Дифференциальные уравнения

УДК 517.956.328

О ВЛИЯНИИ МЛАДШИХ ЧЛЕНОВ ПО ПЕРЕМЕННОЙ X НА СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

О. В. Алексеева, В. В. Корниенко, Д. В. Корниенко

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина,
Россия, 399770, Липецкая обл., Елец, ул. Коммунаров, 28.

Работа посвящена сравнительному изучению и описанию спектральных свойств дифференциальных операторов, порождённых задачей Дирихле для гиперболической системы без «младших членов» вида

$$\frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}=\lambda u^1+f^1,\quad \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2}=\lambda u^2+f^2,$$

и для гиперболической системы с «младшими членами» —

$$\frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}+\frac{\partial u^2}{\partial x}=\lambda u^1+f^1,\quad \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2}+\frac{\partial u^1}{\partial x}=\lambda u^2+f^2,$$

рассматриваемых в замыкании $V_{t,x}$ ограниченной области $\Omega_{t,x}=(0;\pi)^2$ евклидова пространства $\mathbb{R}^2_{t,x}$. Исследование спектральных свойств граничных задач для систем линейных дифференциальных уравнений гиперболического типа ведётся в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{t,x}$ в терминах спектрально замкнутых операторов $L:\mathcal{H}_{t,x}\to\mathcal{H}_{t,x}$. В настоящей работе для замкнутых дифференциальных операторов $L:\mathcal{H}_{t,x}\to\mathcal{H}_{t,x}$, порождённых задачей Дирихле для гиперболических систем второго порядка, изучены спектры: $C\sigma L=R\sigma L$ — пустое множество; точечный спектр $P\sigma L$ располагается в вещественной прямой комплексной плоскости $\mathbb{C}$. В случае гиперболической системы без младших членов собственные вектор-функции оператора L образуют ортогональный базис. В случае гиперболической системы с младшими членами вектор-функции оператора L образуют базис Рисса, не являющийся ортогональным в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{t,x}$. Сформулированы теоремы о структуре спектра σL оператора L, порождённого задачей Дирихле.

Ключевые слова: *гиперболические системы, граничные задачи, замкнутые операторы, спектр, базис, ортогональный базис, базис Рисса.*

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1294

Образец цитирования: О. В. Алексеева, В. В. Корниенко, Д. В. Корниенко, “О влиянии младших членов по переменной x на спектральные свойства задачи Дирихле для гиперболических систем” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 2 (35). С. 16–21. doi: 10.14498/vsgtu1294.

Сведения об авторах: *Олеся Васильевна Алексеева*, соискатель, каф. вычислительной математики и информатики. *Василий Васильевич Корниенко* (д.ф.-м.н., проф.), заведующий кафедрой, каф. вычислительной математики и информатики. *Дмитрий Васильевич Корниенко* (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. вычислительной математики и информатики.

Работа посвящена сравнительному изучению и описанию спектральных свойств дифференциальных операторов, порождённых задачей Дирихле для гиперболической системы без «младших членов» вида

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} = \lambda u^1 + f^1, \\ &\frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} = \lambda u^2 + f^2, \end{aligned} \tag{1}$$

и для гиперболической системы с «младшими членами» —

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial x} = \lambda u^1 + f^1, \\ &\frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} + \frac{\partial u^1}{\partial x} = \lambda u^2 + f^2, \end{aligned} \tag{2}$$

рассматриваемых в замыкании $V_{t,x}$ ограниченной области $\Omega_{t,x} = (0;\pi)^2$ евклидова пространства $\mathbb{R}^2_{t,x}$. Присоединив к системам уравнений (1) и (2) условие Дирихле

$$u\big|_{\partial\Omega_{t,x}} = 0, \tag{3}$$

получим две граничные задачи: задачу (1), (3) и задачу (2), (3).

Для гиперболических систем [1] и более общих, так называемых симметричных [2] и несимметричных систем, имеется ряд глубоких результатов, относящихся к описанию правильных граничных условий [3].

Описанию регулярных граничных задач для более общих систем уравнений первого порядка по выделенной переменной t при числе переменных более двух посвящена работа [4]. Исследованию свойств разрешимости задачи Коши для простейшей гиперболической системы первого порядка в «линзообразной области» посвящена работа [3]. Однако спектральные свойства этих граничных задач и граничных задач иного типа при числе переменных больше двух почти не изучены. Элементы спектральной теории замкнутых операторов подробно изложены в [5–7]. Спектральные свойства задачи Дирихле для гиперболических систем первого порядка и систем дифференциально-операторных уравнений изучались в [8–10].

Как и в работах [9, 10], системы дифференциальных уравнений (2) и (3) для удобства будем называть гиперболическими системами первого типа. Гиперболической системой второго типа с младшими членами в данном случае будет система вида

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} - \frac{\partial u^2}{\partial x} = \lambda u^1 + f^1, \\ &\frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} + \frac{\partial u^1}{\partial x} = \lambda u^2 + f^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Отметим, что система (4) равносильна системе (2) (для $\lambda = 0$) в следующем смысле: после умножения первого уравнения системы (2) на -1 и формальной замены $-f^1$ на f^1 (в силу произвольности правой части) получаем

E-mail addresses: o.v.alexeeva@gmail.com (O.V. Alexeeva, *Corresponding author*), v_v_kornienko@mail.ru (V.V. Kornienko), dmkornienko@mail.ru (D.V. Kornienko)

систему (4). Эти рассуждения наводят на мысль о совпадении свойств разрешимости граничных задач для данных систем безотносительно к условиям, определяющим граничную задачу. Однако исследования в случае гиперболических систем первого порядка показывают, что спектральные свойства рассматриваемых дифференциальных операторов различны; они в некотором смысле аналогичны тем отличиям, которые проявились при сопоставлении слабой иррегулярности сильной в работе [11], а также при изучении эллиптических систем в [8]. Обозначим символами $e_i = \left(\delta_i^1\ \delta_i^2\right)^\top$, $i = 1, 2$, ортонормированный базис евклидова пространства $\mathcal{E}_2^2$ вектор-столбцов, а через $\mathcal{U}_2^2$ — унитарное пространство элементов $u = u^1 e_1 + u^2 e_2$; $u^k \in \mathbb{C}$; $k = 1, 2$, со скалярным произведением

$$\left(u, v; \mathcal{U}_2^2\right) = u^1 \overline{v^1} + u^2 \overline{v^2}.$$

Пусть $\mathcal{H}_{t,x}^2 = \mathcal{L}_2^2\left(V_{t,x}\right)$ — гильбертово пространство комплекснозначных вектор-функций $u : V_{t,x} \to \mathbb{C}^2$, норма в котором задаётся формулой

$$\left|u; \mathcal{H}_{t,x}^2\right|^2 = \iint_{V_{t,x}} \left|u(\tau, \xi); \mathcal{U}_2^2\right|^2 d\tau d\xi.$$

Пусть также $\mathfrak{D}$ — линейное многообразие гладких комплекснозначных вектор-функций $u = u(t, x)$, принадлежащих классу $\mathbb{C}\left(\overline{\Omega}_{t,x}\right) \cap \mathbb{C}^{(2)}\left(\Omega\right)$ и удовлетворяющих условиям (3). Опишем вначале спектральные свойства гиперболической системы первого типа без младших членов.

Гиперболическая система без младших членов. Обозначая символом $\widetilde{L}$ оператор, областью определения которого является $\mathfrak{D}$, а множество значений определяется правой частью (1), получаем эллиптический дифференциальный оператор; этот оператор незамкнут. Применяя в $\mathcal{H}_{t,x}^2$ стандартную процедуру замыкания, получаем замкнутое расширение L оператора $\widetilde{L}$. В этом случае говорят, что замкнутый оператор $L : \mathcal{H}_{t,x}^2 \to \mathcal{H}_{t,x}^2$ порождён задачей (1), (3). Изучим его спектр и спектральные свойства его собственных вектор-функций. Говоря о спектре замкнутого оператора, мы следуем терминологии, принятой в монографиях [5, с. 25], [7, с. 620]. Резольвентное множество, спектр, точечный спектр, непрерывный спектр и остаточный спектр оператора L обозначим символами ρL, σL, $P\sigma L$, $C\sigma L$ и $R\sigma L$ соответственно.

Аналогично в работе [11] доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Спектр σL оператора L, порождённого задачей (1), (3), состоит из замыкания $\overline{P\sigma L}$ на комплексной плоскости его точечного спектра $P\sigma L$. Множество $C\sigma L = \sigma L \setminus P\sigma L$ образует непрерывный спектр оператора L. Точечный спектр оператора L даётся формулой*

$$\lambda_{m,k,s} = -k^2 + i(-1)^m s^2; \quad m = 1, 2; \quad k \in \mathbb{N}; \quad s \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Собственная вектор-функция оператора L, принадлежащая его собственному значению (5), представима в виде

$$u_{m,k,s}(t, x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} + \left(ie_1 + (-1)^{m+1} e_2\right) \sin(kt) \sin(sx).$$

Последовательность

$$\{u_{m,k,s}(t,x) : m = 1, 2;\ k \in \mathbb{N};\ s \in \mathbb{N}\}$$

собственных вектор-функций оператора L образует ортогональный базис в пространстве $\mathcal{H}^2_{t,x}$.

Гиперболическая система с младшими членами. Так же, как и в случае гиперболической системы без младших членов, обозначим символом $\widetilde{L}$ оператор, областью определения которого является $\mathfrak{D}$, а множество значений определяется правой частью (2). Получаем эллиптический дифференциальный оператор; этот оператор незамкнут. Применяя в $\mathcal{H}^2_{t,x}$ стандартную процедуру замыкания, получаем замкнутое расширение L оператора $\widetilde{L}$. В этом случае говорят, что замкнутый оператор $L : \mathcal{H}^2_{t,x} \to \mathcal{H}^2_{t,x}$ порождён задачей (2), (3). Изучим его спектр и спектральные свойства его собственных вектор-функций.

Теорема 2. *Спектр σL оператора L, порождённого задачей (2), (3), состоит из замыкания $\overline{P\sigma L}$ на комплексной плоскости его точечного спектра $P\sigma L$. Множество $C\sigma L = \sigma L \setminus P\sigma L$ образует непрерывный спектр оператора L. Точечный спектр оператора L даётся формулой*

$$\lambda_{m,k,s} = -k^2 + i(-1)^m\left(\frac{1}{4} + s^2\right); \quad m = 1, 2; \quad k \in \mathbb{N}; \quad s \in N. \tag{6}$$

Собственная вектор-функция оператора L, принадлежащая его собственному значению (6), представима в виде

$$u_{m,k,s}(t,x) = 2\sin(kt)e^{\frac{x}{2}}\sin(sx)\left(ie_m + e_{3-m}\right).$$

Последовательность

$$\{u_{m,k,s}(t,x) : m = 1, 2;\ k \in \mathbb{N};\ s \in \mathbb{N}\}$$

собственных вектор-функций оператора L образует базис Рисса в пространстве $\mathcal{H}^2_{t,x}$.

Достаточно заметить, что последовательность

$$\{u_{m,k,s}(t) :\ m = 1, 2;\ k \in \mathbb{N}\}$$

вектор-функций

$$u_{m,k,s}(t) = 2\sin(kt)\big(ie_m + e_{3-m}\big)$$

является полной и ортогональной в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^2_t = \mathcal{H}_t \oplus \mathcal{H}_t$, $\mathcal{H}_t = \mathcal{L}_2[0, \pi]$, и воспользоваться доказанным в [9] представлением $\mathcal{H}^2_{t,x}$ в виде тензорного произведения гильбертовых пространств $\mathcal{H}^2_t$ и $\mathcal{H}_x$, то есть формулой $\mathcal{H}^2_{t,x} = \mathcal{H}^2_t \otimes \mathcal{H}_x$, где $\mathcal{H}_x = \mathcal{L}_2[0, \pi]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ/ REFERENCES

1. А. А. Дезин, “Смешанные задачи для некоторых симметрических гиперболических систем” // *Докл. АН СССР*, 1956. Т. 107, № 1. С. 13–16. [A. A. Dezin, “Mixed problems for certain symmetric hyperbolic systems”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 1956, vol. 107, no. 1, pp. 13–16 (In Russian)].
2. А. А. Дезин, “Граничные задачи для некоторых симметричных линейных систем первого порядка” // *Матем. сб.*, 1959. Т. 49(91), № 4. С. 459–484. [A. A. Dezin, “Boundary value problems for certain symmetric linear first order systems”, *Mat. Sb. (N.S.)*, 1959, vol. 49(91), no. 4, pp. 459–484 (In Russian)].
3. А. А. Дезин, “Теоремы существования и единственности решений граничных задач для уравнений с частными производными в функциональных пространствах” // *УМН*, 1959. Т. 14, № 3(87). С. 21–73. [A. A. Dezin, “Existence and uniqueness theorems for solutions of boundary problems for partial differential equations in function spaces”, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1959, vol. 14, no. 3(87), pp. 21–73 (In Russian)].
4. В. К. Романко, “Смешанные краевые задачи для одной системы уравнений” // *Докл. АН СССР*, 1986. Т. 286, № 1. С. 47–50; V. K. Romanko, “Mixed boundary value problems for a system of equations”, *Sov. Math., Dokl.*, 1986, vol. 33, no. 1, pp. 38–41.
5. А. А. Дезин, *Общие вопросы теории граничных задач.* М.: Наука, 1980. 208 с. [A. A. Dezin, *Obshchiye voprosy teorii granichnykh zadach* [General questions of the theory of boundary value problems], Moscow, Nauka, 1980, 208 pp. (In Russian)]
6. С. Качмаж, Г. Штейнгауз, *Теория ортогональных рядов.* М.: Физ.-мат. лит., 1958. 507 с. [S. Kachmazh, G. Shteyngauz, *Teoriya ortogonal’nykh ryadov* [Theory of orthogonal series], Moscow, Fiz.-Mat. Lit., 1958, 507 pp. (In Russian)]
7. Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы.* Т. 1: Общая теория. М.: Иностр. лит-ра, 1962. 895 с.; N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators*, V. 1, General Theory, New York – London, John Wiley & Sons, 1988, xiv+858 pp.
8. Корниенко Д. В., “О спектральных задачах для линейных систем дифференциально-операторных уравнений” // *Вестник Елецк. госуд. ун-та им. И. А. Бунина. Сер.: Математика, физика*, 2004. № 5. 71–78 с. [D. V. Kornienko, “On the spectral problems for linear systems of operator-differential equations”, *Vestnik Eletsk. Gos. Univ. Bunina. Ser. Mat. Fiz.*, 2004, vol. 5, pp. 71–78 (In Russian)].
9. Д. В. Корниенко, “Об одной спектральной задаче для двух гиперболических систем уравнений” // *Диффер. уравн.*, 2006. Т. 42, № 1. С. 91–100; D. V. Kornienko, “On a spectral problem for two hyperbolic systems”, *Differ. Equ.*, 2006, vol. 42, no. 1, pp. 101–111 doi: 10.1134/S0012266106010083.
10. Д. В. Корниенко, “О спектре задачи Дирихле для систем дифференциально-операторных уравнений” // *Диффер. уравн.*, 2006. Т. 42, № 8. С. 1063–1071; D. V. Kornienko, “On the spectrum of the Dirichlet problem for systems of operator-differential equations”, *Differ. Equ.*, 2006, vol. 42, no. 8, pp. 1124–1133 doi: 10.1134/S0012266106080076.
11. А. А. Дезин, “О слабой и сильной иррегулярности” // *Диффер. уравн.*, 1981. Т. 17, № 10. С. 1851–1858. [A. A. Dezin, “On weak and strong irregularity”, *Differ. Uravn.*, 1981, vol. 17, no. 10, pp. 1851–1858 (In Russian)].
12. О. В. Алексеева, “О спектре задачи Дирихле для двух эллиптических систем” // *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер.: Математика. Физика*, 2010. Т. 17(88), № 20. С. 5–9. [O. V. Alexeeva, “On the spectrum of the Dirichlet problem for two elliptic systems”, *Nauchnye Vedomosti Belgorodckogo Gosudarstvennogo Universiteta. Ser. Matematika. Fizika*, 2010, vol. 17(88), no. 20, pp. 5–9 (In Russian)].

Поступила в редакцию 13/XI/2013;
в окончательном варианте — 03/II/2014;
принята в печать — 13/II/2014.

MSC: 35P05; 35L52, 35P10

ON THE LOWEST BY X-VARIABLE TERMS INFLUENCE ON THE SPECTRAL PROPERTIES OF DIRICHLET PROBLEM FOR THE HYPERBOLIC SYSTEMS

O. V. Alexeeva, V. V. Kornienko, D. V. Kornienko

I. A. Bunin Elets State University,
28, Kommunarov st., Elets, Lipetskaya obl., 399770, Russian Federation.

We made the comparison study and characterize the spectral properties of differential operators induced by the Dirichlet problem for the hyperbolic system without the lowest terms of the form

$$\frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} = \lambda u^1 + f^1, \quad \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} = \lambda u^2 + f^2,$$

and for the hyperbolic system with the lowest terms of the form

$$\frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial x} = \lambda u^1 + f^1, \quad \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} + \frac{\partial u^1}{\partial x} = \lambda u^2 + f^2,$$

, which are considered in the closure $V_{t,x}$ of the bounded domain $\Omega_{t,x} = (0;\pi)^2$ in Euclidean space $\mathbb{R}^2_{t,x}$. The spectral properties of the boundary value problems for the systems of linear differential equations of the hyperbolic type are investigated in the Hilbert space $\mathcal{H}_{t,x}$ in the terms of spectral closed operators $L : \mathcal{H}_{t,x} \to \mathcal{H}_{t,x}$. We study the spectra of the closed differential operators $L : \mathcal{H}_{t,x} \to \mathcal{H}_{t,x}$, induced by the Dirichlet problem for the second order hyperbolic systems: $C\sigma L = R\sigma L$ — empty set; point spectrum $P\sigma L$ is in the real straight line of the complex plane $\mathbb{C}$. The operator L eigen vector functions generate the orthogonal basis for the hyperbolic system without the lowest terms. For the hyperbolic system with the lowest terms the operator L eigen vector functions generate the Riesz basis, nonorthogonal in the Hilbert space $\mathcal{H}_{t,x}$. The theorems on the structure of the induced by the Dirichlet problem operator L spectrum σL are formulated.

Keywords: *hyperbolic systems, boundary value problems, closed operators, spectrum, basis, orthogonal basis, Riesz basis.*

Received 13/XI/2013;
received in revised form 03/II/2014;
accepted 13/II/2014.

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1294

Citation: O. V. Alexeeva, V. V. Kornienko, D. V. Kornienko, "On the Lowest by x-variable Terms Influence on the Spectral Properties of Dirichlet Problem for the Hyperbolic Systems", *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 2 (35), pp. 16–21. doi: 10.14498/vsgtu1294. (In Russian)

Authors Details: *Olesya V. Alexeeva*, Dept. of Computational Mathematics and Informatics. *Vasiliy V. Kornienko* (Dr. Phys. & Math. Sci.), Head of Dept., Dept. of Computational Mathematics and Informatics. *Dmitriy V. Kornienko* (Cand. Phys. & Math. Sci.), Associate Professor, Dept. of Computational Mathematics and Informatics.

E-mail addresses: o.v.alexeeva@gmail.com (O.V. Alexeeva, *Corresponding author*), v_v_kornienko@mail.ru (V.V. Kornienko), dmkornienko@mail.ru (D.V. Kornienko)