УДК 517.968.21

ДВОЙНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Т. К. Юлдашев

Сибирский государственный аэрокосмический университет им. ак. М. Ф. Решетнева,
Россия, 660014, Красноярск, пр. имени газеты «Красноярский рабочий», 31.

Рассматривается двойная обратная задача для уравнений в частных производных. Предлагается методика изучения однозначной разрешимости двойной обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма эллиптического типа с вырожденным ядром. Сначала модифицируется и развивается метод вырожденного ядра интегрального уравнения Фредгольма для случая интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма эллиптического типа. Получится дифференциально-алгебраическая система уравнений. Обратная задача называется двойной, если в задачу входит восстановление двух неизвестных функций по заданным дополнительным условиям. Вторая функция восстановления входит в первую функцию восстановления нелинейно. Относительно первой функции восстановления получится неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка, которое решается методом вариации произвольных постоянных при начальных условиях. Относительно второй функции восстановления получится нелинейное интегральное уравнение первого рода, которое с помощью специального неклассического интегрального преобразования сводится к нелинейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Далее используется метод последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающих отображений.

Ключевые слова: *двойная обратная задача, эллиптическое уравнение, уравнение Фредгольма с вырожденным ядром, неоднородное дифференциальное уравнение, однозначная разрешимость.*

Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, приводит к изучению прямых и обратных задач для уравнений математической физики. Теория начальных, смешанных и краевых задач для уравнений в частных производных в силу её прикладной важности в настоящее время является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений в частных производных. При исследовании таких задач в теории дифференциальных уравнений применяются различные методы (см., напр. [1–10]).

Теория обратных задач представляет собой активно развивающееся направление современной теории дифференциальных уравнений. Интенсивное исследование обратных задач в значительной степени обусловлено необходимостью разработки математических методов решения обширного класса

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1306

Образец цитирования: Т. К. Юлдашев, “Двойная обратная задача для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма эллиптического типа” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 2 (35). С. 39–49. doi: 10.14498/vsgtu1306.

Сведения об авторе: *Турсун Камалдинович Юлдашев* (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. высшей математики.

E-mail address: tursunbay@rambler.ru

важных прикладных проблем, связанных с обработкой и интерпретацией наблюдений. Обратную задачу назовем линейной, если функция восстановления входит в данное уравнение линейно. Линейные обратные задачи для линейных и нелинейных уравнений в частных производных второго, третьего и более высокого порядков рассматривались многими авторами (см., напр. [3, 9, 11–20]). Нелинейные обратные задачи рассматривались в работах [21–25].

В настоящей работе предлагается методика изучения двойной обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма эллиптического типа с вырожденным ядром. Обратную задачу назовем двойной, если в задачу входит восстановление двух неизвестных функций по заданным дополнительным условиям. Вторая функция восстановления входит в первую функцию восстановления нелинейно. Относительно первой функции восстановления получится неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка, которое решается методом вариации произвольных постоянных при начальных условиях. Относительно второй функции восстановления получится нелинейное интегральное уравнение Вольтерра первого рода, которое с помощью специального неклассического интегрального преобразования сводится к нелинейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода.

1. Постановка задачи. В области $\Omega \equiv \Omega_T \times \mathbb{R}_+$ рассматривается интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма вида

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + \int_0^T K(t,s)\frac{\partial^2 u(s,x)}{\partial x^2}ds = f\left(x, \int_0^\infty K_0(y)\vartheta(y)dy\right) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(0,x) = \phi_1(x), \quad u_t(0,x) = \phi_2(x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

$$u(t,0) = h(t,0) + \frac{t^2}{2}f(0,\gamma) - \sum_{i=1}^n N_{1i}q_i(t), \tag{3}$$

$$u_x(t,0) = h_x(t,0) + \frac{t^2}{2}f_x(0,\gamma) - \sum_{i=1}^n N_{2i}q_i(t) \tag{4}$$

и дополнительными условиями

$$u(t_0,x) = \psi(x), \quad t_0 \in (0;T), \quad x \in \mathbb{R}_+, \tag{5}$$

$$f(0,\gamma) = M_1, \quad f_x(0,\gamma) = M_2, \tag{6}$$

где $f(x,\gamma) \in C^2(\mathbb{R}^2_+)$ — первая функция восстановления; $\vartheta(x)$ — вторая функция восстановления; $\phi_k(x) \in C^2(\mathbb{R}_+)$, $k = 1,2$;

$$K(t,s) = \sum_{i=1}^n a_i(t)b_i(s), \quad 0 < a_i(t), \quad b_i(s) \in C(\Omega_T);$$

N_k, M_k — заданные постоянные, $k = 1,2$; $\Omega_T \equiv [0,T]$, $0 < T < \infty$; $\mathbb{R}^2_+ \equiv \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$; $\mathbb{R}_+ \equiv [0,\infty)$; $h(t,x) = \phi_1(x) + \phi_2(x)t$;

$$q_i(t) = \int_0^t (t-s)a_i(s)ds, \quad \gamma = \int_0^\infty K_0(y)\vartheta(y)dy \geqslant 0, \quad K_0(y) \in C(\mathbb{R}_+).$$

Определение. Решением двойной обратной задачи (1)–(6) называется тройка непрерывных функций $\left\{u(t,x) \in C^{2,2}(\Omega),\, f(x,\gamma) \in C^2(\mathbb{R}^2_+),\, \vartheta(x) \in C(\mathbb{R}_+)\right\}$, удовлетворяющая уравнению (1) и условиям (2)–(6).

Основной подход в данной работе состоит в том, что модифицируется и развивается метод интегрального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром для случая двойной обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных с вырожденным ядром более общего вида.

Отличительной чертой данной работы является то, что обратная задача носит двойной характер. При решении такой обратной задачи (1)–(6) относительно первой восстанавливаемой функции

$$f\left(x, \int_0^\infty K_0(y)\vartheta(y)dy\right)$$

получится неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. Для однозначного определения решения этого уравнения дополнительно заданы два начальных условия (6). Относительно второй функции восстановления $\vartheta(x)$ получится неявное интегральное уравнение, которое с помощью специального неклассического интегрального преобразования сводится к нелинейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода.

2. Начальная задача (1)–(4). В данной работе развивается методика работы [26]. При помощи обозначения

$$c(x) = \int_0^T b(s)\frac{\partial^2 u(s,x)}{\partial x^2}ds \tag{7}$$

интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма (1) перепишется в виде

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^n a_i(t)c_i(x) = f\left(x, \int_0^\infty K_0(y)\vartheta(y)dy\right).$$

Учёт условия (2) и двукратное интегрирование по t в последнем равенстве дают

$$u(t,x) = h(t,x) - \sum_{i=1}^n c_i(x)q_i(t) + \frac{t^2}{2} f\left(x, \int_0^\infty K_0(y)\vartheta(y)dy\right). \tag{8}$$

Дифференцируем (8) два раза по x:

$$u_{xx}(t,x) = h_{xx}(t,x) - \sum_{i=1}^n c_i''(x)q_i(t) + \frac{t^2}{2} f_{xx}\left(x, \int_0^\infty K_0(y)\vartheta(y)dy\right). \tag{9}$$

Подставляя (9) в (7), имеем

$$c_i(x) = \int_0^T b(s)\Bigg[h_{xx}(s,x) - \sum_{j=1}^n c_j''(x)q_j(s) + \\ + \frac{s^2}{2} f_{xx}\left(x, \int_0^\infty K_0(y)\vartheta(y)dy\right)\Bigg]ds. \tag{10}$$

Примем обозначение

$$B_i(x) = \int_0^T b_i(s) h_{xx}(s,x) ds + f_{xx}\left(x, \int_0^\infty K_0(y)\vartheta(y)dy\right) \int_0^T \frac{s^2\, b_i(s)}{2} ds. \quad (11)$$

Пусть

$$A_{ij} = \int_0^T b_i(s) q_j(s) ds > 0. \quad (12)$$

Тогда уравнение (10) запишется в следующем виде:

$$c_i(x) + \sum_{j=1}^n A_{ij} c_j''(x) = B_i(x), \quad i = \overline{1,n}. \quad (13)$$

Соотношения (13) является системой дифференциально-алгебраических уравнений. Она решается при выполнении следующего условия:

$$c_i''(x) = -\lambda \cdot c_i(x), \quad 0 < \lambda = \mathrm{const}, \ i = \overline{1,n}. \quad (14)$$

Тогда из (13) получается следующая система алгебраических уравнений:

$$c_i(x) - \lambda \cdot \sum_{j=1}^n A_{ij} c_j(x) = B_i(x), \quad i = \overline{1,n}. \quad (15)$$

Система алгебраических уравнений (15) однозначно разрешима при любых $B_i(x)$, если

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda A_{11} & -\lambda A_{12} & \dots & -\lambda A_{1n} \\ -\lambda A_{21} & 1-\lambda A_{22} & \dots & -\lambda A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda A_{n1} & -\lambda A_{n2} & \dots & 1-\lambda A_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (16)$$

При выполнении условия (16) решение системы алгебраических уравнений (15) записывается в виде

$$c_i(x) = \frac{\Delta_i(\lambda, x)}{\Delta(\lambda)}, \quad i = \overline{1,n}, \quad (17)$$

где

$$\Delta_i(\lambda, x) = \begin{vmatrix} 1-\lambda A_{11} & \dots & -\lambda A_{1(i-1)} & B_1(x) & -\lambda A_{1(i+1)} & \dots & -\lambda A_{1n} \\ -\lambda A_{21} & \dots & -\lambda A_{2(i-1)} & B_2(x) & -\lambda A_{2(i+1)} & \dots & -\lambda A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda A_{n1} & \dots & -\lambda A_{n(i-1)} & B_n(x) & -\lambda A_{n(i+1)} & \dots & 1-\lambda A_{nn} \end{vmatrix}.$$

С другой стороны, решая дифференциальное уравнение (14), получаем

$$c_i(x) = D_{1i} \cos \nu x + D_{2i} \sin \nu x, \quad (18)$$

где $\nu = \sqrt{\lambda}$, коэффициенты D_{ki} подлежат определению, $k = 1, 2$.

Из (17) и (18) получаем, что решение дифференциально-алгебраической системы уравнений (13) имеет вид

$$c_i(x) = D_{1i} \cos \nu x + D_{2i} \sin \nu x + \frac{\Delta_i(\lambda, x)}{\Delta(\lambda)}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Для определения коэффициентов D_{1i}, D_{2i}, $i = \overline{1, n}$, (18) подставляем в (8):

$$u(t, x) = h(t, x) + \frac{t^2}{2} f\left(x, \int_0^\infty K_0(y)\vartheta(y)dy\right) - \\ - \sum_{i=1}^{n} \left[D_{1i} \cos \nu x + D_{2i} \sin \nu x\right] q_i(t). \quad (19)$$

Здесь используем условия (3), (4). Тогда (19) приобретает вид

$$c_i(x) = \sigma_i(x) + \frac{\Delta_i(\lambda, x)}{\Delta(\lambda)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (20)$$

где

$$\sigma_i(x) = N_{1i} \cos \nu x + \frac{N_{2i}}{\nu} \sin \nu x.$$

Подставляя (20) в (8), имеем

$$u(t, x) = h(t, x) + \frac{t^2}{2} f\left(x, \int_0^\infty K_0(y)\vartheta(y)dy\right) - \\ - \sum_{i=1}^{n} \left(\sigma_i(x) + \frac{\Delta_i(\lambda, x)}{\Delta(\lambda)}\right) q_i(t). \quad (21)$$

Выражение (11) запишем в следующем виде:

$$B_i(x) = B_{1i}(x) + f_{xx}\left(x, \int_0^\infty K_0(y)\vartheta(y)dy\right) \cdot B_{2i},$$

где

$$B_{1i}(x) = \int_0^T b_i(s) h_{xx}(s, x) ds, \quad B_{2i} = \int_0^T \frac{s^2\, b_i(s)}{2} ds.$$

В этом случае, согласно свойству определителя, имеем

$$\Delta_i(\lambda, x) = \Delta_{1i}(\lambda, x) + f_{xx}\left(x, \int_0^\infty K_0(y)\vartheta(y)dy\right) \cdot \Delta_{2i}(\lambda),$$

где

$$\Delta_{1i}(\lambda, x) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda A_{11} & \dots & -\lambda A_{1(i-1)} & B_{11}(x) & -\lambda A_{1(i+1)} & \dots & -\lambda A_{1n} \\ -\lambda A_{21} & \dots & -\lambda A_{2(i-1)} & B_{12}(x) & -\lambda A_{2(i+1)} & \dots & -\lambda A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda A_{n1} & \dots & -\lambda A_{n(i-1)} & B_{1n}(x) & -\lambda A_{n(i+1)} & \dots & 1 - \lambda A_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{2i}(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda A_{11} & \ldots & -\lambda A_{1(i-1)} & B_{21} & -\lambda A_{1(i+1)} & \ldots & -\lambda A_{1n} \\ -\lambda A_{21} & \ldots & -\lambda A_{2(i-1)} & B_{22} & -\lambda A_{2(i+1)} & \ldots & -\lambda A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda A_{n1} & \ldots & -\lambda A_{n(i-1)} & B_{2n} & -\lambda A_{n(i+1)} & \ldots & 1-\lambda A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Тогда (21) приобретает вид

$$u(t,x)=h_0(t,x)+\frac{t^2}{2}f\left(x,\int_0^\infty K_0(y)\vartheta(y)dy\right)-$$
$$-f_{xx}\left(x,\int_0^\infty K_0(y)\vartheta(y)dy\right)\sum_{i=1}^n q_i(t)\frac{\Delta_{2i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad (22)$$

где

$$h_0(t,x)=h(t,x)-\sum_{i=1}^n\Big(\sigma_i(x)+\frac{\Delta_{1i}(\lambda,x)}{\Delta(\lambda)}\Big)q_i(t).$$

Таким образом, нами доказано, что справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть*

1) *выполняются условия* (12), (14) *и* (16);
2) $\max\left\{\left|\phi_k(x)\right| : x\in\mathbb{R}_+\right\}<\infty$, $k=1,2$.

Тогда в области Ω *существует единственное решение начальной задачи* (1)–(4) *при любой ограниченной функции* $f(x,\gamma)\in C^2(\mathbb{R}^2_+)$ *вместе со своей производной второго порядка. Это решение представимо в виде функции* (22).

3. Первая функция восстановления $f(x,\gamma)$. Примем обозначение

$$g(x)=\big(h_0(t_0,x)-\psi(x)\big)\left(\sum_{i=1}^n q_i(t_0)\frac{\Delta_{2i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right)^{-1}.$$

Пусть

$$\omega=\frac{t_0^2}{2}\left(\sum_{i=1}^n q_i(t_0)\frac{\Delta_{2i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right)^{-1}>0. \quad (23)$$

Тогда, используя условие (5), из (22) имеем дифференциальное уравнение относительно $f(x,\,\cdot\,)$:

$$f_{xx}\left(x,\int_0^\infty K_0(y)\vartheta(y)dy\right)-\omega\cdot f\left(x,\int_0^\infty K_0(y)\vartheta(y)dy\right)=g(x). \quad (24)$$

Решая уравнения (24) методом вариации произвольных постоянных и используя условия в (6), получаем

$$f\left(x,\int_0^\infty K_0(y)\vartheta(y)dy\right)=p(x)+\frac{1}{2\mu}\int_0^x g(y)G(x,y)dy, \quad (25)$$

где

$$\mu=\sqrt{\omega},\quad G(x,y)=\exp\{\mu(x-y)\}-\exp\{-\mu(x-y)\},$$

$$p(x) = \frac{\mu M_1 + M_2}{2\mu} \exp\{\mu x\} + \frac{\mu M_1 - M_2}{2\mu} \exp\{-\mu x\}.$$

Таким образом, справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть*

1) *выполняются условия леммы* 1 *и* (23);

2) $\displaystyle\int_0^x |g(y)| \cdot |G(x,y)| dy < \infty,\ x \in \mathbb{R}_+.$

Тогда в $\mathbb{R}^2_+$ *существует единственное решение дифференциального уравнения* (24) *при начальных условиях* (6). *Это решение представимо в виде функции* (25).

4. Вторая функция восстановления $\vartheta(x)$. Правую часть (25) обозначим через $\alpha(x)$. Тогда (25) принимает вид

$$f\left(x, \int_0^\infty K_0(y)\vartheta(y)dy\right) = \alpha(x). \tag{26}$$

Соотношение (26) запишем в следующем виде:

$$\vartheta(x)+\int_0^x H(y)\vartheta(y)dy = \vartheta(x)+\int_0^x H(y)\vartheta(y)dy-f\left(x, \int_0^\infty K_0(y)\vartheta(y)dy\right)+\alpha(x),$$

где $H(x) > 0$ такая, что

$$\exp\{-\eta(x)\} \ll 1, \quad 2\int_0^x H(y)\exp\{-\eta(x-y)\}dy \ll 1, \quad \eta(x) = \int_0^x H(y)dy.$$

Отсюда получим следующее специальное интегральное уравнение Вольтерра второго рода (см. [21–25]):

$$\begin{gathered}\vartheta(x) = \Theta(x;\vartheta) \equiv \\ \equiv \left[\vartheta(x) + \int_0^x H(y)\vartheta(y)dy - f\left(x, \int_0^\infty K_0(y)\vartheta(y)dy\right) + \alpha(x)\right]\exp\{-\eta(x)\}+ \\ +\int_0^x H(y)\exp\{-\eta(x-y)\}\left[\vartheta(x) + \int_0^x H(y)\vartheta(y)dy - f\left(x, \int_0^\infty K_0(y)\vartheta(y)dy\right) + \right. \\ \left. +\alpha(x) - \vartheta(y) - \int_0^y H(z)\vartheta(z)dz + f\left(y, \int_0^\infty K_0(z)\vartheta(z)dz\right) - \alpha(y)\right]dy.\end{gathered} \tag{27}$$

Лемма 3. *Пусть выполняются условия леммы* 2 *и*

1) $f(x,\gamma) \in \mathrm{Bnd}(\delta) \cap \mathrm{Lip}\left\{L_{|\gamma}\right\}$, *где* $0 < L = \mathrm{const}$;

2) $\rho = \left[1 + \beta_1 + L\beta_2 + \beta_3\right] \max\left\{P(x) : x \in \mathbb{R}_+\right\} < 1$, *где*

$$\beta_1 = \max\left\{\eta(x) : x \in \mathbb{R}_+\right\}, \quad \beta_2 = \int_0^\infty |K_0(x)|dx,$$

$$\beta_3 = \max\left\{|\alpha(x)| : x \in \mathbb{R}_+\right\}, \quad P(x) = e^{-\eta(x)} + 2\int_0^x H(y)e^{-\eta(x-y)}dy.$$

Тогда линейное интегральное уравнение (27) *имеет единственное решение на полуоси* $\mathbb{R}_+$.

Доказательство. Используем метод последовательных приближений. Рассмотрим следующий итерационный процесс Пикара:

$$\vartheta_0(x) = 0,\ \vartheta_1(x) = \Big[\alpha(x) - f(x,0)\Big] \exp\{-\eta(x)\} + \\ + \int_0^x H(y) \exp\{-\eta(x-y)\} \left[-f(x,0) + \alpha(x) + f(y,0) - \alpha(y)\right] dy, \quad (28)$$

$$\vartheta_k(t) = \Theta(x; \vartheta_{k-1}),\ k = 2, 3, 4, \ldots . \quad (29)$$

В силу условий леммы из последовательных приближений (28) и (29) получаем

$$\|\vartheta_1(x) - \vartheta_0(x)\| \leqslant \Big[\delta + \beta_3\Big] \max\Big\{P(x) : x \in \mathbb{R}_+\Big\}; \quad (30)$$

$$\|\vartheta_k(x) - \vartheta_{k-1}(x)\| \leqslant \rho \cdot \|\vartheta_{k-1}(x) - \vartheta_{k-2}(x)\| < \|\vartheta_{k-1}(x) - \vartheta_{k-2}(x)\|. \quad (31)$$

Из оценок (30) и (31) следует, что оператор в правой части (27) является сжимающим. Следовательно, интегральное уравнение (27) имеет единственное решение на полуоси $\mathbb{R}_+$. □

5. Обратная задача (1)–(6). Подставляя решение интегрального уравнения (27) в (26), получим тождество. Так как (26) дважды непрерывно дифференцируемая функция, подстановка (26) в (22) даёт искомую функцию $u(t, x)$.

Из справедливости доказанных выше трёх лемм следует, что справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполняются все условия леммы* 3. *Тогда существует единственная тройка решений двойной обратной задачи* (1)–(6):

$$\Big\{u(t,x) \in C^{2,2}(\Omega),\ f(x,\gamma) \in C^2(\mathbb{R}^2_+),\ \vartheta(x) \in C(\mathbb{R}_+)\Big\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ/ REFERENCES

1. А. А. Андреев, Ю. О. Яковлева, “Характеристическая задача для системы гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка общего вида с некратными характеристиками” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. № 1(30). С. 31–36 doi: 10.14498/vsgtu1182. [A. A. Andreev, J. O. Yakovleva, “The characteristic problem for the system of the general hyperbolic differential equations of the third order with nonmultiple characteristics”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2013, no. 1(30), pp. 31–36 (In Russian)].
2. М. Х. Бештоков, “Метод Римана для решения нелокальных краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. № 4(33). С. 15–24 doi: 10.14498/vsgtu1238. [M. H. Beshtokov, “Riemann method for solving non-local boundary value problems for the third order pseudoparabolic equations”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2013, no. 4(33), pp. 15–24 (In Russian)].
3. В. А. Золотарёв, “Прямая и обратная задачи для оператора с нелокальным потенциалом” // *Матем. сб.*, 2012. Т. 203, № 12. С. 105–128 doi: 10.4213/sm7929; V. A. Zolotarev, “Direct and inverse problems for an operator with nonlocal potential”, *Sb. Math.*, 2012, vol. 203, no. 12, pp. 1785–1807 doi: 10.1070/SM2012v203n12ABEH004287.

4. В. В. Карачик, “Об условиях разрешимости задачи Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре” // *Сиб. журн. индустр. матем.*, 2013. Т. 16, № 4. С. 61–74. [V. V. Karachik, “On solvability conditions for a Neumann problem for a polyharmonic equation in the unit ball”, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2013, vol. 16, no. 4, pp. 61–74 (In Russian)].
5. М. О. Корпусов, “О разрушении решений класса параболических уравнений с двойной нелинейностью” // *Матем. сб.*, 2013. Т. 204, № 3. С. 19–42 doi: 10.4213/sm8097; M. O. Korpusov, “Solution blow-up for a class of parabolic equations with double nonlinearity”, *Sb. Math.*, 2013, vol. 204, no. 3, pp. 323–346 doi: 10.1070/SM2013v204n03ABEH004303.
6. Л. С. Пулькина, “Нелокальная задача для гиперболического уравнения с интегральными условиями I рода с ядрами, зависящими от времени” // *Изв. вузов. Матем.*, 2012. № 10. С. 32–44; L. S. Pul’kina, “A nonlocal problem for a hyperbolic equation with integral conditions of the 1st kind with time-dependent kernels”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2012, vol. 56, no. 10, pp. 26–37 doi: 10.3103/S1066369X12100039.
7. О. А. Репин, С. К. Кумыкова, “Задача со смещением для уравнения третьего порядка с разрывными коэффициентами” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. № 4(29). С. 17–25 doi: 10.14498/vsgtu1123. [O. A. Repin, S. K. Kumykova, “Problem with shift for the third-order equation with discontinuous coefficients”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2012, no. 4(29), pp. 17–25 (In Russian)].
8. К. Б. Сабитов, Г. Ю. Удалова, “Краевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с условиями периодичности” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. № 3(32). С. 29–45 doi: 10.14498/vsgtu1220. [K. B. Sabitov, G. Yu. Udalova, “Boundary value problem for mixed type equation of the third order with periodic conditions”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2013, no. 3(32), pp. 29–45 (In Russian)].
9. Г. А. Свиридюк, С. А. Загребина, “Неклассические модели математической физики” // *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование*, 2012. № 14. С. 7–18. [G. A. Sviridyuk, S. A. Zagrebina, “Nonclassical Mathematical Physics Models”, *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, 2012, no. 14, pp. 7–18 (In Russian)].
10. Т. К. Юлдашев, “О разрешимости одной смешанной задачи для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных высокого порядка” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. № 4(33). С. 46–57 doi: 10.14498/vsgtu1040. [T. K. Yuldashev, “On solvability of a mixed value problem for nonlinear partial differential equation of higher order”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2013, no. 4(33), pp. 46–57 (In Russian)].
11. Н. В. Бейлина, “О разрешимости обратной задачи для гиперболического уравнения с интегральным условием переопределения” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 2(23). С. 34–39 doi: 10.14498/vsgtu957. [N. V. Beylina, “On solvability of a inverse problem for hyperbolic equation with an integral overdetermination condition”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2011, no. 2(23), pp. 34–39 (In Russian)].
12. А. М. Денисов, *Введение в теорию обратных задач.* М.: МГУ, 1994. 285 с. [A. M. Denisov, *Vvedeniye v teoriyu obratnykh zadach* [Introduction to the theory of inverse problem], Moscow, Moscow State Univ. Press, 1994, 285 pp. (In Russian)]
13. А. М. Денисов, С. И. Соловьева, “Обратная задача для уравнения диффузии в случае сферической симметрии” // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2013. Т. 53, № 11. С. 1784–1790 doi: 10.7868/S0044466913110033; A. M. Denisov, S. I. Solov’eva, “Inverse problem for the diffusion equation in the case of spherical symmetry”, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2013, vol. 52, no. 11, pp. 1607–1613 doi: 10.1134/S0965542513110031.
14. М. М. Лаврентьев, Л. Я. Савельев, *Линейные операторы и некорректные задачи.* М.: Наука, 1999. 330 с.; M. M. Lavrent’ev, L. Ya. Savel’ev, *Linear operators and ill-posed problems*, New York, Consultants Bureau, 1995, xiv+382 pp.
15. В. А. Попова, А. В. Глушак, “Обратная задача для сингулярного эволюционного уравнения с нелокальным граничным условием” // *Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ.*

Матем., 2012. №1. С. 182–186. [V. A. Popova, A. V. Glushak, “Inverse problem for singular evolution equation with nonlocal boundary conditin”, *Vestn. Voronezh. Gos. Univ. Ser. Fiz. Matem.*, 2012, no. 1, pp. 182–186 (In Russian)].
16. В. Г. Романов, *Обратные задачи для математической физики*. М.: Наука, 1984. 264 с.; V. G. Romanov, *Inverse Problems of Mathematical Physics*, Utrecht, VNU Science Press, 1987, vii+224 pp.
17. К. Б. Сабитов, Н. В. Мартемьянова, “Обратная задача для уравнения эллиптико-гиперболического типа с нелокальным граничным условием” // *Сиб. матем. журн.*, 2012. Т. 53, №3. С. 633–647; K. B. Sabitov, N. V. Martem’yanova, “An inverse problem for an equation of elliptic-hyperbolic type with a nonlocal boundary condition”, *Siberian Math. J.*, 2012, vol. 53, no. 3, pp. 507–519 doi: 10.1134/S0037446612020310.
18. Г. Хенкин, В. Мишель, “Обратная задача Дирихле–Неймана для нодальных кривых” // *УМН*, 2012. Т. 67, №6(408). С. 101–124 doi: 10.4213/rm9501; G. Henkin, V. Michel, “Inverse Dirichlet-to-Neumann problem for nodal curves”, *Russian Math. Surveys*, 2012, vol. 67, no. 6, pp. 1069–1089 doi: 10.1070/RM2012v067n06ABEH004818.
19. Т. К. Юлдашев, “Обратная задача для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка” // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2013. №9/1(110). С. 58–66. [T. K. Yuldashev, “Inverse problem for a nonlinear integro-differential equation of the third order”, *Vestnik SamGU. Estestvenno-Nauchnaya Ser.*, 2013, no. 9/1(110), pp. 58–66 (In Russian)].
20. Т. К. Юлдашев, “Об обратной задаче для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений высшего порядка” // *Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Матем.*, 2014. №1. С. 145–155. [T. K. Yuldashev, “An inverse problem for nonlinear integro-differential equations of higher order”, *Vestn. Voronezh. Gos. Univ. Ser. Fiz. Matem.*, 2014, no. 1, pp. 145–155 (In Russian)].
21. Т. К. Юлдашев, “Об обратной задаче для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка” // *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.*, 2012. №2. С. 56–62; T. K. Yuldashev, “On the inverse problem for the quasilinear partial differential equation of the first order”, *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2012, no. 2, pp. 56–62 (In Russian).
22. Т. К. Юлдашев, “Об обратной задаче для системы квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка” // *Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. Матем. Мех. Физ.*, 2012. №6, 11(270). С. 35–41. [T. K. Yuldashev, “An inverse problem for a system of partial quasilinear equations of the first order”, *Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Un-ta. Ser. Matem. Mekh. Fiz.*, 2012, no. 6, 11(270), pp. 35–41 (In Russian)].
23. Т. К. Юлдашев, “Обратная задача для нелинейного уравнения с псевдопараболическим оператором высокого порядка” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. №3(28). С. 17–29 doi: 10.14498/vsgtu1041. [T. K. Yuldashev, “Inverse problem for nonlinear partial differential equation with high order pseudoparabolic operator”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2012, no. 3(28), pp. 17–29 (In Russian)].
24. Т. К. Юлдашев, “Обратная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с гиперболическим оператором высокой степени” // *Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. Матем. Мех. Физ.*, 2013. Т. 5, №1. С. 69–75. [T. K. Yuldashev, “An inverse problem for a nonlinear integro-differential equations with hyperbolic operator of the higher degree”, *Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Un-ta. Ser. Matem. Mekh. Fiz.*, 2013, vol. 5, no. 1, pp. 69–75 (In Russian)].
25. Т. К. Юлдашев, А. И. Середкина, “Обратная задача для квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. №3(32). С. 46–55 doi: 10.14498/vsgtu1133. [T. K. Yuldashev, A. I. Seredkina, “Inverse problem for quazilinear partial integro-differential equations of higher order”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2013, no. 3(32), pp. 46–55 (In Russian)].
26. Т. К. Юлдашев, “О разрешимости смешанной задачи для линейного параболо-гиперболического интегро-дифференциального уравнения Фредгольма” // *Журнал*

СВМО, 2013. Т. 15, № 3. С. 158–163. [T. K. Yuldashev, "On solvability of mixed value problem for linear parabolo-hyperbolic Fredholm integro-differential equation", *Zhurnal SVMO*, 2013, vol. 15, no. 3, pp. 158–163 (In Russian)].

Поступила в редакцию 15/IV/2014;
в окончательном варианте — 18/V/2014;
принята в печать — 23/V/2014.

MSC: 45K05, 45Q05, 45B05

A DOUBLE INVERSE PROBLEM FOR FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF ELLIPTIC TYPE

T. K. Yuldashev

M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University,
31, pr. "Krasnoyarski Rabochiy", Krasnoyarsk, 660014, Russian Federation.

In this paper the double inverse problem for partial differential equations is considered. The method of studying the one value solvability of the double inverse problem for a Fredholm integro-differential equation of elliptic type with degenerate kernel is offered. First the method of degenerate kernel designed for Fredholm integral equations is modified and developed to the case of Fredholm integro-differential equation of elliptic type. The system of differential-algebraic equations is obtained. The inverse problem is called double inverse problem if the problem consisted to restore the two unknown functions by the aid of given additional conditions. The first restore function is nonlinear with respect to the second restore function. In solving the inverse problem with respect to the first restore function the inhomogeneous differential equation of the second order is obtained, which is solved by the method of variation of arbitrary constants with initial value conditions. With respect to the second restore function the nonlinear integral equation of the first kind is obtained, which is reduced by the aid of special nonclassical integral transform into nonlinear Volterra integral equation of the second kind. Further the method of successive approximations is used, combined with the method of compressing maps.

Keywords: *double inverse problem, elliptic type equation, Fredholm equation with degenerate kernel, inhomogeneous differential equation, one valued solvability.*

Received 15/IV/2014;
received in revised form 18/V/2014;
accepted 23/V/2014.

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1306

Citation: T. K. Yuldashev, "A Double Inverse Problem for Fredholm Integro-Differential Equation of Elliptic Type", *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 2 (35), pp. 39–49. doi: 10.14498/vsgtu1306. (In Russian)

Author Details: *Tursun K. Yuldashev* (Cand. Phys. & Math. Sci.), Associate Professor, Dept. of Higher Mathematics.

E-mail address: tursunbay@rambler.ru