Алгебра

УДК 512.572

О ТОЖДЕСТВАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В АЛГЕБРАХ ЛЕЙБНИЦА—ПУАССОНА

***С. М. Рацеев*[1], *О. И. Череватенко*[2]**

[1] Ульяновский государственный университет,
Россия, 432017, Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42.
[2] Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова,
Россия, 432063, Ульяновск, пл. 100-летия со дня рождения В. И. Ленина, 4.

Исследуются полиномиальные алгебры Лейбница—Пуассона. Рассматриваются тождества специального вида в данных алгебрах. Показано, что последовательность коразмерностей $\{r_n(\mathbf{V})\}_{n\geqslant 1}$ любого пространства специального вида многообразия алгебр Лейбница—Пуассона $\mathbf{V}$ над произвольным полем либо ограничена полиномом, либо не ниже показательной функции. При этом, если данная последовательность ограничена полиномом, то найдется такой многочлен $R(x)$ с рациональными коэффициентами, что $r_n(\mathbf{V}) = R(n)$ для всех достаточно больших n. Из данного результата следует, что не существует многообразий алгебр Лейбница—Пуассона $\mathbf{V}$, для которых последовательность $\{r_n(\mathbf{V})\}_{n\geqslant 1}$ имела бы промежуточный рост между полиномиальным и экспоненциальным. Приводятся нижняя и верхняя границы для многочленов $R(x)$ произвольной фиксированной степени.

Ключевые слова: *алгебра Лейбница, алгебра Лейбница—Пуассона, многообразие алгебр.*

Векторное пространство A над полем K с двумя K-билинейными операциями умножения $\cdot$ и $\{,\}$ называется алгеброй Лейбница—Пуассона, если относительно операции $\cdot$ пространство A является коммутативной ассоциативной алгеброй с единицей, относительно операции $\{,\}$ — алгеброй Лейбница, и данные операции связаны правилами

$$\{a\cdot b, c\} = a\cdot\{b,c\} + \{a,c\}\cdot b, \quad \{c, a\cdot b\} = a\cdot\{c,b\} + \{c,a\}\cdot b,$$

где $a, b, c \in A$. При этом алгебра Лейбница $A(+, \{,\}, K)$ над полем K определяется тождеством

$$\{\{x,y\},z\} = \{\{x,z\},y\} + \{x,\{y,z\}\}.$$

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1298

Образец цитирования: С. М. Рацеев, О. И. Череватенко, “О тождествах специального вида в алгебрах Лейбница—Пуассона” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 2 (35). С. 9–15. doi: 10.14498/vsgtu1298.

Сведения об авторах: *Сергей Михайлович Рацеев* (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. информационной безопасности и теории управления. *Ольга Ивановна Череватенко* (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. высшей математики.

E-mail addresses: RatseevSM@mail.ru (S.M. Ratseev, *Corresponding author*), chai@pisem.net (O.I. Cherevatenko)

Алгебры Лейбница—Пуассона были введены в работе [1] и активно изучались в работах [2–8]. Данные алгебры являются обобщениями алгебр Пуассона. Заметим, что если в алгебре Лейбница выполнено тождество $\{x,x\}=0$, то она будет являться алгеброй Ли, поэтому, если данное тождество выполнено в алгебре Лейбница—Пуассона, то данная алгебра будет являться алгеброй Пуассона. Алгебры Пуассона возникают естественным образом в некоторых разделах алгебры, дифференциальной геометрии, топологии, современной теоретической физики и т. д. Исследование полиномиальных алгебр Пуассона началось сравнительно недавно, но тем не менее в данном направлении получен ряд интересных результатов [9–17]. Заметим также, что с использованием свободных алгебр Пуассона и Пуассоновых скобок У. У. Умирбаевым и И. П. Шестаковым [18] была решена известная проблема Нагаты [19] о существовании диких автоморфизмов свободной ассоциативной алгебры над полем характеристики 0 с тремя порождающими.

Пусть $F(X)$ — свободная алгебра Лейбница—Пуассона, где $X=\{x_1,x_2,x_3,\dots\}$ — счётное множество свободных образующих. Обозначим через P_n пространство в $F(X)$, состоящее из полилинейных элементов степени n от переменных $x_1,\dots,x_n$. Выделим в пространстве P_{2n} подпространство Q_{2n}, порождённое элементами вида

$$\{x_{a_1},x_{a_2}\}\cdot\{x_{a_3},x_{a_4}\}\cdot\ldots\cdot\{x_{a_{2n-1}},x_{a_{2n}}\}.$$

Тогда данное пространство есть линейная оболочка следующих элементов:

$$Q_{2n}=\langle\{x_{\tau(1)},x_{\tau(2)}\}\cdot\{x_{\tau(3)},x_{\tau(4)}\}\cdot\ldots\cdot\{x_{\tau(2n-1)},x_{\tau(2n)}\}\mid\tau\in S_{2n},\\ \tau(1)<\tau(3)<\dots<\tau(2n-1)\rangle_K.$$

Определим также подпространство R_n в P_n, порождённое элементами вида

$$\{x_{a_1},x_{a_2}\}\cdot\{x_{a_3},x_{a_4}\}\cdot\ldots\cdot\{x_{a_{2m-1}},x_{a_{2m}}\}\cdot x_{\alpha_{2m+1}}\cdot\ldots\cdot x_{\alpha_n}.$$

Тогда пространство R_n является линейной оболочкой элементов следующего вида:

$$R_n=\langle\{x_{\tau(1)},x_{\tau(2)}\}\cdot\{x_{\tau(3)},x_{\tau(4)}\}\cdot\ldots\cdot\{x_{\tau(2m-1)},x_{\tau(2m)}\}\cdot x_{\tau(2m+1)}\cdot\ldots\cdot x_{\tau(n)}\mid\\ \tau\in S_n,\quad 0\leqslant 2m\leqslant n,\quad \tau(1)<\tau(3)<\dots<\tau(2m-1),\\ \tau(2m+1)<\tau(2m+2)<\dots<\tau(n)\rangle_K.$$

Пусть $\mathbf{V}$ — некоторое многообразие алгебр Лейбница—Пуассона (все необходимые сведения о многообразиях PI-алгебр можно найти, например, в монографиях [20–22]), $\mathrm{Id}(\mathbf{V})$ — идеал тождеств многообразия $\mathbf{V}$. Обозначим

$$P_n(\mathbf{V})=P_n/(P_n\cap\mathrm{Id}(\mathbf{V})),\quad c_n(\mathbf{V})=\dim P_n(\mathbf{V}),\\ Q_{2n}(\mathbf{V})=Q_{2n}/(Q_{2n}\cap\mathrm{Id}(\mathbf{V})),\quad q_{2n}(\mathbf{V})=\dim Q_{2n}(\mathbf{V}),\\ R_n(\mathbf{V})=R_n/(R_n\cap\mathrm{Id}(\mathbf{V})),\quad r_n(\mathbf{V})=\dim R_n(\mathbf{V}).$$

Пространства $Q_{2n}(\mathbf{V})$ и $R_n(\mathbf{V})$ многообразий алгебр Пуассона $\mathbf{V}$ активно изучались в работах [9–11, 13, 23]. Это обусловлено следующим обстоятельством. Обозначим

$$T_{2n}=\{\tau\in S_{2n}\mid\tau(1)<\tau(2),\ \tau(3)<\tau(4),\dots,\tau(2n-1)<\tau(2n),$$

$$\tau(1) < \tau(3) < \cdots < \tau(2n-1)\}.$$

Теорема 1 [9]. *Пусть* $\mathbf{V}$ — *многообразие алгебр Пуассона над полем нулевой характеристики, в котором выполнено нетривиальное тождество. Тогда в* $\mathbf{V}$ *выполняется нетривиальное тождество вида*

$$\sum_{\tau\in T_{2n}} \alpha_\tau \{x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}\} \cdot \{x_{\tau(3)}, x_{\tau(4)}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{\tau(2n-1)}, x_{\tau(2n)}\} = 0, \quad \alpha_\tau \in K.$$

Далее нам понадобится следующая лемма, которую приведем без доказательства, так как она является частным случаем предложения 4 работы [1].

Лемма. *Пусть* $\mathbf{V}$ — *некоторое многообразие алгебр Лейбница—Пуассона над произвольным полем. Тогда справедливы следующий утверждения*:

(i) *полилинейные элементы*

$$u_s^{2n}(x_1, \ldots, x_{2n}), \quad s = 1, \ldots, q_{2n}(\mathbf{V}),$$

образуют базис пространства $Q_{2n}(\mathbf{V})$ *тогда и только тогда, когда полилинейные элементы от переменных* $x_1, \ldots, x_n$ *вида*

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n, \quad x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_{n-2k}} \cdot u_s^{2k}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{2k}}),$$
$$2 \leqslant 2k \leqslant n, \quad s = 1, \ldots, q_{2k}(\mathbf{V}), \quad i_1 < \cdots < i_{n-2k}, \quad j_1 < \cdots < j_{2k},$$

образуют базис пространства $R_n(\mathbf{V})$;

(ii) *для любого натурального числа* n *выполнено равенство*

$$r_n(\mathbf{V}) = 1 + \sum_{2\leqslant 2k\leqslant n} C_n^{2k} q_{2k}(\mathbf{V}),$$

где C_n^{2k} — *число сочетаний из* n *по* $2k$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{V}$ — *нетривиальное многообразие алгебр Лейбница—Пуассона над произвольным полем. Тогда либо*

1) $r_n(\mathbf{V}) \geqslant 2^{n-1}$ *для любого* n,
либо
2) *найдется такой многочлен* $a_{2N}x^{2N} + \cdots + a_1x + a_0$ *степени* $2N \geqslant 0$ *из кольца* $\mathbb{Q}[x]$, *что для любого* $n \geqslant 2N$ *будет выполнено равенство*

$$r_n(\mathbf{V}) = a_{2N}n^{2N} + \cdots + a_1n + a_0, \quad a_{2N} \neq 0,$$

причём

либо 2a) $r_n(\mathbf{V}) \geqslant 1 + \dfrac{n(n-1)}{2}$, $n \geqslant 1$, *и*

$$\frac{1}{(2N)!} \leqslant a_{2N} \leqslant \frac{1}{N!},$$

либо 2b) $r_n(\mathbf{V}) = 1$ *для любого* n.

Доказательство. Пусть последовательность $\{r_n(\mathbf{V})\}_{n\geqslant 1}$ не ограничена полиномом. Тогда из предложения 5 работы [1] следует, что для любого натурального n выполнено неравенство $q_{2n}(\mathbf{V}) > 0$. С учётом леммы получаем

$$r_n(\mathbf{V}) = 1 + \sum_{2\leqslant 2k\leqslant n} C_n^{2k} q_{2k}(\mathbf{V}) \geqslant 1 + \sum_{2\leqslant 2k\leqslant n} C_n^{2k} = 2^{n-1}.$$

Пусть теперь последовательность $\{r_n(\mathbf{V})\}_{n\geqslant 1}$ ограничена полиномом. Пусть N — максимальное число, при котором $q_{2N}(\mathbf{V}) > 0$. Тогда из леммы следует, что для любого $n \geqslant 2N$ будет выполнено равенство

$$r_n(\mathbf{V}) = 1 + \sum_{k=1}^{N} C_n^{2k} q_{2k}(\mathbf{V}),$$

то есть найдётся такой многочлен степени $2N \geqslant 0$ с рациональными коэффициентами, что

$$r_n(\mathbf{V}) = a_{2N} n^{2N} + \dots + a_1 n + a_0, \quad a_{2N} \neq 0, \quad n \geqslant 2N.$$

Пусть $N > 0$. Так как

$$q_{2n}(F(X)) \leqslant \frac{(2n)!}{n!}$$

для любого n, для любого $n \geqslant 2N$ будет выполнено двойное неравенство

$$\sum_{k=0}^{N} C_n^{2k} \leqslant r_n(\mathbf{V}) \leqslant \sum_{k=0}^{N} C_n^{2k} \cdot \frac{(2k)!}{k!}. \tag{1}$$

Поэтому

$$\frac{1}{(2N)!} \leqslant a_{2N} \leqslant \frac{1}{N!}.$$

При этом заметим, что

$$r_n(\mathbf{V}) \geqslant 1 + C_n^2 \cdot q_2(\mathbf{V}) \geqslant 1 + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Если $N = 0$, то $r_n(\mathbf{V}) = 1$ для любого n. □

Заметим, что аналогичный результат для полилинейных частей унитарных ассоциативных алгебр над произвольным полем получен в работе [24].

Пусть Λ_{2n} — алгебра Грассмана с единицей, $2n$ образующими элементами $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ и операцией умножения $\wedge$. Введём в алгебре Λ_{2n} два новых умножения:

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(a \wedge b + b \wedge a), \;\; \{a, b\} = a \wedge b - b \wedge a, \quad a, b \in \Lambda_{2n}.$$

Обозначим полученную алгебру Пуассона $(\Lambda_{2n}, +, \cdot, \{,\})$ через G_{2n}. В работе [12] показано, что в случае основного поля нулевой характеристики для произвольного натурального числа N последовательность $\{r_n(G_{2N})\}_{n\geqslant 1}$ достигает нижней границы в неравенстве (1):

$$c_n(G_{2N}) = r_n(G_{2N}) = \sum_{k=0}^{N} C_n^{2k}, \quad n \geqslant 2N.$$

Заметим, что существует бесконечно много попарно различных многообразий алгебр Лейбница—Пуассона $\mathbf{V}$, у которых последовательность $\{r_n(\mathbf{V})\}_{n\geqslant 1}$ достигает нижней границы полиномиального роста. Пусть $SU_N = SU_N(K)$ — алгебра строго верхнетреугольных матриц порядка N над полем K и операцией умножения $\wedge$. В векторном пространстве $U_N^{LP} = SU_N \times SU_N \times K$ над полем K определим две операции умножения $\cdot$ и $\{,\}$ следующим образом:

$$(x_1, x_2, \alpha)\cdot(y_1, y_2, \beta) = (\beta x_1 + \alpha y_1, \beta x_2 + \alpha y_2, \alpha\beta),$$
$$\{(x_1, x_2, \alpha), (y_1, y_2, \beta)\} = ([x_1, y_1], x_2 \wedge y_1, 0),$$

где $[x_1, y_1] = x_1 \wedge y_1 - y_1 \wedge x_1$, $(x_1, x_2, \alpha), (y_1, y_2, \beta) \in U_N^{LP}$. В работе [25] показано, что для полученной алгебры Лейбница—Пуассона U_N^{LP} над полем нулевой характеристики верны следующие равенства:

$$q_2(U_N^{LP}) = 1, \quad q_{2n}(U_N^{LP}) = 0, \quad n > 1,$$
$$r_n(U_N^{LP}) = 1 + \frac{n(n-1)}{2}, \; n \geqslant 1,$$
$$c_n(U_N^{LP}) = 1 + \sum_{k=2}^{\min\{n, N-1\}} C_n^k \cdot k!, \; n \geqslant 1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ/ REFERENCES

1. С. М. Рацеев, “Коммутативные алгебры Лейбница–Пуассона полиномиального роста” // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2012. №3/1(94). С. 54–65. [S. M. Ratseev, “Commutative Leibniz–Poisson algebras of polynomial growth”, *Vestnik SamGU. Estestvenno-Nauchnaya Ser.*, 2012, no. 3/1(94), pp. 54–65 (In Russian)].
2. S. M. Ratseev, “On varieties of Leibniz–Poisson algebras with the identity $\{x, y\}\cdot\{z, t\} = 0$”, *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2013, vol. 6, no. 1, pp. 97–104.
3. С. М. Рацеев, “Необходимые и достаточные условия полиномиальности роста многообразий алгебр Лейбница–Пуассона” // *Изв. вузов. Матем.*, 2014. №3. С. 33–39; S. M. Ratseev, “Necessary and sufficient conditions of polynomial growth of varieties of Leibniz–Poisson algebras”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2014, vol. 58, no. 3, pp. 26–30 doi: 10.3103/S1066369X14030037.
4. С. М. Рацеев, О. И. Череватенко, “Экспоненты некоторых многообразий алгебр Лейбница–Пуассона” // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2013. №3(104). С. 42–52. [S. M. Ratseev, O. I. Cherevatenko, “Exponents of some varieties of Leibniz—Poisson algebras”, *Vestnik SamGU. Estestvenno-Nauchnaya Ser.*, 2013, no. 3(104), pp. 42–52 (In Russian)].
5. С. М. Рацеев, “Об экспонентах некоторых многообразий линейных алгебр” // *ПДМ*, 2013. №3. С. 32–34. [S. M. Ratseev, “On exponents of some varieties of linear algebras”, *Prikl. Diskr. Mat.*, 2013, no. 3, pp. 32–34 (In Russian)].

6. С. М. Рацеев, О. И. Череватенко, “О некоторых многообразиях алгебр Лейбница–Пуассона с экстремальными свойствами” // *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.*, 2013. № 2. С. 57–59. [S. M. Ratseev, O. I. Cherevatenko, “On some varieties of Leibniz–Poisson algebras with extreme properties”, *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2013, no. 2, pp. 57–59 (In Russian)].
7. С. М. Рацеев, О. И. Череватенко, “О метабелевых многообразиях алгебр Лейбница–Пуассона” // *Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика*, 2013. Т. 6, № 1. С. 72–77. [S. M. Ratseev, O. I. Cherevatenko, “On metabelian varieties of Leibniz–Poisson algebras”, *IIGU Ser. Matematika*, 2013, vol. 6, no. 1, pp. 72–77 (In Russian)].
8. О. И. Череватенко, “Многообразия линейных алгебр полиномиального роста” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. № 4(33). С. 7–14 doi: 10.14498/vsgtu1262. [O. I. Cherevatenko, “Varieties of linear algebras of polynomial growth”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2013, no. 4(33), pp. 7–14 (In Russian)].
9. D. R. Farkas, “Poisson polynomial identities”, *Comm. Algebra*, 1998, vol. 26, no. 2, pp. 401–416 doi: 10.1080/00927879808826136.
10. D. R. Farkas, “Poisson polynomial identities II”, *Arch. Math. (Basel)*, 1999, vol. 72, no. 4, pp. 252–260 doi: 10.1007/s000130050329.
11. S. P. Mishchenko, V. M. Petrogradsky, A. Regev, “Poisson PI algebras”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2007, vol. 359, no. 10, pp. 4669–4694 doi: 10.1090/S0002-9947-07-04008-1.
12. С. М. Рацеев, “Алгебры Пуассона полиномиального роста” // *Сиб. матем. журн.*, 2013. Т. 54, № 3. С. 700–711; S. M. Ratseev, “Poisson algebras of polynomial growth”, *Siberian Math. J.*, 2013, vol. 54, no. 3, pp. 555–565 doi: 10.1134/S0037446613030191.
13. С. М. Рацеев, “Рост в алгебрах Пуассона” // *Алгебра и логика*, 2011. Т. 50, № 1. С. 68–88; S. M. Ratseev, “Growth in Poisson algebras”, *Algebra and Logic*, 2011, vol. 50, no. 1, pp. 46–61 doi: 10.1007/s10469-011-9123-z.
14. С. М. Рацеев, “Эквивалентные условия полиномиальности роста многообразий алгебр Пуассона” // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика*, 2012. Т. 67, № 5. С. 8–13; S. M. Ratseev, “Equivalent conditions of polynomial growth of a variety of Poisson algebras”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2012, vol. 67, no. 5–6, pp. 195–199 doi: 10.3103/S0027132212050026.
15. С. М. Рацеев, “О некоторых алгебрах Пуассона с экстремальными свойствами” // *Науч. ведомости БелГУ. Сер. Мат. Физ.*, 2013. Т. 30, № 5(148). С. 107–110. [S. M. Ratseev, “On varieties of Poisson algebras with extremal properties”, *Nauch. vedomosti BelGU. Mat. Fiz.*, 2013, vol. 30, no. 5(148), pp. 107–110 (In Russian)].
16. С. М. Рацеев, “Оценки роста некоторых многообразий алгебр Пуассона” // *Науч. ведомости БелГУ. Сер. Мат. Физ.*, 2013. Т. 31, № 11. С. 93–101. [S. M. Ratseev, “Estimates of the growth of certain varieties of Poisson algebras”, *Nauch. vedomosti BelGU. Mat. Fiz.*, 2013, vol. 31, no. 11, pp. 93–101 (In Russian)].
17. О. И. Череватенко, “О лиево нильпотентных алгебрах Пуассона” // *Науч. ведомости БелГУ. Сер. Мат. Физ.*, 2013. Т. 29, № 23(142). С. 14–16. [O. I. Cherevatenko, “On Lie nilpotent Poisson algebras”, *Nauch. vedomosti BelGU. Mat. Fiz.*, 2013, vol. 29, no. 23(142), pp. 14–16 (In Russian)].
18. I. P. Shestakov, U. U. Umirbaev, “The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables”, *J. Amer. Math. Soc.*, 2004, vol. 17, no. 1, pp. 197–227 doi: 10.1090/S0894-0347-03-00440-5.
19. M. Nagata, *On the automorphism group on $k[x, y]$*, Department of Mathematics, Kyoto University, Lectures in Mathematics, vol. 5, Tokyo, Kinokuniya Book-Store Co., 1972, v+53 pp.
20. Ю. А. Бахтурин, *Тождества в алгебрах Ли*. М.: Наука, 1985. 448 с. [Yu. A. Bakhturin, *Tozhdestva v algebrakh Li* [Identities in Lie Algebras], Moscow, Nauka, 1985, 448 pp. (In Russian)]
21. A. Giambruno, M. V. Zaicev, *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 122, Providence, RI, American Mathematical Society, 2005, xiv+352 pp. doi: 10.1090/surv/122.

22. V. Drensky, *Free algebras and PI-algebras. Graduate course in algebra*, Singapore, Springer-Verlag, 2000, xii+271 pp.
23. С. М. Рацеев, “Рост и кодлина пространств специального вида многообразий алгебр Пуассона” // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион*, 2006. № 5(26). С. 125–135. [S. M. Ratseev, “Growth and colength of special type spaces of varieties of Poisson algebras”, *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region*, 2006, no. 5(26), pp. 125–135 (In Russian)].
24. V. Drensky, A. Regev, “Exact asymptotic behaviour of the codimention of some P.I. algebras”, *Israel J. Math*, 1996, vol. 96, no. 1, pp. 231–242 doi: 10.1007/BF02785540.
25. С. М. Рацеев, О. И. Череватенко, “О нильпотентных алгебрах Лейбница–Пуассона” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. № 4(29). С. 207–211 doi: 10.14498/vsgtu1075. [S. M. Ratseev, O. I. Cherevatenko, “On the nilpotent Leibniz–Poisson algebras”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2012, no. 4(29), pp. 207–211 (In Russian)].

Поступила в редакцию 19/II/2014;
в окончательном варианте — 17/III/2014;
принята в печать — 19/III/2014.

MSC: 17A32, 17B63

ON LEIBNIZ–POISSON SPECIAL POLYNOMIAL IDENTITIES

***S. M. Ratseev*[1], *O. I. Cherevatenko*[2]**

[1] Ulyanovsk State University,
42, L. Tolstoy st., Ulyanovsk, 432017, Russian Federation.
[2] Ulyanovsk State I. N. Ulyanov Pedagogical University,
4, Ploshchad’ 100-letiya so dnya rozhdeniya V. I. Lenina, Ulyanovsk, 432063, Russian Federation.

In this paper we study Leibniz–Poisson algebras satisfying polynomial identities. We study Leibniz–Poisson special and Leibniz–Poisson extended special polynomials. We show that the sequence of codimensions $\{r_n(\mathbf{V})\}_{n\geqslant 1}$ of every extended special space of variety $\mathbf{V}$ of Leibniz-Poisson algebras over an arbitrary field is either bounded by a polynomial or at least exponential. Furthermore, if this sequence is bounded by polynomial then there is a polynomial $R(x)$ with rational coefficients such that $r_n(\mathbf{V}) = R(n)$ for all sufficiently large n. It follows that there exists no variety of Leibniz-Poisson algebras with intermediate growth of the sequence $\{r_n(\mathbf{V})\}_{n\geqslant 1}$ between polynomial and exponential. We present lower and upper bounds for the polynomials $R(x)$ of an arbitrary fixed degree.

Keywords: *Leibniz algebra, Leibniz–Poisson algebra, variety of algebras.*

Received 19/II/2014;
received in revised form 17/III/2014;
accepted 19/III/2014.

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1298

Citation: S. M. Ratseev, O. I. Cherevatenko, “On Leibniz–Poisson Special Polynomial Identities”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 2 (35), pp. 9–15. doi: 10.14498/vsgtu1298. (In Russian)

Author Details: *Sergey M. Ratseev* (Cand. Phys. & Math. Sci.), Associate Professor, Dept. of Information Security & Control Theory. *Olga I. Cherevatenko* (Cand. Phys. & Math. Sci.), Associate Professor, Dept. of Higher Mathematics.

E-mail addresses: RatseevSM@mail.ru (S.M. Ratseev, *Corresponding author*), chai@pisem.net (O.I. Cherevatenko)