УДК 539.376

ОЦЕНКА НАДЁЖНОСТИ СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ ПО КРИТЕРИЮ ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ

Н. Н. Попов, Л. В. Коваленко

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Разработана методика вероятностной оценки надёжности микронеоднородной толстостенной трубы на основе решения стохастической краевой задачи ползучести. Реологические свойства материала при этом описывались при помощи случайной функции одной переменной (радиуса r). Для изучения процесса разрушения материала при ползучести введён параметр повреждённости $0 \leqslant \omega(t) \leqslant 1$ и принята степенная зависимость скорости изменения $\omega(t)$ от эквивалентного напряжения $\sigma_э$, которое определялось по критерию Сдобырева. Оценка надёжности производится по интегрально-среднему значению эквивалентного напряжения. Найдено случайное время до разрушения и его функция распределения, которая аппроксимировалась логарифмически нормальным законом. Приведён пример вычисления вероятности безотказной работы для толстостенной трубы из микронеоднородного материала. Полученные результаты позволяют оценивать надёжность стохастически неоднородных осесимметричных элементов конструкций при условии, что из эксперимента будут получены необходимые статистические данные.

Ключевые слова: *установившаяся ползучесть, толстостенная труба, микронеоднородный материал, стохастическая краевая задача, длительная прочность, функция надёжности.*

В условиях длительного действия нагрузки при повышенной температуре с некоторого момента скорость ползучести начинает возрастать (третья стадия), и процесс ползучести заканчивается разрушением. В силу стохастической неоднородности материала время до разрушения будет являться случайной величиной. Для описания процесса разрушения при ползучести введем параметр поврежденности материала $0 \leqslant \omega(t) \leqslant 1$ и используем кинетическое уравнение Работнова [1].

$$\frac{d\omega}{dt} = B\Big(\frac{\sigma_э}{1-\omega}\Big)^k, \tag{1}$$

где $\sigma_э$ — эквивалентное напряжение, задаваемое в виде некоторого соотношения между компонентами тензора напряжений; B, k — постоянные материа-

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1202

Образец цитирования: Н. Н. Попов, Л. В. Коваленко, “Оценка надёжности стохастически неоднородной толстостенной трубы по критерию длительной прочности” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 1 (34). С. 86–92. doi: 10.14498/vsgtu1202.

Сведения об авторах: *Николай Николаевич Попов* (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. прикладной математики и информатики. *Людмила Викторовна Коваленко* (к.ф.-м.н.), ассистент, каф. прикладной математики и информатики.

E-mail addresses: ponick25@gmail.com (N.N. Popov, *Corresponding author*), flytitmouse@mail.ru (L.V. Kovalenko)

ла.

В данной статье рассматривается оценка надёжности по критерию длительной прочности толстостенной трубы из микронеоднородного материала, находящейся под действием внутреннего давления q. Предполагается, что в трубе осуществляется плоская деформация и в традиционной цилиндрической системе координат полагается, что компонента тензора деформаций $\varepsilon_z = 0$. При этом реологические свойства материала описываются при помощи случайной функции радиуса r.

В работе [2] рассматривалось решение стохастической краевой задачи установившейся ползучести толстостенной трубы. Определяющие соотношения для деформаций ползучести ε_r и ε_φ принимаются в соответствии с теорией вязкого течения в стохастической форме

$$\dot{\varepsilon}_\varphi = -\dot{\varepsilon}_r = cS^{n-1}(\sigma_\varphi - \sigma_r)(1 + \alpha U),$$

где σ_r и σ_φ — радиальная и тангенциальная компоненты тензора напряжений, $S = (\sqrt{3}/2)(\sigma_\varphi - \sigma_r)$ — интенсивность напряжений, $U(r)$ — случайная однородная функция, описывающая флуктуации реологических свойств материала с математическим ожиданием $\langle U \rangle = 0$ и дисперсией $\langle U^2 \rangle = 1$, α — коэффициент вариации этих свойств (малый параметр), c, n — постоянные материала.

Аналогичная задача по оценке надёжности толстостенной трубы по критерию деформационного типа, когда ограничение накладывалось на случайное радиальное перемещение, рассматривалась в работе [3].

Случайные напряжения σ_r и σ_φ, найденные в работе [2] на основе первого приближения метода малого параметра, имеют вид:

$$\sigma_r = A\left(1 - \left(\frac{\beta}{r}\right)^{2/n}\right) + \frac{2A\beta^{2/n}\alpha}{n^2}\left[(1 - r^{-2/n})H - I(r)\right], \tag{2}$$

$$\sigma_\varphi = A\left[1 + \left(\frac{2}{n} - 1\right)\left(\frac{\beta}{r}\right)^{2/n}\right] + \\ + \frac{2A\beta^{2/n}\alpha}{n^2}\left[\left(1 + \left(\frac{2}{n} - 1\right)r^{-2/n}\right)H - I(r) - Ur^{-2/n}\right], \tag{3}$$

$$A = \frac{q}{\beta^{2/n} - 1}, \quad I(r) = \int_1^r U(x)\, x^{-1-2/n} dx, \quad H = \frac{I(\beta)}{1 - \beta^{-2/n}}.$$

Здесь r — безразмерный радиус ($r \in [1, \beta]$), $\beta = b/a$, a и b — внутренний и внешний радиусы трубы, q — давление.

В работе [2] также найдены статистические характеристики случайных напряжений σ_r и σ_φ с математическими ожиданиями

$$\langle\sigma_r\rangle = A\left(1 - \left(\frac{\beta}{r}\right)^{2/n}\right), \quad \langle\sigma_\varphi\rangle = A\left[1 + \left(\frac{2}{n} - 1\right)\left(\frac{\beta}{r}\right)^{2/n}\right]$$

и дисперсиями

$$D[\sigma_r] = \frac{4A^2\beta^{4/n}\alpha^2}{n^4}\left[(1 - r^{-2/n})^2\langle H^2\rangle - 2(1 - r^{-2/n})\langle I(r)H\rangle + \langle I^2(r)\rangle\right], \tag{4}$$

$$D[\sigma_\varphi] = \frac{4A^2\beta^{4/n}\alpha^2}{n^4}\Big[\Big(1+\Big(\frac{2}{n}-1\Big)r^{-2/n}\Big)^2\langle H^2\rangle +$$
$$+\langle I^2(r)\rangle + r^{-4/n} - 2\Big(1+\Big(\frac{2}{n}-1\Big)r^{-2/n}\Big)\langle I(r)H\rangle -$$
$$-2\Big(1+\Big(\frac{2}{n}-1\Big)r^{-2/n}\Big)\langle HU\rangle r^{-2/n} + 2r^{-2/n}\langle I(r)U\rangle\Big], \quad (5)$$

где

$$\langle H^2\rangle = \frac{1}{\big(1-\beta^{-2/n}\big)^2}\int_1^\beta\int_1^\beta K(x_2-x_1)x_1^{-1-2/n}x_2^{-1-2/n}dx_1dx_2,$$
$$\langle I^2(r)\rangle = \int_1^r\int_1^r K(x_2-x_1)x_1^{-1-2/n}x_2^{-1-2/n}dx_1dx_2,$$
$$\langle I(r)H\rangle = \frac{1}{1-\beta^{-2/n}}\int_1^r\int_1^\beta K(x_2-x_1)x_1^{-1-2/n}x_2^{-1-2/n}dx_1dx_2,$$
$$\langle HU\rangle = \frac{1}{1-\beta^{-2/n}}\int_1^\beta K(x-r)x^{-1-2/n}dx,$$
$$\langle I(r)U\rangle = \int_1^r K(x-r)x^{-1-2/n}dx,$$

$K(x_2-x_1)$ — корреляционная функция случайной функции $U(r)$.

Эквивалентное напряжение $\sigma_э$, входящее в кинетическое уравнение (1), будем определять по критерию Сдобырева, который довольно часто применяется для описания закономерности изменения длительной прочности при сложном напряженном состоянии [4]:

$$\sigma_э = \frac{\sigma_1 + S}{2},$$

где σ_1 — наибольшее нормальное напряжение, которое для толстостенной трубы равно σ_φ.

В общем случае эквивалентное напряжение $\sigma_э$ является случайной функцией радиуса r и времени t. Её характеристики можно найти из соответствующей стохастической краевой задачи, при решении которой возникают непреодолимые трудности. В связи с этим предлагается использовать введённое в работе [5] интегрально-среднее значение эквивалентного напряжения:

$$\overline{\sigma}_э = \frac{1}{\beta-1}\int_1^\beta \sigma_э(r)dr. \quad (6)$$

В работе [6] показано, что в детерминированной постановке $\sigma_э$ является практически постоянной для толстостенной трубы при ползучести от момента $t=0$ вплоть до разрушения для широкого диапазона изменения параметров n и β. Поэтому вводится гипотеза, что и в стохастической постановке $\overline{\sigma}_э$ считается случайной величиной, но не зависящей от времени, которую можно вычислить, например, на стадии установившейся ползучести. В дальнейшем теория длительной прочности строится на основе интегрально-среднего значения эквивалентного напряжения $\overline{\sigma}_э$, статистические характеристики которого могут быть найдены исходя из (2) и (3).

Согласно (2), (3) и (6) величина эквивалентного напряжения $\overline{\sigma}_э$ определяется формулой

$$\overline{\sigma}_э = \frac{1}{2(\beta-1)}\int_1^\beta \Big(\sigma_\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_\varphi - \sigma_r)\Big)dr =$$
$$= \frac{A}{2}\Big[1 + \frac{\beta^{2/n}\Big(1-\frac{2}{n}\Big)}{\beta-1}\Big(\frac{2+\sqrt{3}}{n}-1\Big)\Big(\frac{1}{\beta^{1-2/n}}-1\Big)\Big] +$$
$$+ \frac{A\beta^{2/n}\alpha}{n^2(\beta-1)}\int_1^\beta \Big[\Big(1+\Big(\frac{2+\sqrt{3}}{n}-1\Big)r^{-2/n}\Big)H -$$
$$- I(r) - \Big(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)Ur^{-2/n}\Big]dr. \qquad (7)$$

Решая дифференциальное уравнение (1) при $\omega(0) = 0$ и считая, что в момент разрушения $\omega(t_р) = 1$, можно найти случайное время до разрушения

$$t_р = \frac{1}{B(k+1)\overline{\sigma}_э^k}.$$

Время до разрушения $t_р$ было аппроксимировано логарифмически нормальным законом, функция распределения которого имеет вид

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}d}\int_0^t \frac{1}{z}\exp\Big[-\frac{(\ln z - m)^2}{2d^2}\Big]dz. \qquad (8)$$

Для того чтобы найти параметры m и d распределения (8), разложим величину $\ln\sigma_э$ по малому параметру α и ограничимся членами только первого порядка относительно α:

$$\ln\sigma_э = \ln\big(\overline{\sigma}_э^0 + \alpha\overline{\sigma}_э^*\big) = \ln\overline{\sigma}_э^0 + \ln\Big(1+\frac{\alpha\overline{\sigma}_э^*}{\overline{\sigma}_э^0}\Big) = \ln\overline{\sigma}_э^0 + \frac{\alpha\overline{\sigma}_э^*}{\overline{\sigma}_э^0} + o(\alpha), \qquad (9)$$

где

$$\overline{\sigma}_э^0 = \langle\overline{\sigma}_э\rangle = \frac{A}{2}\Big[1+\frac{\beta^{2/n}\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\beta-1}\Big(\frac{2+\sqrt{3}}{n}-1\Big)\Big(\frac{1}{\beta^{1-2/n}}-1\Big)\Big], \quad \langle\overline{\sigma}_э^*\rangle = 0.$$

Используя разложение (9), вычислим параметры распределения (8):

$$m = \langle\ln t_p\rangle = -\ln\left(B(k+1)\right) - k\ln\overline{\sigma}_э^0, \quad d^2 = D\left[\ln t_p\right] = \frac{k^2\alpha^2}{\overline{\sigma}_э^0}D\left[\overline{\sigma}_э^*\right],$$

где дисперсия $D\left[\overline{\sigma}_э^*\right]$ определяется согласно (7):

$$D\left[\overline{\sigma}_э^*\right] = D\left[\overline{\sigma}_э\right] = \frac{1}{\beta-1}\int_1^\beta \Big[\frac{1}{4}\Big(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^2 D\left[\sigma_\varphi\right] + \frac{3}{16}D\left[\sigma_r\right] - \frac{\sqrt{3}}{2}\langle\sigma_\varphi\sigma_r\rangle\Big]dr.$$

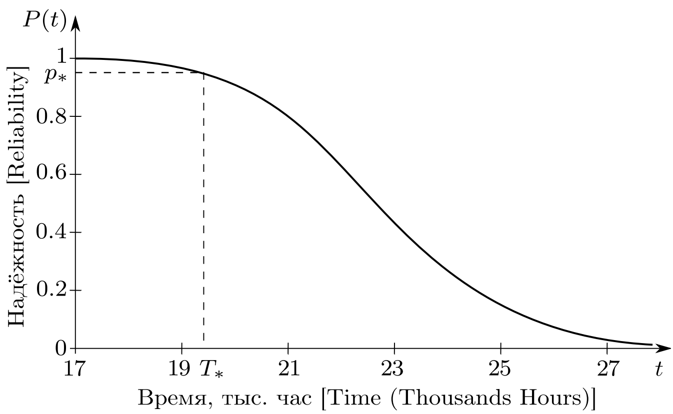
Здесь величины $D\left[\sigma_\varphi\right]$ и $D\left[\sigma_r\right]$ вычисляются по формулам (4) и (5) соответственно. Момент $\langle\sigma_\varphi\sigma_r\rangle$ можно найти, используя (2) и (3):

$$\langle\sigma_\varphi\sigma_r\rangle = \frac{4A^2\beta^{4/n}\alpha^2}{n^2}\Big[(1-r^{-2/n})\Big(1+\Big(\frac{2}{n}-1\Big)r^{-2/n}\Big)\langle H^2\rangle - \\ - 2\Big(1+\Big(\frac{1}{n}-1\Big)r^{-2/n}\Big)\langle I(r)H\rangle + \langle I^2(r)\rangle + \\ + \langle I(r)U\rangle r^{-2/n} - \big(1-r^{-2/n}\big)r^{-2/n}\langle HU\rangle.$$

Рассмотрим модельную задачу оценки надёжности для толстостенной трубы из стали 12ХМФ при $T = 590\,^\circ\mathrm{C}$ с постоянными материала $n = 7.1$, $c = 2.762\cdot10^{-21}$, внутренним и внешним радиусами $a = 14$ мм и $b = 21$ мм соответственно, находящейся под действием внутреннего давления $q = 70$ МПа. Исходные данные для расчёта взяты из монографии [7]. Параметры кинетического уравнения (1) считались равными $B = 2.54\cdot10^{-12}$, $k = 3.04$. Корреляционная функция случайной функции $U(r)$ была взята в виде

$$K(r) = \exp\left(-10|r|\right)\left(\cos 20r + 0.5\sin 20|r|\right), \quad r = x_2 - x_1.$$

На рисунке представлена функция надёжности $P(t) = 1 - F(t)$, где $F(t)$ определяется по формуле (8) при степени неоднородности материала $\alpha = 0.3$. Функцию надёжности $P(t)$ можно использовать для назначения ресурса толстостенной трубы. Назначенный ресурс T_* определяют так, чтобы вероятность обеспечения T_* была равна заданному значению p_* вероятности безотказной работы (пунктирные линии на графике). При заданном значении $p_* = 0.95$ ресурс для рассматриваемой трубы составляет 19 475 часов.



Функция надёжности $P(t)$ [Reliability function *vs* time]

Полученные результаты позволяют оценивать надёжность стохастически неоднородных осесимметричных элементов конструкций при условии, что необходимые статистические данные будут получены экспериментальным путём.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 13–01–00699–а).

This work is supported by RFBR, project no. 13–01–00699–a.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ/ REFERENCES

1. Ю. Н. Работнов, *Ползучесть элементов конструкций*, М.: Наука, 1966. 752 с. [Yu. N. Rabotnov, *Polzuchest' elementov konstruktsiy* [Creep of Structural Elements], Moscow, Nauka, 1966, 752 pp. (In Russian)]
2. Н. Н. Попов, В. П. Радченко, "Построение аналитического решения стохастической краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы" // *ПММ*, 2012. Т. 76, № 6. С. 1023–1031; N. N. Popov, V. P. Radchenko, "Analytical solution of the stochastic steady-state creep boundary value problem for a thick-walled tube", *J. Appl. Math. Mech.*, 2012, vol. 76, no. 6, pp. 738–744. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2013.02.011.
3. Н. Н. Попов, Л. В. Коваленко, "Оценка надёжности осесимметричных стохастических элементов конструкций при ползучести по теории выбросов" // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. № 2(27). С. 72–77. doi: 10.14498/vsgtu1090. [N. N. Popov, L. V. Kovalenko, "Evaluation of reliability of axisymmetric stochastic elements of constructions under creepage on the basis of theory of runs", *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2012, no. 2(27), pp. 72–77. (In Russian)].
4. В. П. Сдобырев, "Критерий длительной прочности для некоторых жаропрочных сплавов при сложном напряжённом состоянии" // *Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение*, 1959. № 6. С. 93–99. [V. P. Sdobyrev, "The criterion of long-term strength for certain heat resisting alloys for a complex stress state", *Izv. AN SSSR, OTN, Mekhanika i mashinostroenie*, 1959, no. 6, pp. 93–99. (In Russian)].
5. А. Н. Локощенко, С. Ф. Шестериков, "Стандартизация критериев длительной прочности" / *Унифицированные методы определения ползучести и длительной прочности.* Вып. 7, М.: Изд-во стандартов, 1986. С. 3–15. [A. N. Lokoshchenko, C. F. Shesterikov, "Standardization of long-term strength criteria", *Unifitsirovannye metody opredeleniya polzuchesti i dlitel'noy prochnosti* [Standardized Methods for the Determination of Creep and Long-Term Strength]. Issue. 7, Moscow, Izd. Standartov, 1986, pp. 3–15. (In Russian)].
6. В. П. Радченко, Е. В. Башкинова, С. Н. Кубышкина, "Об одном подходе к оценке длительной прочности толстостенных труб на основе интегрально-средних напряженных состояний" // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2002. № 16. С. 96–104. doi: 10.14498/vsgtu105. [V. P. Radchenko, E. V. Bashkinova, S. N. Kubyshkina, "On one approach to estimate of long-term strength for thick-walled pipe based on integral-average stress states", *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2002, no. 16, pp. 96–104. (In Russian)].
7. В. П. Радченко, Ю. А. Еремин, *Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций*, М.: Машиностроение-1, 2004. 265 с. [Reologicheskoe deformirovanie i razrushenie materialov i elementov konstruktsiy [Rheological Strain and Fracture of Materials and Structural Elements], Moscow, Mashinostroenie-1, 2004, 265 pp. (In Russian)]

Поступила в редакцию 20/XII/2013;
в окончательном варианте — 21/II/2014;
принята в печать — 26/II/2014.

MSC: 74D10, 74S60; 74R20, 74E35, 74E05

RELIABILITY EVALUATION OF STOCHASTICALLY HETEROGENEOUS THICK-WALLED PIPE BY LONG-TERM STRENGTH CRITERION

N. N. Popov, L. V. Kovalenko

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

We have developed a method of probabilistic reliability evaluation of microheterogeneous thick-walled pipe, based on the already received solution of the stochastic creep boundary value problem. The rheological properties of the material were described using random function of one variable (radius r). Damage parameter $0 \leqslant \omega(t) \leqslant 1$ was introduced here to study the process of degradation of the material during creep stage. Also the power law of the rate of $\omega(t)$ change on the equivalent stress σ_e, determined by Sdobyrev criterion, is assigned. The reliability evaluation is made by the mean integral value of the equivalent stress. We have found a random time before destruction and its distribution function, which was approximated by lognormal law. The problem of the probability of failure-free operation was calculated for a thick-walled microheterogeneous pipe with the specified parameters. The obtained results allow to evaluate reliability of stochastically inhomogeneous axisymmetric structural elements if necessary statistical data are obtained from the experiment.

Keywords: *steady-creep state, thick-walled pipe, microheterogeneous material, stochastic boundary value problem, long-term strength, reliability function.*

Received 20/XII/2013;
received in revised form 21/II/2014;
accepted 26/II/2014.

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1202

Citation: N. N. Popov, L. V. Kovalenko, “Reliability Evaluation of Stochastically Heterogeneous Thick-walled Pipe by Long-term Strength Criterion”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 1 (34), pp. 86–92. doi: 10.14498/vsgtu1202. (In Russian)

Authors Details: *Nikolay N. Popov* (Cand. Phys. & Math. Sci.), Associate Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science. *Ludmila V. Kovalenko* (Cand. Phys. & Math. Sci.), Assistant, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.

E-mail addresses: ponick25@gmail.com (N.N. Popov, *Corresponding author*), flytitmouse@mail.ru (L.V. Kovalenko)