УДК 517.956.6

ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНОЙ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

О. А. Репин[1,2]

[1] Самарский государственный экономический университет,
Россия, 443090, Самара, ул. Советской Армии, 141.
[2] Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Исследована нелокальная краевая задача для одного уравнения, которое при $y > 0$ содержит частную дробную производную Римана—Лиувилля и является уравнением диффузии дробного порядка, а при $y < 0$ является уравнением гиперболического типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения. Сформулированы условия существования и единственности решения поставленной краевой задачи. Единственность решения исследуемой задачи доказана с помощью принципа экстремума и использования операторов обобщенного дробного интегро-дифференцирования в смысле М. Сайго. Существование решения задачи эквивалентно сведено к вопросу разрешимости дифференциального уравнения дробного порядка, решение которого выписано в явном виде.

Ключевые слова: *краевая задача, обобщенный оператор дробного интегро-дифференцирования, гипергеометрическая функция Гаусса, функция Миттаг—Леффлера.*

Введение. Рассмотрим уравнение

$$\begin{cases} u_{xx} - D^{\alpha}_{0+,y} u = 0, & (y > 0,\ 0 < \alpha < 1), \\ x u_{xx} + y u_{yy} + p u_x + q u_y = 0, & (y < 0, q \geqslant p, 1/2 < p,\ q < 1), \end{cases} \tag{1}$$

где $D^{\alpha}_{0+,y}$ — частная дробная производная Римана—Лиувилля порядка α от функции $u(x, y)$ по второй переменной [1, с. 341]:

$$(D^{\alpha}_{0+,y} u)(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y \frac{u(x, t)dt}{(y-t)^{\alpha}} \quad (0 < \alpha < 1,\ y > 0).$$

Ранее [2, 3] для уравнения (1) были рассмотрены нелокальная краевая задача и аналог задачи Трикоми. Данная работа является продолжением исследования отмеченных задач и их обобщением.

Уравнение (1) будем рассматривать в области Ω, которая представляет собой объединение квадрата

$$\Omega^{+} = \{(x, y) : 0 \leqslant x, y \leqslant 1\},$$

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1318

Образец цитирования: О. А. Репин, “Задача со смещением для одного уравнения с частной дробной производной” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 2 (35). С. 22–32. doi: 10.14498/vsgtu1318.

Сведения об авторе: *Олег Александрович Репин* (д.ф.-м.н., проф.), заведующий кафедрой, каф. математической статистики и эконометрики[1]; профессор, каф. прикладной математики и информатики[2].

E-mail address: matstat@mail.ru

области Ω^-, лежащей в нижней полуплоскости $(y < 0)$ и ограниченной характеристиками $AC: x+y=0$, $BC: \sqrt{x}+\sqrt{-y}=1$ уравнения (1) и отрезком $[0,1]$ прямой $y=0$, $A(0,0)$, $B(1,0)$.

Введём обозначения: $(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}f)(x)$ — оператор обобщённого дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса $F(a,b;c;z)$ в ядре, введенный в [4] (см. также [1, с. 326–327]) и имеющий при действительных α, β, η и $x>0$ вид

$$(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}f)(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}F\Big(\alpha+\beta,-\eta;\alpha;1-\frac{t}{x}\Big)f(t)\,dt & (\alpha>0),\\ \dfrac{d^n}{dx^n}(I_{0+}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n}f)(x) & (\alpha\leqslant 0,\ n=[-\alpha]+1). \end{cases}$$

В частности,

$$(I_{0+}^{0,0,\eta}f)(x)=f(x),\ (I_{0+}^{\alpha,-\alpha,\eta}f)(x)=(I_{0+}^{\alpha}f)(x),\ (I_{0+}^{-\alpha,\alpha,\eta}f)(x)=(D_{0+}^{\alpha}f)(x),$$

где I_{0+}^{α} и D_{0+}^{α} — операторы дробного интегрирования и дифференцирования Римана—Лиувилля порядка $\alpha>0$ [1, с. 42, 44].

Задача. *Найти решение $u(x,y)$ уравнения (1) в области Ω, удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(0,y)=\varphi_0(y),\quad u(1,y)=\varphi_1(y),\quad 0<y<1, \tag{4}$$

$$A\big(I_{0+}^{a,\frac{q-p+1}{2},\frac{p-q}{2}-a}t^{q-1}u[\Theta_0(t)]\big)(x)+B\big(I_{0+}^{a+q-\frac12,0,\frac{p-q}{2}-a}t^{\frac{p+q-3}{2}}u(t,0)\big)(x)+$$
$$+Cx^{\frac{q-p-1}{2}}\big(I_{0+}^{a-q+\frac32,q-p,-a-\frac12}\lim_{y\to0-0}[(-y)^q u_y(t,y)]\big)(x)=g(x),\quad 0<x<1, \tag{5}$$

а также условиям сопряжения

$$\lim_{y\to0+0}y^{1-\alpha}u(x,y)=\lim_{y\to0-0}u(x,y),\quad 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{6}$$

$$\lim_{y\to0+0}[y^{1-\alpha}(y^{1-\alpha}u(x,y))_y]=x^{p-1}\lim_{y\to0-0}(-y)^q u_y(x,y),\quad 0<x<1. \tag{7}$$

Здесь A, B, C — действительные константы, на которые ниже будут наложены некоторые условия, a — отрицательный параметр, причём

$$\frac{1-2q}{4}<a<0;$$

$\Theta_0(x)$ — точка пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точек $(x,0)$ $(0<x<1)$, с характеристикой AC; $\varphi_0(y)$, $\varphi_1(y)$, $g(x)$ — заданные функции, такие, что

$$y^{1-\alpha}\varphi_0(y),\quad y^{1-\alpha}\varphi_1(y)\in C([0,1]),\quad \varphi_0(0)=\varphi_1(0)=0,\quad g(x)\in C^2([0,1]).$$

Будем искать решение поставленной задачи в классе дважды дифференцируемых в области Ω функций $u(x,y)$, таких, что

$$y^{1-\alpha}u(x,y)\in C(\overline{\Omega^+}),\quad u(x,y)\in C(\overline{\Omega^-}),$$

$$y^{1-\alpha}(y^{1-\alpha}u_y)_y \in C(\Omega^+ \cup \{(x,y):\ 0<x<1, y=0\}),$$
$$u_{xx} \in C(\Omega^+ \cup \Omega^-), \quad u_{yy} \in C(\Omega^-).$$

1. Единственность решения задачи. Пусть существует решение исследуемой задачи. Введём обозначения

$$\lim_{y\to 0+0} y^{1-\alpha}u(x,y) = \tau_1(x), \quad \lim_{y\to 0-0} u(x,y) = \tau_2(x),$$
$$\lim_{y\to 0+0} y^{1-\alpha}(y^{1-\alpha}u(x,y))_y = \nu_1(x), \quad \lim_{y\to 0-0} (-y)^q u_y(x,y) = \nu_2(x).$$

Известно [5, с. 108], что решение уравнения (1) в области Ω^+, удовлетворяющее условию (4) и

$$\lim_{y\to 0+0} y^{1-\alpha}u(x,y) = \tau_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

записывается в виде

$$u(x,y) = \int_0^y \varphi_0(\eta)G_\xi(x,y;0;\eta)d\eta - \int_0^y \varphi_1(\eta)G_\xi(x,y;1;\eta)d\eta +$$
$$+ \Gamma(\alpha)\int_0^1 \tau_1(\xi)G_\xi(x,y;\xi;0)d\xi,$$

где

$$G(x,y;\xi,\eta) = \frac{(y-\eta)^{\beta-1}}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big[e^{1,\beta}_{1,\beta}\Big(-\frac{|x-\xi+2n|}{(y-\eta)^\beta}\Big) -$$
$$- e^{1,\beta}_{1,\beta}\Big(-\frac{|x+\xi+2n|}{(y-\eta)^\beta}\Big)\Big], \quad \beta = \frac{\alpha}{2},$$

$$e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\mu)\Gamma(\delta-\beta n)}, \quad \alpha > \beta,\ \alpha > 0$$

— функция типа Райта [5, с. 23].

Также известно [2, 6], что функциональное соотношение между $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$, принесённое из параболической области Ω^+ на линию $y=0$, имеет вид

$$\nu_1(x) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\tau_1''(x). \tag{10}$$

Найдём функциональное соотношение между $\tau_2(x)$ и $\nu_2(x)$, принесённое на линию $y=0$ из гиперболической части Ω^- области Ω. Используя решение задачи Коши [7]

$$u(x,0) = \tau_2(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$\lim_{y\to 0-0}(-y)^q u_y(x,y) = \nu_2(x), \quad 0 < x < 1,$$

для уравнения (1), в работе [2] найдено $u[\Theta_0(x)]$. В символах обобщённого оператора дробного интегрирования (3) оно имеет вид

$$u[\Theta_0(x)] = k_1 x^{1-q}\big(I_{0+}^{q-\frac{1}{2},\frac{p-q-1}{2},\frac{p-q}{2}} t^{\frac{p+q-3}{2}}\tau_2(t)\big)(x)+ \\ + k_2 x^{1-p}\big(I_{0+}^{\frac{3}{2}-q,\frac{q-p-1}{2},\frac{q-p}{2}} t^{\frac{p-q-1}{2}}\nu_2(t)\big)(x),$$

где

$$k_1 = \frac{2^{p-q}\Gamma(2q-1)}{\Gamma(q-\frac{1}{2})}, \quad k_2 = -\frac{2^{p+3q-3}\Gamma(2-2q)}{\Gamma(\frac{3}{2}-q)}.$$

Подставляя функцию $u[\Theta_0(x)]$ в краевое условие (5) и используя формулы композиций

$$\left(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}(I_{0+}^{\gamma,\delta,\alpha+\eta}\varphi)(t)\right)(x) = (I_{0+}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta}\varphi)(x), \quad \gamma>0,\ \alpha,\ \beta,\ \eta,\ \delta\in\mathbb{R}, \qquad (11)$$

$$\left(I_{0+}^{a,b,c}t^{\beta+b}\big(I_{0+}^{\alpha,\beta,a+b+c+\beta}s^e\varphi(s)\big)(t)\right)x = \\ = x^{\beta}\big(I_{0+}^{a+\alpha,b+\beta,c+\beta}t^{e+c}\varphi(t)\big)(x), \quad a<0, \alpha>0,\ b,\ c,\ \beta,\ l\in\mathbb{R}, \qquad (12)$$

полученные соответственно в работах [4, 8], приходим к равенству

$$(Ak_1+B)\big(I_{0+}^{a+q-\frac{1}{2},0,\frac{p-q}{2}-a} t^{\frac{p+q-3}{2}}\tau_2(t)\big)(x)+ \\ + (Ak_2+C)x^{\frac{q-p-1}{2}}\big(I_{0+}^{a-q+\frac{3}{2},q-p,-a-\frac{1}{2}}\nu_2(t)\big)(x) = g(x). \qquad (13)$$

Умножив обе части равенства (13) на $x^{\frac{1+p-q}{2}}$ и применив к обеим частям полученного соотношения оператор $I_{0+}^{a,\frac{1+p-q}{2},-2a-\frac{1}{2}}$, на основании формул (11) и (12) будем иметь

$$(Ak_1+B)\big(I_{0+}^{2a+q-\frac{1}{2},\frac{1+p-q}{2},-2a-\frac{1}{2}} t^{p-1}\tau_2(t)\big)(x)+ \\ + (Ak_2+C)\big(I_{0+}^{2a-q+\frac{3}{2},\frac{1-p+q}{2},-2a-\frac{1}{2}}\nu_2(t)\big)(x) = g_1(x), \qquad (14)$$

где

$$g_1(x) = \big(I_{0+}^{a,\frac{1+p-q}{2},-2a-\frac{1}{2}}g(t)\big)(x).$$

Преобразуем функцию $g_1(x)$. Опираясь на формулу (3), с учётом известного соотношения [9, с. 44]

$$\int x^{c-1}F(a,b;c;x)dx = \frac{x^c}{c}F(a,b;c+1;x),$$

интегрируя по частям, а затем дифференцируя, получим

$$g_1(x) = \big(I_{0+}^{a+1,\frac{p-q-1}{2},-2a-\frac{1}{2}}g'(t)\big)(x).$$

Теперь на обе части (14) подействуем обратным оператором

$$\left(I_{0+}^{2a+q-\frac{1}{2},\frac{1+p-q}{2},-2a-\frac{1}{2}}\right)^{-1}=I_{0+}^{\frac{1}{2}-2a-q,\frac{q-p-1}{2},q-1}.$$

На основании формулы композиции (11) будем иметь

$$(Ak_1+B)x^{p-1}\tau_2(x)+(Ak_2+C)\big(I_{0+}^{2-2q,q-p,q-1}\nu_2(t)\big)(x)=g_2(x), \tag{15}$$

где

$$g_2(x)=\big(I_{0+}^{\frac{3}{2}-a-q,-1,q-1}g'(t)\big)(x).$$

Применив к обеим частям (15) оператор $I_{0+}^{2q-2,p-q,1-q}$, найдем явный вид функции $\nu_2(x)$:

$$(Ak_2+C)\nu_2(x)=-(Ak_1+B)\big(I_{0+}^{2q-2,p-q,1-q}t^{p-1}\tau_2(t)\big)(x)+\\+\big(I_{0+}^{q-a-\frac{1}{2},p-q-1,1-q}g'(t)\big)(x). \tag{16}$$

Имеют место следующие утверждения.

Лемма 1. *Если функция* $\tau_1(x)$ *достигает положительного максимума* (*отрицательного минимума*) на отрезке $[0,1]$ в точке $x=x_0$ $(0<x_0<1)$, то $\nu_1(x_0)\leqslant 0$ $(\nu_1(x_0)\geqslant 0)$.

Справедливость леммы 1 непосредственно следует из соотношения (10).
Далее будем считать, что выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} Ak_2+C>0,\\ Ak_1+B<0,\end{cases}\quad \text{либо}\quad \begin{cases} Ak_2+C<0,\\ Ak_1+B>0.\end{cases} \tag{17}$$

Лемма 2. *Если функция* $\tau_2(x)$ *достигает положительного максимума* (*отрицательного минимума*) *на отрезке* $[0,1]$ *в точке* $x=x_0$ $(0<x_0<1)$, $g(x)\equiv 0$ *и выполняются условия* (17), *то* $\nu_2(x_0)>0$ $(\nu_2(x_0)<0)$.

Доказательство. Заметим, что справедливость леммы 2 без условия (17) в виде кратких утверждений установлена в работах [2, 10]. Здесь даётся полное и достаточно подробное её доказательство.
На основании (3) имеем

$$I_1(x)=\big(I_{0+}^{2q-2,p-q,1-q}t^{p-1}\tau_2(t)\big)(x)=\frac{d}{dx}\big(I_{0+}^{2q-1,p-q-1,-q}t^{p-1}\tau_2(t)\big)(x)=\\=\frac{1}{\Gamma(2q-1)}\frac{d}{dx}\int_0^x t^{p-1}(x-t)^{q-p}\Big(\frac{x-t}{x}\Big)^{p+q-2}\times\\\times F\Big(p+q-2,q;2q-1;\frac{x-t}{x}\Big)\tau_2(t)\,dt.$$

Пусть

$$I_{1\delta}(x)=\frac{1}{\Gamma(2q-1)}\frac{d}{dx}\int_0^x t^{p-1}(x-t)^{q-p}\Big(\frac{x-t}{x}\Big)^{p+q-2}\times$$

$$\times F\Big(p+q-2, q; 2q-1; \frac{x-t}{x}\Big)\tau_2(t)\,dt.$$

Воспользовавшись формулой [11, с. 110]

$$\frac{d}{dz}[z^a F(a,b;c;z)] = az^{a-1}F(a+1,b;c;z)$$

и тождеством [12, с. 1058]

$$cF(a,b;c;z) = (c-a)F(a,b+1;c+1;z) + a(1-z)F(1+a,1+b;1+c;z),$$

получим

$$I_{1\delta}(x) = \frac{1}{\Gamma(2q-1)}(x-\delta)^{p-1}(\delta)^{q-p}\Big(\frac{\delta}{x}\Big)^{p+q-2}\times$$
$$\times F\Big(p+q-2, q; 2q-1; \frac{\delta}{x}\Big)\tau_2(x-\delta)+$$
$$+\frac{2q-2}{\Gamma(2q-1)}\int_0^{x-\delta} t^{p-1}(x-t)^{2q-3}x^{2-p-q}\times$$
$$\times F\Big(p+q-2, q-1; 2q-2; \frac{x-t}{x}\Big)\tau_2(t)\,dt = I_{11\,\delta}(x) + I_{12\,\delta}(x).$$

Запишем $I_{12\,\delta}(x)$ следующим образом:

$$I_{12\,\delta}(x) = \frac{2-2q}{\Gamma(2q-1)}x^{2-p-q}\int_0^{x-\delta}\frac{\tau_2(x)-\tau_2(t)}{(x-t)^{3-2q}}t^{p-1}\times$$
$$\times F\Big(p+q-2, q-1; 2q-2; \frac{x-t}{x}\Big)dt+$$
$$+\frac{2q-2}{\Gamma(2q-1)}\tau_2(x)x^{2-p-q}\int_0^{x-\delta}(x-t)^{2q-3}t^{p-1}\times$$
$$\times F\Big(p+q-2, q-1; 2q-2; \frac{x-t}{x}\Big)dt.$$

Используя формулу автотрансформации [11, с. 76]

$$F(a,b;c;z) = (1-z)^{c-a-b}F(c-a, c-b; c; z),$$

можно записать

$$x^{2-p-q}\int_0^{x-\delta}(x-t)^{2q-3}t^{p-1}F\Big(p+q-2, q-1; 2q-2; \frac{x-t}{x}\Big)\,dt =$$
$$= x^{1-q}\int_0^{x-\delta}(x-t)^{2q-3}F\Big(q-p, q-1; 2q-2; \frac{x-t}{x}\Big)\,dt. \quad (18)$$

Применяя формулу [11, с. 111]

$$\frac{d}{dz}[z^{c-1}F(a,b;c;z)] = (c-1)z^{c-2}F(a,b;c-1;z),$$

получим соотношение

$$(x-t)^{2q-3}F\Big(q-p,q-1;2q-2;\frac{x-t}{x}\Big)=$$
$$=-\frac{1}{2q-2}x^{2q-2}\frac{d}{dt}\Big[\Big(\frac{x-t}{x}\Big)^{2q-2}F\Big(q-p,q-1;2q-1;1-\frac{t}{x}\Big)\Big].$$

Таким образом, (18) принимает вид

$$x^{1-q}\int_0^{x-\delta}(x-t)^{2q-3}F\left(q-p,q-1;2q-2;\frac{x-t}{x}\right)dt=$$
$$=-\frac{1}{2q-2}x^{q-1}\int_0^{x-\delta}\frac{d}{dt}\Big[\Big(\frac{x-t}{x}\Big)^{2q-2}F\Big(q-p,q-1;2q-1;\frac{x-t}{x}\Big)\Big]dt=$$
$$=-\frac{x^{q-1}}{2q-2}\Big[\Big(\frac{\delta}{x}\Big)^{2q-2}F\Big(q-p,q-1;2q-1;\frac{\delta}{x}\Big)-F(q-p,q-1;2q-1;1)\Big]=$$
$$=-\frac{x^{q-1}}{2q-2}\Big(\frac{\delta}{x}\Big)^{2q-2}F\Big(q-p,q-1;2q-1;\frac{\delta}{x}\Big)+\frac{x^{q-1}}{2q-2}\frac{\Gamma(2q-1)\Gamma(p)}{\Gamma(p+q-1)\Gamma(q)}.$$

Здесь использована формула [11, с. 112]

$$F(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},\quad c\neq 0,-1,-2,\dots,\mathrm{Re}(c)>\mathrm{Re}(a+b).$$

Итак, с учётом выполненных преобразований $I_{1\,\delta}(x)$ можно представить следующим образом:

$$I_{1\,\delta}(x)=I_{11\,\delta}(x)-\frac{1}{\Gamma(2q-1)}x^{q-1}\Big(\frac{\delta}{x}\Big)^{2q-2}\tau_2(x)F\Big(q-p,q-1;2q-1;\frac{\delta}{x}\Big)+$$
$$+\frac{x^{q-1}\Gamma(p)}{\Gamma(p+q-1)\Gamma(q)}\tau_2(x)-$$
$$-\frac{2q-2}{\Gamma(2q-1)}x^{2-p-q}\int_0^{x-\delta}\frac{\tau_2(x)-\tau_2(t)}{(x-t)^{3-2q}}t^{p-1}\times$$
$$\times F\Big(p+q-2,q-1;2q-2;\frac{x-t}{x}\Big)dt.$$

С учётом формул [11, с. 76, 118]

$$F(a,b;c;z)=(1-z)^{-b}F\Big(c-a,b;c;\frac{z}{z-1}\Big),$$
$$F(a,b;2b;z)=\Big(1-\frac{z}{2}\Big)^{-a}F\Big[\frac{a}{2},\frac{1}{2}+\frac{a}{2};b+\frac{1}{2};\Big(\frac{z}{2-z}\Big)^2\Big],$$

переходя к пределу при $\delta\to 0$, имеем

$$I_1(x)=x^{q-1}\frac{\Gamma(p)\tau_2(x)}{\Gamma(p+q-1)\Gamma(q)}+$$

$$+\frac{(2-2q)2^{q-p}}{\Gamma(2q-1)}x^{1-p}\int_0^x \frac{\tau_2(x)-\tau_2(t)}{(x-t)^{3-2q}}(t+x)^{p-q}\times$$
$$\times F\Big(\frac{q-p}{2},\frac{q-p+1}{2};q-\frac{1}{2};\Big(\frac{t-x}{t+x}\Big)^2\Big)\,dt.$$

Используя формулу автотрансформации

$$F(a,b;c;z)=(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c;z),$$

окончательно получим

$$I_1(x)=\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q-1)\Gamma(q)}x^{q-1}\tau_2(x)+$$
$$+\frac{(2-2q)2^{p+q-2}}{\Gamma(2q-1)}\int_0^x \frac{\tau_2(x)-\tau_2(t)}{(x-t)^{3-2q}}(t+x)^{2-p-q}t^{p-1}\times$$
$$\times F\Big(\frac{p+q-1}{2},\frac{p+q-2}{2};q-\frac{1}{2};\Big(\frac{t-x}{t+x}\Big)^2\Big)\,dt. \quad (19)$$

В работе [2] доказано, что $I_1(x_0)>0$, если $x=x_0$ — точка положительного максимума, и $I_1(x_0)<0$, если $x=x_0$ — точка отрицательного минимума.

Учитывая условия (17), соотношения (16) и (19), заключаем, что лемма 2 справедлива. $\square$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (17),

$$\frac{1}{2}<p,\quad q<1,\quad q\geqslant p,\quad \frac{1-2q}{4}<a<0.$$

Тогда, если существует решение исследуемой задачи для уравнения (1), *то оно единственно.*

Доказательство теоремы 1 следует из лемм 1 и 2, принципа экстремума для нелокального параболического уравнения [13, с. 47] и условия сопряжения (7).

2. Существование решения задачи. Существование решения исходной задачи проведем для случая $p=q$.

Из равенства (15) имеем

$$\tau_2(x)=m_1x^{1-p}\big(I_{0+}^{2-2p,0,p-1}\nu_2(t)\big)(x)+m_2g_2(x), \quad (20)$$

где

$$m_1=-\frac{Ak_2+C}{Ak_1+B},\quad m_2=\frac{1}{Ak_1+B}.$$

В силу легко проверяемых равенств

$$x^{\alpha+\beta+\eta}\big(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi(t)\big)(x)=\big(I_{0+}^{\alpha,-\alpha-\eta,-\alpha-\beta}\varphi(t)\big)(x),\quad \alpha>0,\ \beta,\ \eta\in\mathbb{R},$$
$$\big(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi(t)\big)(x)=\big(I_{0+}^{\alpha,\gamma,\delta}t^{\gamma-\delta}\varphi(t)\big)(x),\quad \alpha>0,\ \gamma,\ \delta\in\mathbb{R},$$

получим

$$x^{1-p}\big(I_{0+}^{2-2p,0,p-1}\nu_2(t)\big)(x) = \big(I_{0+}^{2-2p,p-1,2p-2}\nu_2(t)\big)(x) = \\ = \big(I_{0+}^{2-2p,2p-2,p-1}t^{p-1}\nu_2(t)\big)(x) = \big(I_{0+}^{2-2p}t^{p-1}\nu_2(t)\big)(x).$$

Следовательно, (20) принимает вид

$$\tau_2(x) = m_1\big(I_{0+}^{2-2p}t^{p-1}\nu_2(t)\big)(x) + m_2 g_2(x). \tag{21}$$

Дифференцируя дважды обе части (21) по x, учитывая (3) и равенство

$$\frac{d^2}{dx^2}\big(I_{0+}^{2-2p}\varphi(t)\big)(x) = \big(D_{0+}^{2p}\varphi(t)\big)(x),$$

имеем

$$\tau_2''(x) = m_1\big(D_{0+}^{2p}t^{p-1}\nu_2(t)\big)(x) + m_2 g_2''(x).$$

Согласно (6), $\tau_1(x) = \tau_2(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\nu_1(x) = x^{p-1}\nu_2(x)$ при $0 < x < 1$. Обозначив $\tau_1(x) = \tau_2(x) = \tau(x)$ и $\nu_1(x) = x^{p-1}\nu_2(x) = \nu(x)$ и учитывая соотношение (10), придём к дифференциальному уравнению дробного порядка $2p$, $1 < 2p < 2$:

$$\big(D_{0+}^{2p}\nu(t)\big)(x) - \lambda\nu(x) = \frac{g_2''(x)}{Ak_2 + C}, \quad \lambda = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{m_1}. \tag{22}$$

На основании результатов монографий [1, с. 302; 14, с. 226–227] общее решение уравнения (22) имеет вид

$$\nu(x) = c_1 x^{2p-1}E_{2p,2p}(\lambda x^{2p}) + c_2 x^{2p-2}E_{2p,2p-1}(\lambda x^{2p}) + \\ + \int_0^x \frac{g_2''(t)}{Ak_2 + C}(x-t)^{2p-1}E_{2p,2p}\big(\lambda(x-t)^{2p}\big)dt,$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные,

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{\Gamma(\alpha m + \beta)} \quad (\alpha > 0, \beta \in R)$$

— функция Миттаг—Леффлера [1, с. 33; 15, с. 117].

Используя результаты работы [2], запишем явное решение поставленной задачи:

$$u(x,y) = \int_0^y \frac{\partial G}{\partial \xi}\Big|_{\xi=0}\varphi_1(\eta)d\eta - \int_0^y \frac{\partial G}{\partial \xi}\Big|_{\xi=1}\varphi_2(\eta)d\eta + \\ + c_1 m_1\int_0^1 G(x,y;t,0)E_{2p,2}(\lambda t^{2p})dt - \\ - \int_0^1 G(x,y;t,0)\int_0^1 (x-s)E_{2p,2}\big(\lambda(t-s)^{2p}\big)g_2''(s)ds\,dt + \int_0^1 G(x,y;t,0)g_2(t)dt,$$

где

$$c_1 = -\frac{1}{m_1E_{2p,2}(\lambda)}\bigg(g_2(1) + \int_0^1(1-t)E_{2p,2}\big(\lambda(1-t)^{2p}\big)g_2''(t)dt\bigg).$$

Это завершает доказательство существования решения исследуемой задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ/ REFERENCES

1. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск: Наука и техника, 1987. 688 с. [S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications], Minsk, Nauka i Tekhnika, 1987, 688 pp. (In Russian)]
2. А. А. Килбас, О. А. Репин, "О разрешимости краевой задачи для уравнения смешанного типа с частной дробной производной Римана—Лиувилля" // *Дифференц. уравнения*, 2010. Т. 46, № 10. С. 1453–1460; A. A. Kilbas, O. A. Repin, "Solvability of a boundary value problem for a mixed-type equation with a partial Riemann–Liouville fractional derivative", *Differ. Equ.*, 2010, vol. 46, no. 10, pp. 1457–1464 doi: 10.1134/S0012266110100095.
3. А. А. Килбас, О. А. Репин, "Аналог задачи Трикоми для дифференциального уравнения с частными производными, содержащего уравнение диффузии дробного порядка" // *Докл. АМАН*, 2010. Т. 12, № 1. С. 31–39. [A. A. Kilbas, O. A. Repin, "Analog of the Tricomi problem for differential equations with partial derivatives containing fractional diffusion equation", *Dokl. AMAN*, 2010, vol. 12, no. 1, pp. 31–39 (In Russian)].
4. M. Saigo, "A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions", *Math. Rep. College General Educ., Kyushu Univ.*, 1978, vol. 11, no. 2, pp. 135–143.
5. А. В. Псху, *Уравнения в частных производных дробного порядка.* М.: Наука, 2005. 199 с. [A. V. Pskhu, *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka* [Partial Differential Equations of Fractional Order], Moscow, Nauka, 2005, 199 pp. (In Russian)]
6. С. Х. Геккиева, "Аналог задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с дробной производной" // *Изв. Кабар.-Балкар. научн. центра РАН*, 2001. № 2(7). С. 78–80. [S. Kh. Gekkieva, "An Analog of the Tricomi Problem for an Equation of Mixed Type with a Fractional Derivative", *Izv. Kabard.-Balkar. Nauchn. Tsentra RAN*, 2001, no. 2(7), pp. 78–80 (In Russian)].
7. А. М. Гордеев, "Некоторые краевые задачи для обобщенного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу" // *Волжск. мат. сб.*, 1968. № 6. С. 56–61. [A. M. Gordeev, "Some Boundary Value Problems for the Generalized Euler–Poisson–Darboux Equation", *Volzh. Mat. Sb.*, 1968, no. 6, pp. 56–61 (In Russian)].
8. Т. В. Шувалова, "Некоторые композиционные свойства обобщенных операторов дробного дифференцирования" // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006. № 42. С. 45–48 doi: 10.14498/vsgtu409. [T. V. Shuvalova, "Some Compositional Properties of Generalized Fractional Differentiation Operators", *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2006, no. 42, pp. 45–48 (In Russian)].
9. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды.* Т. 3: Специальные функции. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986. 800 с. [A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev, *Integraly i ryady* [Integrals and Series], V. 3, Spetsialnye funktsii. Dopolnitelnye glavy [Special features. Additional chapters], Moscow, Nauka, 1986, 800 pp. (In Russian)]
10. О. А. Репин, Т. В. Шувалова, "О единственности решения нелокальной краевой задачи для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения" / *Современные методы физико-математ. наук*, Труды междун. конф. Т. 1. Орёл, 2006. 106–110 с. [O. A. Repin, T. V. Shuvalova, "On the Uniqueness of a Solution of a Nonlocal Boundary Value Problem for an Equation of Mixed Type with Two Degeneration Lines", *Tr. mezhdunar. konf. "Sovremennye metody fiz.-mat. nauk"* [Proc. Int. Conf. "Modern Methods in Physical and Mathematical Sciences"]. V. 1, Orel, 2006, pp. 106–110 (In Russian)].
11. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции.* Т. 1: Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.; A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions* (Bateman Manuscript Project), New York, McGraw-Hill, 1953.
12. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.; I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products.* 6th ed, San Diego, CA, Academic Press, 2000, xlvii+1163 pp.

13. В. А. Нахушева, *Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов.* М.: Nauka, 2006. 173 с. [V. A. Nakhusheva, *Differentsial'nye uravneniya matematicheskikh modeley nelokal'nykh protsessov* [Differential Equations of Mathematical Models of Non-Local Processes], Moscow, Nauka, 2006, 173 pp. (In Russian)]
14. A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 204, Amsterdam, Elsevier Science B. V., 2006, xvi+523 pp. doi: 10.1016/S0304-0208(06)80001-0.
15. М. М. Джрбашян, *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области.* М.: Наука, 1966. 672 с. [M. M. Dzhrbashyan, *Integral'nye preobrazovaniya i predstavleniya funktsii v kompleksnoi oblasti* [Integral Transforms and Representations of Functions in a Complex Domain], Moscow, Nauka, 1966, 672 pp. (In Russian)]

Поступила в редакцию 24/IV/2014;
в окончательном варианте — 11/V/2014;
принята в печать — 16/V/2014.

MSC: 35M12, 35R11

BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH SHIFT FOR ONE PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION CONTAINING PARTIAL FRACTIONAL DERIVATIVE

O. A. Repin[1,2]

[1] Samara State Economic University,
141, Sovetskoy Armii st., Samara, 443090, Russian Federation.
[2] Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

We investigate a nonlocal boundary value problem for the equation of special type. For $y > 0$ it is the equation of fractional diffusion, which contains partial fractional derivative of Riemann-Liouville. For $y < 0$ it is the hyperbolic type equation with two perpendicular lines of degeneracy. The conditions of existence and uniqueness of the solution of the boundary value problem are formulated. The uniqueness of the solution of the problem is proved using the extremum principle and the use of generalized operator of fractional integro-differential in M. Saygo sense. The existence of a solution is reduced to the solvability of differential equations of fractional order, which solution is written out explicitly.

Keywords: *boundary value problem, generalized operator of fractional integro-differentiation, Gauss hypergeometric function, Mittag–Leffler function.*

Received 24/IV/2014;
received in revised form 11/V/2014;
accepted 16/V/2014.

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1318

Citation: O. A. Repin, "Boundary Value Problem with Shift for One Partial Differential Equation Containing Partial Fractional Derivative", *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 2 (35), pp. 22–32. doi: 10.14498/vsgtu1318. (In Russian)

Author Details: *Oleg A. Repin* (Dr. Phys. & Math. Sci.), Head of Dept., Dept. of Mathematical Statistics and Econometrics[1]; Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science[2].
E-mail address: matstat@mail.ru