

УДК 517.968.7

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Т. К. Юлдашев

Сибирский государственный аэрокосмический университет им. ак. М. Ф. Решетнева, Россия, 660014, Красноярск, пр. имени газеты «Красноярский рабочий», 31

Интегро-дифференциальные уравнения имеют особенности в вопросе однозначной разрешимости. Вопросы разрешимости линейных обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных изучены многими авторами. В работе рассматривается нелинейная обратная задача, где функция восстановления в заданное интегрально-дифференциальное уравнение входит нелинейно и с запаздыванием. Относительно восстанавливаемой функции данное уравнение является неявным функционально-интегральным уравнением Фредгольма. Изучается однозначная разрешимость нелинейной обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка. Сначала модифицируется метод вырожденного ядра интегрального уравнения Фредгольма для случая интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма в частных производных третьего порядка. При решении нелинейной обратной задачи относительно восстанавливаемой функции получится нелинейное интегральное уравнение Вольтерры первого рода, которое с помощью специального неклассического интегрального преобразования сводится к нелинейному интегральному уравнению Вольтерры второго рода. Поскольку восстанавливаемая функция нелинейно входит в заданное интегро-дифференциальное уравнение и имеет запаздывание, задание начального условия по отношению к восстанавливаемой функции обеспечивает единственность решения нелинейного интегрального уравнения первого рода и определяет значение неизвестной восстанавливаемой функции на начальном отрезке. Далее используется метод последовательных приближений в сочетании с методом сжимающих отображений.

Ключевые слова: нелинейная обратная задача, уравнение в частных производных третьего порядка, неявное функционально-интегральное уравнение, интегральное преобразование, метод последовательных приближений.

С точки зрения физических приложений представляют большой интерес дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков. Изучение многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков [1]. Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка рассматриваются при решении задач теории нелинейной акустики и в гидродинамической теории космической плазмы. Часто изучение задач моделирования фильтрации жидко-

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1299>

© 2014 Самарский государственный технический университет.

Образец цитирования: Т. К. Юлдашев, “Обратная задача для одного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка” // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2014. № 1 (34). С. 56–65. doi: [10.14498/vsgtu1299](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1299).

Сведения об авторе: Турсун Камалдинович Юлдашев (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. высшей математики.

E-mail address: tursunbay@rambler.ru

сти в пористых средах сводится к рассмотрению дифференциальных уравнений третьего порядка [2]. К дифференциальным уравнениям в частных производных третьего порядка также сводятся задачи изучения распространения волн в слабодиспергирующих средах, в холодной плазме и магнитной гидродинамике.

Изучению дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка посвящено большое количество работ (см., напр. [3–12]). Но изучению интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма в частных производных третьего порядка посвящено гораздо меньше работ. Интегро-дифференциальные уравнения имеют особенности в вопросе однозначной разрешимости [13, 14].

В настоящей работе изучается нелинейная обратная задача для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка.

1. Постановка задачи. В области $\Omega \equiv \Omega_T \times R$ рассматривается интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма вида

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + \lambda \int_0^T K(t, s) \frac{\partial^2 u(s, x)}{\partial x^2} ds \right) = f \left(t, x, \int_0^T K_0(s) \sigma(s - \tau) ds \right) \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(0, x) = \phi_1(x), \quad u_t(0, x) = \phi_2(x), \quad u_{tt}(0, x) + \lambda a(0)c(x) = \phi_3(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

$$u(t, 0) = h(t, 0) - N_1 q(t) + \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} f \left(s, 0, \int_0^T K_0(\theta) \sigma(\theta - \tau) d\theta \right) ds, \quad (3)$$

$$u_x(t, 0) = h_x(t, 0) - N_2 q(t) + \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} f_x \left(s, 0, \int_0^T K_0(\theta) \sigma(\theta - \tau) d\theta \right) ds \quad (4)$$

и дополнительными условиями

$$u(t, x_0) = \psi(t), \quad t \in \Omega_T, \quad x_0 \neq 0, \quad (5)$$

$$\sigma(t) = \sigma_0(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad (6)$$

где $f(t, x, \vartheta) \in C^{0,2,0}(\Omega \times \mathbb{R})$; $\phi_i(x) \in C^2(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, 3$; $K(t, s) = a(t)b(s)$, $a(t)$, $b(s) \in C(\Omega_T)$; $\sigma(t)$ — восстанавливаемая функция; $\sigma_0(t) \in C[-\tau; 0]$ — заданная начальная функция; N_i — заданные постоянные, $i = 1, 2$; $K_0(t) \in C(\Omega_T)$ — заданная функция; $\Omega_T \equiv [0, T]$, $0 < T < \infty$; λ — параметр;

$$h(t, x) = \phi_1(x) + \phi_2(x)t + \phi_3(x)\frac{t^2}{2}, \quad q(t) = \lambda \int_0^t (t-s)a(s)ds, \\ c(x) = \int_0^T b(s) \frac{\partial^2 u(s, x)}{\partial x^2} ds. \quad (7)$$

Отметим, что изучению разрешимости обратных задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных посвящено большое количество работ. Обратную задачу назовем линейной, если функция восстановления входит в уравнение линейно. Библиографию многих публикаций, посвящённых теории линейных обратных задач, можно найти, например в [15–17].

В работе [18] изучена однозначная разрешимость линейной обратной задачи для одного квазилинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма третьего порядка.

В настоящей работе изучается обратная задача для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка, где восстанавливаемая функция входит в уравнение нелинейно и с запаздыванием.

Основной подход данной работы состоит в том, что при решении нелинейной обратной задачи относительно восстанавливаемой функции из условия (5) получится нелинейное интегральное уравнение Вольтерры первого рода, которое с помощью неклассического интегрального преобразования сводится к нелинейному интегральному уравнению Вольтерры второго рода. Задание начального условия (6) при интегральном преобразовании обеспечивает единственность решения нелинейного интегрального уравнения Вольтерры первого рода и определяет значение неизвестной функции на заданном начальном отрезке $[-\tau; 0]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Решением обратной задачи (1)–(6) называется пара функций $\{u(t, x) \in C^{3,2}(\Omega), \sigma(t) \in C(\Omega_T)\}$, удовлетворяющая уравнению (1) и условиям (2)–(6).

2. Начальная задача (1)–(4). Будем использовать метод интегральных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром [19]. При помощи обозначения (7) интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма (1) переписывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + \lambda a(t)c(x) \right) = f \left(t, x, \int_0^T K_0(s)\sigma(s - \tau)ds \right).$$

С учётом условия (2) трёхкратное интегрирование по t последнего равенства даёт

$$u(t, x) = h(t, x) - c(x)q(t) + \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} f \left(s, x, \int_0^T K_0(\theta)\sigma(\theta - \tau)d\theta \right) ds. \quad (8)$$

Продифференцируем (8) два раза по x :

$$u_x(t, x) = h_x(t, x) - c'(x)q(t) + \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} f_x \left(s, x, \int_0^T K_0(\theta)\sigma(\theta - \tau)d\theta \right) ds, \quad (9)$$

$$u_{xx}(t, x) = h_{xx}(t, x) - c''(x)q(t) + \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} f_{xx} \left(s, x, \int_0^T K_0(\theta)\sigma(\theta - \tau)d\theta \right) ds. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (7), имеем

$$c(x) = \int_0^T b(s) \left[h_{xx}(s, x) - c''(x)q(s) + \int_0^s \frac{(s-\theta)^2}{2} f_{xx} \left(\theta, x, \int_0^T K_0(\xi)\sigma(\xi - \tau)d\xi \right) d\theta \right] ds. \quad (11)$$

Пусть

$$A = \int_0^T b(s)q(s)ds > 0. \quad (12)$$

Тогда для определения $c(x)$ в (7) получаем из (11) следующее дифференциальное уравнение:

$$c''(x) + Bc(x) = F(x), \quad (13)$$

где $B = A^{-1}$, $F(x) = BF_0(x)$,

$$F_0(x) = \int_0^T b(s)h_{xx}(s, x)ds + \\ + \int_0^T b(s) \int_0^s \frac{(s-\theta)^2}{2} f_{xx}\left(\theta, x, \int_0^T K_0(\xi)\sigma(\xi-\tau)d\xi\right) d\theta ds.$$

Решая дифференциальное уравнение (13) методом вариации произвольных постоянных, получаем

$$c(x) = D_1 \cos \nu x + D_2 \sin \nu x + \frac{1}{\nu} \int_0^x F(y)Q(x, y)dy, \quad (14)$$

где $Q(x, y) = \sin \nu(x - y)$, $\nu = \sqrt{B}$, коэффициенты D_1 , D_2 подлежат определению.

Из (14) имеем

$$c(0) = D_1, \quad c'(0) = \nu D_2. \quad (15)$$

С учётом (15) из (8) и (9) получаем

$$u(t, 0) = h(t, 0) - D_1 q(t) + \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} f\left(s, 0, \int_0^T K_0(\theta)\sigma(\theta-\tau)d\theta\right) ds, \quad (16)$$

$$u_x(t, 0) = h_x(t, 0) - \nu D_2 q(t) + \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} f_x\left(s, 0, \int_0^T K_0(\theta)\sigma(\theta-\tau)d\theta\right) ds. \quad (17)$$

Сравнение соотношений (16) и (17) с заданными условиями (3) и (4) даёт $D_1 = N_1$, $D_2 = N_2/\nu$. Тогда (14) принимает вид

$$c(x) = N_1 \cos \nu x + \frac{N_2}{\nu} \sin \nu x + \frac{1}{\nu} \int_0^x F(y)Q(x, y)dy. \quad (18)$$

Подстановка (18) в (8) даёт

$$u(t, x) = h(t, x) + \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} f\left(s, x, \int_0^T K_0(\theta)\sigma(\theta-\tau)d\theta\right) ds - \\ - q(t) \left\{ N_1 \cos \nu x + \frac{N_2}{\nu} \sin \nu x - \nu \int_0^T b(s) \int_0^x Q(x, y) h_{yy}(s, y) ds dy + \right. \\ \left. + \nu \int_0^x Q(x, y) \int_0^T b(s) \times \right.$$

$$\times \int_0^s \frac{(s-\theta)^2}{2} f_{yy} \left(\theta, y, \int_0^T K_0(\xi) \sigma(\xi - \tau) d\xi \right) d\theta ds dy \Big\}. \quad (19)$$

3. Восстанавливаемая функция. В силу условия (5) из (19) получаем

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} f(s, x_0, \sigma(s)) ds = \\ = g(t) + \nu q(t) \int_0^{x_0} Q(x_0, y) \int_0^T b(s) \times \\ \times \int_0^s \frac{(s-\theta)^2}{2} f_{yy} \left(\theta, y, \int_0^T K_0(\xi) \sigma(\xi - \tau) d\xi \right) d\theta ds dy, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} g(t) = \psi(t) - h(t, x_0) + q(t) \left[N_1 \cos \nu x_0 + \frac{N_2}{\nu} \sin \nu x_0 + \right. \\ \left. + \nu \int_0^T b(s) \int_0^{x_0} Q(x_0, y) h_{yy}(s, y) ds dy \right]. \end{aligned}$$

Нелинейное интегральное уравнение первого рода (20) при начальном условии (6) эквивалентно следующему интегральному уравнению второго рода (см., напр. [20–22]):

$$\begin{aligned} \sigma(t) \equiv \Theta(t; \sigma(t)) = & \left[\sigma(t) + \int_0^t G(s) \sigma(s) ds - \right. \\ & - \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} f \left(s, x_0, \int_0^T K_0(\theta) \sigma(\theta - \tau) d\theta \right) ds + \\ & + \nu q(t) \int_0^{x_0} Q(x_0, y) \int_0^T b(s) \times \\ & \times \int_0^s \frac{(s-\theta)^2}{2} f_{yy} \left(\theta, y, \int_0^T K_0(\xi) \sigma(\xi - \tau) d\xi \right) d\theta ds dy + g(t) \Big] e^{-\mu(t)} + \\ & + \int_0^t G(s) e^{-\mu(t-s)} \left[\sigma(t) - \sigma(s) + \int_0^t G(s) \sigma(s) ds - \int_0^s G(\theta) \sigma(\theta) d\theta - \right. \\ & - \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} f \left(s, x_0, \int_0^T K_0(\theta) \sigma(\theta - \tau) d\theta \right) ds + \\ & + \int_0^s \frac{(s-\theta)^2}{2} f \left(\theta, x_0, \int_0^T K_0(\xi) \sigma(\xi - \tau) d\xi \right) d\theta + \\ & + \nu q(t) \int_0^{x_0} Q(x_0, y) \int_0^T b(s) \times \\ & \times \int_0^s \frac{(s-\theta)^2}{2} f_{yy} \left(\theta, y, \int_0^T K_0(\xi) \sigma(\xi - \tau) d\xi \right) d\theta ds dy - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\nu q(s) \int_0^{x_0} Q(x_0, y) \int_0^T b(\theta) \times \\
 & \times \int_0^\theta \frac{(\theta - \xi)^2}{2} f_{yy} \left(\xi, y, \int_0^T K_0(\zeta) \sigma(\zeta - \tau) d\zeta \right) d\xi d\theta dy + \\
 & + g(t) - g(s) \Big] ds, \quad (21)
 \end{aligned}$$

где

$$\mu(t) = \int_0^t G(s) ds > 0$$

такая, что

$$e^{-\mu(t)} \ll 1; \quad 2 \int_0^t G(s) e^{-\mu(t-s)} ds \ll 1.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняются следующие условия:

- 1) $\max \{ |g(t)| : t \in \Omega_T \} \leq \delta < \infty$;
- 2) $\max \{ |f(t, x, \vartheta)|; |f_{xx}(t, x, \vartheta)| \} \leq \Delta < \infty$;
- 3) $f(t, x, \vartheta) \in \text{Lip}\{L_1|\vartheta\}$, $0 < L_1 = \text{const} < \infty$;
- 4) $f_{xx}(t, x, \vartheta) \in \text{Lip}\{L_2|\vartheta\}$, $0 < L_2 = \text{const} < \infty$;
- 5) $\rho = \left[1 + \mu_0 + \bar{L}_1 \frac{T^3}{6} + \nu q_0 \bar{L}_2 \int_0^{x_0} Q(x_0, y) \int_0^T \frac{s^3}{6} b(s) ds dy \right] P(T) < 1$,

где

$$\mu_0 = \max \{ \mu(t) : t \in \Omega_T \}, \quad q_0 = \max \{ |q(t)| : t \in \Omega_T \},$$

$$P(t) = e^{-\mu(t)} + 2 \int_0^t G(s) e^{-\mu(t-s)} ds, \quad \bar{L}_i = L_i \int_0^T \|K_0(s)\| ds, \quad i = 1, 2.$$

Тогда нелинейное интегральное уравнение (21) имеет единственное решение на отрезке Ω_T .

Доказательство. Воспользуемся методом последовательных приближений. Рассмотрим следующий итерационный процесс Пикара:

$$\begin{aligned}
 \sigma_0(t) &= 0, \quad \sigma_1(t) = \left[\int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} f(s, x_0, 0) ds + \right. \\
 &+ \nu q(t) \int_0^{x_0} Q(x_0, y) \int_0^T b(s) \int_0^s \frac{(s-\theta)^2}{2} f_{yy}(\theta, y, 0) d\theta ds dy + g(t) \Big] e^{-\mu(t)} + \\
 &+ \int_0^t G(s) e^{-\mu(t-s)} \left[\int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} f(s, x_0, 0) ds - \int_0^s \frac{(s-\theta)^2}{2} f(\theta, x_0, 0) d\theta + \right. \\
 &+ \nu q(t) \int_0^{x_0} Q(x_0, y) \int_0^T b(s) \int_0^s \frac{(s-\theta)^2}{2} f_{yy}(\theta, y, 0) d\theta ds dy - \\
 &- \nu q(s) \int_0^{x_0} Q(x_0, y) \int_0^T b(\theta) \times \\
 &\times \left. \int_0^\theta \frac{(\theta - \xi)^2}{2} f_{yy}(\xi, y, 0) d\xi d\theta dy + g(t) - g(s) \right] ds, \quad (22)
 \end{aligned}$$

$$\sigma_k(t) = \Theta(t; \sigma_{k-1}(t)), \quad k = 2, 3, 4, \dots \quad (23)$$

В силу условий теоремы из последовательных приближений (22) и (23) получаем

$$\|\sigma_1(t) - \sigma_0(t)\| \leq \left[\Delta \frac{T^3}{6} + \nu q_0 \Delta \int_0^{x_0} Q(x_0, y) \int_0^T \frac{s^3}{6} b(s) ds dy + \delta \right] P(T); \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \|\sigma_k(t) - \sigma_{k-1}(t)\| &\leq \left[1 + \mu_0 + \bar{L}_1 \frac{T^3}{6} + \right. \\ &\quad \left. + \nu q_0 \bar{L}_2 \int_0^{x_0} Q(x_0, y) \int_0^T \frac{s^3}{6} b(s) ds dy \right] \times \\ &\quad \times P(T) \|\sigma_{k-1}(t) - \sigma_{k-1}(t)\|. \quad (25) \end{aligned}$$

Из оценок (24) и (25) следует, что оператор в правой части (21) является сжимающим. Следовательно, интегральное уравнение (21) имеет единственное решение на отрезке Ω_T . $\square$

4. Разрешимость обратной задачи (1)–(6).

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполняются условия теоремы 1, (12) и условия

- 1) $\max \{|\phi_i(x)|\} < \infty, i = 1, 2, 3;$
- 2) $\left| \int_0^x Q(x, y) h_{yy}(s, y) dy \right| < \infty;$
- 3) $\left| \int_0^x Q(x, y) f_{yy}(t, y, \vartheta) dy \right| < \infty.$

Тогда в области Ω существует единственное решение начальной задачи (1)–(4).

Доказательство теоремы 2 следует из того, что, подставляя в (19) решение интегрального уравнения (21), однозначно получаем искомую функцию $u(t, x)$.

Из справедливости приведенных выше двух теорем следует, что справедлива

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполняются все условия теоремы 2. Тогда существует единственная пара решений $\{u(t, x) \in C^{3,2}(\Omega), \sigma(t) \in C(\Omega_T)\}$ обратной задачи (1)–(6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ/ REFERENCES

1. С. Д. Алгазин, И. А. Кийко, *Флаттер пластин и оболочек*, М.: Наука, 2006. 248 с. [S. D. Algazin, I. A. Kiyko, *Flutter plastin i obolochek* [Flutter of plates and shells], Moscow, Nauka, 2006, 248 pp. (In Russian)]
2. М. Х. Шхануков, “О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах” // *Дифференц. уравнения*, 1982. Т. 18, № 4. С. 689–699. [M. Kh. Shkhanukov, “On some boundary value problems for a third-order equation arising when modelling fluid filtration in porous media”, *Differentsial'nyye uravneniya*, 1982, vol. 18, no. 4, pp. 689–699. (In Russian)].

3. А. А. Андреев, Ю. О. Яковлева, "Характеристическая задача для системы гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка общего вида с некратаыми характеристиками" // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. №1(30). С. 31–36. doi: [10.14498/vsgtu1182](https://doi.org/10.14498/vsgtu1182). [A. A. Andreev, J. O. Yakovleva, "The characteristic problem for the system of the general hyperbolic differential equations of the third order with nonmultiple characteristics", *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2013, no. 1(30), pp. 31–36. (In Russian)].
4. М. Х. Бештоков, "Метод Римана для решения нелокальных краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка" // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. №4(33). С. 15–24. doi: [10.14498/vsgtu1238](https://doi.org/10.14498/vsgtu1238). [M. H. Beshtokov, "Riemann method for solving non-local boundary value problems for the third order pseudoparabolic equations", *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2013, no. 4(33), pp. 15–24. (In Russian)].
5. Т. Д. Джураев, Ю. П. Апаков, "Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками" // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007. №2(15). С. 18–26. doi: [10.14498/vsgtu525](https://doi.org/10.14498/vsgtu525). [T. D. Dzhuraev, Yu. P. Apakov, "On the avtomodel solution of an equation of the third order with multiple characteristics", *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2007, no. 2(15), pp. 18–26. (In Russian)].
6. К. Б. Сабитов, "Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа третьего порядка" // *Докл. РАН*, 2009. Т. 427, №5. С. 593–596.; К. В. Sabitov, "A boundary value problem for a third-order equation of mixed type", *Dokl. Math.*, 2009, vol. 80, no. 1, pp. 565–568. doi: [10.1134/S1064562409040292](https://doi.org/10.1134/S1064562409040292).
7. К. Б. Сабитов, "Задача Дирихле для уравнения смешанного типа третьего порядка в прямоугольной области" // *Дифференц. уравн.*, 2011. Т. 47, №5. С. 705–713; К. В. Sabitov, "Dirichlet problem for a third-order equation of mixed type in a rectangular domain", *Differ. Equ.*, 2011, vol. 47, no. 5, pp. 706–714. doi: [10.1134/S0012266111050090](https://doi.org/10.1134/S0012266111050090).
8. К. Б. Сабитов, Г. Ю. Удалова, "Краевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с условиями периодичности" // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. №3(32). С. 29–45. doi: [10.14498/vsgtu1220](https://doi.org/10.14498/vsgtu1220). [K. B. Sabitov, G. Yu. Udalova, "Boundary value problem for mixed type equation of the third order with periodic conditions", *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2013, no. 3(32), pp. 29–45. (In Russian)].
9. О. А. Репин, С. К. Кумыкова, "Задача со смещением для уравнения третьего порядка с разрывными коэффициентами" // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. №4(29). С. 17–25. doi: [10.14498/vsgtu1123](https://doi.org/10.14498/vsgtu1123). [O. A. Repin, S. K. Kumyкова, "Problem with shift for the third-order equation with discontinuous coefficients", *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2012, no. 4(29), pp. 17–25. (In Russian)].
10. А. Сопуев, Н. К. Аркабаев, "Задачи сопряжения для линейных псевдопараболических уравнений третьего порядка" // *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.*, 2013. №1. С. 16–23. [A. Sopuev, N. K. Arkabaev, "Interface problems for linear pseudo-parabolic equations of the third order", *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2013, no. 1, pp. 16–23. (In Russian)].
11. D. Colton, "Pseudoparabolic equations in one space variable", *J. Differ. Equation*, 1972, vol. 12, no. 3, pp. 559–565. doi: [10.1016/0022-0396\(72\)90025-3](https://doi.org/10.1016/0022-0396(72)90025-3).
12. D. Colton, "Integral operators and the first initial boundary value problem for pseudoparabolic equations with analytic coefficients", *J. Differ. Equation*, 1973, vol. 13, no. 3, pp. 506–522. doi: [10.1016/0022-0396\(73\)90009-0](https://doi.org/10.1016/0022-0396(73)90009-0).
13. Я. В. Быков, *О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений*, Фрунзе: КиргГУ, 1957. 328 с. [Ya. V. Bykov, *O nekotorykh zadachakh teorii integro-differentsial'nykh uravneniy* [On Some Problems in the Theory of Integro-differential Equations], Frunze, Kirgiz State Univ., 1957, 328 pp. (In Russian)]
14. Иманалиев М., *Колебания и устойчивость решений сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем*, Фрунзе: Илим, 1974. 352 с. [M. Imanaliyev,

- Kolebaniya i ustoychivost' resheniy singulyarno-vozmushchennykh integro-differentsial'nykh sistem* [Oscillations and Solutions Stability of Singular-perturbed Integro-differential Equations], Frunze, Ilim, 1974, 352 pp. (In Russian)]
15. А. М. Денисов, *Введение в теорию обратных задач*, М.: МГУ, 1994. 285 с. [A. M. Denisov, *Vvedenie v teoriyu obratnykh zadach* [Introduction to the theory of inverse problem], Moscow, Moscow State Univ., 1994, 285 pp. (In Russian)]
 16. В. Г. Романов, *Обратные задачи для математической физики*, М.: Наука, 1984. 264 с.; V. G. Romanov, *Inverse Problems of Mathematical Physics*, Utrecht, VNU Science Press, 1987, vii+224 pp.
 17. М. М. Лаврентьев, Л. Я. Савельев, *Линейные операторы и некорректные задачи*, М.: Наука, 1999. 330 с.; M. M. Lavrent'ev, L. Ya. Savel'ev, *Linear operators and ill-posed problems*, New York, Consultants Bureau, 1995, xiv+382 pp.
 18. Т. К. Юлдашев, "Обратная задача для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка" // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2013. №9-1 (110). С. 58–66. [T. K. Yuldashev, "Inverse problem for a nonlinear integro-differential equation of the third order", *Vestnik SamGU. Estestvenno-Nauchnaya Ser.*, 2013, no. 9-1 (110), pp. 58–66. (In Russian)].
 19. Т. К. Юлдашев, "О разрешимости смешанной задачи для линейного парабола-гиперболического интегро-дифференциального уравнения Фредгольма" // *Журнал СВМО*, 2013. Т. 15, №3. С. 158–163. [T. K. Yuldashev, "On solvability of mixed value problem for linear parabol-hyperbolic Fredholm integro-differential equation", *Zhurnal SVMO*, 2013, vol. 15, no. 3, pp. 158–163. (In Russian)].
 20. Т. К. Юлдашев, "Неявное эволюционное интегральное уравнение Вольтерра первого рода с нелинейным интегральным отклонением" // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009. №2(19). С. 38–44. doi: [10.14498/vsgtu672](https://doi.org/10.14498/vsgtu672). [T. K. Yuldashev, "Nonexplicit evolution Volterra integral equation of the first kind with nonlinear integral delay", *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2009, no. 2(19), pp. 38–44. (In Russian)].
 21. Т. К. Юлдашев, "Обратная задача для нелинейного уравнения с псевдопараболическим оператором высокого порядка" // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. №3(28). С. 17–29. doi: [10.14498/vsgtu1041](https://doi.org/10.14498/vsgtu1041). [T. K. Yuldashev, "Inverse problem for nonlinear partial differential equation with high order pseudoparabolic operator", *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2012, no. 3(28), pp. 17–29. (In Russian)].
 22. Т. К. Юлдашев, А. И. Середкина, "Обратная задача для квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка" // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. №3(32). С. 46–55. doi: [10.14498/vsgtu1133](https://doi.org/10.14498/vsgtu1133). [T. K. Yuldashev, A. I. Seredkina, "Inverse problem for quazilinear partial integro-differential equations of higher order", *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2013, no. 3(32), pp. 46–55. (In Russian)].

Поступила в редакцию 28/XII/2013;
в окончательном варианте — 24/II/2014;
принята в печать — 26/II/2014.

MSC: 35R30; 35K70, 35M12

INVERSE PROBLEM FOR A FREDHOLM THIRD ORDER PARTIAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

T. K. Yuldashev

M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University,
31, pr. "Krasnoyarski Rabochiy", Krasnoyarsk, 660014, Russian Federation

The solvability of various problems for partial differential equations of the third order is researched in many papers. But, partial Fredholm integro-differential equations of the third order are studied comparatively less. Integro-differential equations have traits in their one-valued solvability. The questions of solvability of linear inverse problems for partial differential equations are studied by many authors. We consider a nonlinear inverse problem, where the restore function appears in the equation nonlinearly and with delay. This equation with respect to the restore function is Fredholm implicit functional integral equation. The one-valued solvability of the nonlinear inverse problem for a partial Fredholm integro-differential equation of the third order is studied. First, the method of degenerate kernel designed for Fredholm integral equations is modified to the case of partial Fredholm integro-differential equations of the third order. The nonlinear Volterra integral equation of the first kind is obtained while solving the nonlinear inverse problem with respect to the restore function. This equation by the special non-classical integral transformation is reduced to a nonlinear Volterra integral equation of the second kind. Since the restore function, which entered into the integro-differential equation, is nonlinear and has delay time, we need an additional initial value condition with respect to restore function. This initial value condition ensures the uniqueness of solution of a nonlinear Volterra integral equation of the first kind and determines the value of the unknown restore function at the initial set. Further the method of successive approximations is used, combined with the method of contracting mapping.

Keywords: *nonlinear inverse problem, partial differential equation of the third order, implicit functional-integral equation, integral transformation, method of successive approximations.*

Received 28/XII/2013;
received in revised form 24/II/2014;
accepted 26/II/2014.

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1299>
© 2014 Samara State Technical University.

Citation: T. K. Yuldashev, "Inverse problem for a Fredholm third order partial integro-differential equation", *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 1 (34), pp. 56–65. doi: [10.14498/vsgtu1299](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1299). (In Russian)

Author Details: *Tursun K. Yuldashev* (Cand. Phys. & Math. Sci.), Associate Professor, Dept. of Higher Mathematics.

E-mail address: tursunbay@rambler.ru