\beta}(\xi-t)^{1-\alpha-\beta}},$$

$$K_5(x,\xi) = \frac{d}{dx}\int_0^{\xi} \frac{N(t)dt}{(x-t)^{\alpha+\beta}(\xi-t)^{1-\alpha-\beta}},$$

$$K_6(x,\xi) = \frac{d}{dx}\int_0^{x} \frac{N(t)dt}{(x-t)^{\alpha+\beta}(\xi-t)^{1-\alpha-\beta}}.$$

Теперь достаточно повторить аргументацию доказательства существования решения задачи первого случая.

Случай 3. Пусть в области $\Omega_1$ выполняется условие (3), а в области $\Omega_2$ — условие (10). Краткости ради положим $C_1(x) = 0$, $\mu(x) = 1$, $\lambda(x) = 0$.

Учитывая условия сопряжения 2), соотношение (11) при $i = 1$ и соотношение (12) при $i = 2$, получим уравнение

$$\begin{aligned} \tau(x) &- \overline{A}_1(x)I_{0+}^{1-\alpha-\beta}\widetilde{A}_2(x)D_{0+}^{1-\alpha-\beta}\tau(x) - \overline{A}_1(x)I_{0+}^{1-\alpha-\beta}\widetilde{B}_2(x)D_{1-}^{1-\alpha-\beta}\tau(x) - \\ &- \overline{B}_1(x)I_{1-}^{1-\alpha-\beta}\widetilde{A}_2(x)D_{0+}^{1-\alpha-\beta}\tau(x) - \overline{B}_1(x)I_{1-}^{1-\alpha-\beta}\widetilde{B}_2(x)D_{1-}^{1-\alpha-\beta}\tau(x) - \\ &- \overline{A}_1(x)I_{0+}^{1-\alpha-\beta}\widetilde{D}_2(x)\tau(x) - \overline{B}_1(x)I_{1-}^{1-\alpha-\beta}\widetilde{D}_2(x)\tau(x) = \\ &= \overline{A}_1(x)I_{0+}^{1-\alpha-\beta}\widetilde{\gamma}_2(x) + \overline{B}_1(x)I_{1-}^{1-\alpha-\beta}\widetilde{\gamma}_2(x) + \overline{\gamma}_1(x). \end{aligned} \tag{16}$$

Преобразуем уравнение (16). Рассмотрим вначале второе слагаемое (без учёта внешнего коэффициента $-\overline{A}_1(x)$):

$$I_{11}(x) = I_{0+}^{1-\alpha-\beta}\widetilde{B}_2(x)D_{1-}^{1-\alpha-\beta}\tau(x).$$

Вычисления, проведённые для второго случая, дают возможность записать $I_{11}(x)$ в виде

$$\begin{aligned} I_{11}(x) = \pi\,\mathrm{ctg}[\pi(\alpha+\beta)]\widetilde{B}_2(x)\tau(x) + \\ + \frac{\sin[\pi(\alpha+\beta)]}{\pi}\int_0^x [K_7(x,\xi) - K_8(x,\xi)]\tau(\xi)d\xi + \\ + \frac{\sin[\pi(\alpha+\beta)]}{\pi}\int_x^1 [K_9(x,\xi) - K_{10}(x,\xi)]\tau(\xi)d\xi, \end{aligned}$$

где ядра $K_7(x,\xi)$, ..., $K_{10}(x,\xi)$ имеют такой же вид, что и ядра $K_3(x,\xi)$, ..., $K_6(x,\xi)$, только функцию $N(t)$ надо заменить функцией $\widetilde{B}_2(t)$.

Рассмотрим

$$I_{12}(x) = I_{0+}^{1-\alpha-\beta}\widetilde{A}_2(x)D_{0+}^{1-\alpha-\beta}\tau(x) = \\ = \frac{\sin[\pi(\alpha+\beta)]}{\pi}\int_0^x \frac{\widetilde{A}_2(t)dt}{(x-t)^{\alpha+\beta}}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\tau(\xi)d\xi}{(t-\xi)^{1-\alpha-\beta}}.$$

В силу равенства

$$I_{13}(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\widetilde{A}_2(t)dt}{(x-t)^{\alpha+\beta}}\int_0^t \frac{\tau(\xi)d\xi}{(t-\xi)^{1-\alpha-\beta}} = \\ = \int_0^x \frac{\widetilde{A}_2(t)dt}{(x-t)^{\alpha+\beta}}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\tau(\xi)d\xi}{(t-\xi)^{1-\alpha-\beta}} + \int_0^x \frac{\widetilde{A}_2'(t)dt}{(x-t)^{\alpha+\beta}}\int_0^t \frac{\tau(\xi)d\xi}{(t-\xi)^{1-\alpha-\beta}}$$

имеем (после перемены порядка интегрирования)

$$I_{12}(x) = \frac{\sin[\pi(\alpha+\beta)]}{\pi}\int_0^x K_{11}(x,\xi)\tau(\xi)d\xi,$$

где

$$K_{11}(x,\xi) = \frac{d}{dx}\int_\xi^x \frac{\widetilde{A}_2(t)dt}{(x-t)^{\alpha+\beta}(t-\xi)^{1-\alpha-\beta}} - \int_\xi^x \frac{\widetilde{A}_2(t)dt}{(x-t)^{\alpha+\beta}(t-\xi)^{1-\alpha-\beta}}.$$

Очевидно, что поведение ядра $K_{11}(x,\xi)$ аналогично поведению в смысле гладкости интегралов

$$I_{14}^{(1)}(x) = \widetilde{A}_2(x)\frac{d}{dx}\int_\xi^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha+\beta}(t-\xi)^{1-\alpha-\beta}} = \\ = \widetilde{A}_2(x)\frac{d}{dx}B(\alpha+\beta, 1-\alpha-\beta) = 0,$$

и

$$I_{14}^{(2)}(x) = A_2'(x)B(1+\beta, 1-\alpha-\beta),$$

где $B(a,b)$ — бета-функция [1, с. 31].

Рассмотрим

$$I_{15}(x,\xi) = I_{1-}^{1-\alpha-\beta}\widetilde{A}_2(x)D_{0+}^{1-\alpha-\beta}\tau(x) = \\ = \frac{\sin[\pi(\alpha+\beta)]}{\pi}\int_x^1 \frac{\widetilde{A}_2(t)dt}{(t-x)^{\alpha+\beta}}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\tau(\xi)d\xi}{(t-\xi)^{1-\alpha-\beta}}.$$

Проводя необходимые вычисления, получим

$$I_{15}(x,\xi) = \frac{\sin[\pi(\alpha+\beta)]}{\pi}\left[\int_0^x K_{12}(x,\xi)\tau(\xi)d\xi + \int_x^1 K_{13}(x,\xi)\tau(\xi)d\xi\right],$$

где

$$K_{12}(x,\xi) = \frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{\widetilde{A}_2(t)dt}{(t-x)^{\alpha+\beta}(t-\xi)^{1-\alpha-\beta}} - \\ - \int_x^1 \frac{\widetilde{A}_2(t)dt}{(t-x)^{\alpha+\beta}(t-\xi)^{1-\alpha-\beta}} + \frac{\widetilde{A}_2(1)}{(1-x)^{\alpha+\beta}(1-\xi)^{1-\alpha-\beta}},$$

$$K_{13}(x,\xi) = \frac{d}{dx}\int_\xi^1 \frac{\widetilde{A}_2(t)dt}{(t-x)^{\alpha+\beta}(t-\xi)^{1-\alpha-\beta}} - \\ - \int_\xi^1 \frac{\widetilde{A}_2'(t)dt}{(t-x)^{\alpha+\beta}(t-\xi)^{1-\alpha-\beta}} + \frac{\widetilde{A}_2(1)}{(1-x)^{\alpha+\beta}(1-\xi)^{1-\alpha-\beta}}.$$

Гладкость $K_{12}(x,\xi)$ и $K_{13}(x,\xi)$ будет определяться соответственно гладкостью

$$I_{16}(x,\xi) = \frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{dt}{(t-x)^{\alpha+\beta}(t-\xi)^{1-\alpha-\beta}} = \left(\frac{1-\xi}{1-x}\right)^{\alpha+\beta}\frac{1}{\xi-x};$$

$$I_{17}(x,\xi) = \frac{d}{dx}\int_\xi^1 \frac{dt}{(t-x)^{\alpha+\beta}(t-\xi)^{1-\alpha-\beta}} = \left(\frac{1-\xi}{1-x}\right)^{\alpha+\beta}\frac{1}{\xi-x}.$$

Преобразуем интеграл

$$I_{18}(x,\xi) = I_{1-}^{1-\alpha-\beta}\widetilde{B}_2(x)D_{1-}^{1-\alpha-\beta}\tau(x) = \\ = -\frac{\sin[\pi(\alpha+\beta)]}{\pi}\int_x^1 \frac{\widetilde{B}_2(t)dt}{(t-x)^{\alpha+\beta}}\,\frac{d}{dt}\int_t^1 \frac{\tau(\xi)d\xi}{(\xi-t)^{1-\alpha-\beta}} = \\ = \frac{\sin[\pi(\alpha+\beta)]}{\pi}\int_x^1 K_{14}(x,\xi)\tau(\xi)d\xi,$$

где

$$K_{14}(x,\xi) = \frac{d}{dx}\int_x^\xi \frac{\widetilde{B}_2(t)dt}{(t-x)^{\alpha+\beta}(\xi-t)^{1-\alpha-\beta}} + \int_x^\xi \frac{\widetilde{B}_2'(t)dt}{(t-x)^{\alpha+\beta}(\xi-t)^{1-\alpha-\beta}}.$$

Гладкость ядра $K_{14}(x,\xi)$ будет определяться гладкостью

$$I_{19} = \frac{d}{dx}\int_x^\xi \frac{dt}{(t-x)^{\alpha+\beta}(\xi-t)^{1-\alpha-\beta}} = \frac{d}{dx}B(1-\alpha-\beta,\alpha+\beta) = 0.$$

Следовательно, ядро $K_{14}(x,\xi)$ особенностей не имеет и его гладкость будут определять функции $\widetilde{B}_2(x)$ и $\widetilde{B}_2'(x)$.

Теперь уравнению (16) можно придать вид

$$\mu(x)\tau(x) + \int_0^1 \frac{K^{**}(x,\xi)\tau(\xi)d\xi}{\xi-x} = F_1^*(x), \tag{17}$$

где

$$\mu(x) = 1 - \overline{A}_1(x) \cdot \widetilde{B}_2(x)\pi \operatorname{ctg}[\pi(\alpha+\beta)],$$

$$K^{**}(x,\xi) = \begin{cases} \Big[\dfrac{\sin[\pi(\alpha+\beta)]}{\pi}\big(K_{11}(x,\xi)\overline{A}_1(x) - K_7(x,\xi) - K_8(x,\xi) - \\ \qquad -B_1(x)K_2(x,\xi)\big) - \dfrac{\overline{A}_1(x)\widetilde{D}_2(\xi)}{\Gamma(1-\alpha-\beta)}\Big](x-\xi) \quad \text{при} \quad x \geqslant \xi, \\ \Big[\dfrac{\sin[\pi(\alpha+\beta)]}{\pi}\overline{B}_1(x)\big(K_{13}(x,\xi) - K_{14}(x,\xi)\big) - \\ \qquad -\dfrac{\overline{B}_1(x)\widetilde{D}_2(\xi)}{\Gamma(1-\alpha-\beta)}\Big](\xi - x) \quad \text{при} \quad \xi \geqslant x, \end{cases}$$

$$F_1^*(x) = \overline{A}_1(x) I_{0+}^{1-\alpha-\beta}\widetilde{\gamma}_2(x) + \overline{B}_1(x) I_{1-}^{1-\alpha-\beta}\widetilde{\gamma}_2(x) + \overline{\gamma}_1(x).$$

Условие нормальной разрешимости уравнения (17) имеет вид

$$\mu^2(x) + \pi^2[K^{**}(x,x)]^2 \neq 0.$$

Проведённые вычисления дают возможность провести далее доказательство существования решения задачи аналогично первому случаю, что затруднений не вызывает.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ/ REFERENCES


1. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Минск: Наука и техника, 1987. 688 с. [S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Maritchev, *Integraly i proizvodnyye drobnogo poryadka i nekotoryye ikh prilozheniya* [Integrals and Derivatives of the Fractional Order and Some of their Applications], Minsk, Nauka i Tekhnika, 1987, 688 pp. (In Russian)]
2. А. М. Нахушев, *Задачи со смещением для уравнений в частных производных*, М.: Наука, 2006. 287 с. [A. M. Nakhushev, *Zadachi so smeshcheniyem dlya uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Problems with shifts for partial differential equations], Moscow, Nauka, 2006, 287 pp. (In Russian)]
3. М. М. Смирнов, *Вырождающиеся гиперболические уравнения*, Минск: Высшая школа, 1977. 158 с. [M. M. Smirnov, *Vyrozhdayushchiyesya giperbolicheskiye uravneniya* [Degenerate Hyperbolic Equations], Minsk, Vysshaya Shkola, 1977, 158 pp.]
4. С. К. Кумыкова, “Краевая задача со смещением для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения” // *Дифференц. уравнения*, 1980. Т. 16, № 1. С. 93–104; S. K. Kumykova, “Boundary-value problem with translation for a hyperbolic equation degenerate in the interior of a region”, *Differ. Equations*, 1980, vol. 16, no. 1, pp. 68–76.
5. О. А. Репин, С. К. Кумыкова, “Нелокальная задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с обобщенными операторами дробного интегро-дифференцирования произвольного порядка” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 4(25). С. 25–36. doi: 10.14498/vsgtu1014. [O. A. Repin, S. K. Kumykova, “Nonlocal problem for a equation of mixed type of third order with generalized operators of fractional integro-differentiation of arbitrary order”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2011, no. 4(25), pp. 25–36. (In Russian)].
6. С. К. Кумыкова, Ф. Б. Нахушева, “Об одной краевой задаче для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области” // *Дифференц. уравнения*, 1978. Т. 14, № 1. С. 50–65; S. K. Kumykova, F. B. Nakhusheva, “A boundary-value problem for a hyperbolic equation degenerate in the interior of a region”, *Differ. Equations*, 1978, vol. 14, no. 1, pp. 35–46.

7. О. А. Репин, *Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов*, Самара: Саратов. гос. ун-т, Самарский филиал, 1992. 164 с. [O. A. Repin, *Krayevyye zadachi so smeshcheniyem dlya uravneniy giperbolicheskogo i smeshannogo tipov* [Boundary value problems with shift for equations of hyperbolic and mixed type], Samara, Saratov State Univ., Samara Branch, 1992, 164 pp. (In Russian)]
8. Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения*, М.: Наука, 1968. 512 с. [N. I. Muskhelishvili, *Singulyarnyye integral'nyye uravneniya* [Singular Integral Equations], Moscow, Nauka, 1968, 512 pp. (In Russian)]

Поступила в редакцию 04/XII/2013;
в окончательном варианте — 11/II/2014;
принята в печать — 26/II/2014.

**MSC: 35L80; 35L20, 35C15**

## A BOUNDARY-VALUE PROBLEM WITH SHIFT FOR A HYPERBOLIC EQUATION DEGENERATE IN THE INTERIOR OF A REGION

***O. A. Repin***[1,2]***, S. K. Kumykova***[3]

[1] Samara State Economic University,
141, Sovetskoy Armii st., Samara, 443090, Russian Federation.
[2] Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.
[3] Kabardino-Balkarian State University,
173, Chernyshevskogo st., Nalchik, 360004, Russian Federation.

*For a degenerate hyperbolic equation in characteristic region (lune) a boundary-value problem with operators of fractional integro-differentiation is studied. The solution of this equation on the characteristics is related point-to-point to the solution and its derivative on the degeneration line. The uniqueness theorem is proved by the modified Tricomi method with inequality-type constraints on the known functions. Question of the problem solution's existence is reduced to the solvability of a singular integral equation with Cauchy kernel of the normal type.*

**Keywords:** *Cauchy problem, boundary-value problem with shift, fractional integro-differentiation operators, singular equation with Cauchy kernel, regularizer, Gauss hypergeometric function, Euler gamma function.*

Received 04/XII/2013;
received in revised form 11/II/2014;
accepted 26/II/2014.

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1280


**Citation:** O. A. Repin, S. K. Kumykova, "A Boundary-value Problem with Shift for a Hyperbolic Equation Degenerate in the Interior of a Region", *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 1 (34), pp. 37–47. doi: 10.14498/vsgtu1280. (In Russian)

**Authors Details:** *Oleg A. Repin* (Dr. Phys. & Math. Sci.), Head of Dept., Dept. of Mathematical Statistics and Econometrics[1]; Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science[2].
*Svetlana K. Kumykova* (Cand. Phys. & Math. Sci.), Associate Professor, Dept. of Function Theory.

**E-mail addresses:** matstat@mail.ru (O.A. Repin, *Corresponding author*),
bsk@rect.kbsu.ru (S.K. Kumykova)