Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2014. № 3 (36). С. 7–20
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1328

Дифференциальные уравнения

УДК 517.956.6

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ В ОБЛАСТИ, ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ КОТОРОЙ — ВЕРТИКАЛЬНАЯ ПОЛУПОЛОСА

А. А. Абашкин

Самарский государственный архитектурно-строительный университет,
443001, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

Аннотация

Для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом при младшей производной и спектральным параметром в области, гиперболическая часть которой — вертикальная полуполоса, а эллиптическая — прямоугольник, поставлена нелокальная задача с условием, связывающим значения искомой функции на правой и левой границах полуполосы и прямоугольника. При этом на линии изменения типа от искомой функции требуется лишь непрерывность. Для исследования поставленной задачи применен спектральный метод. Доказаны теоремы единственности и существования решения исследуемой задачи. Решение построено в виде разложения в биортогональный ряд по одной системе тригонометрических функций, предложенной в работах Е. И. Моисеева при этом, коэффициенты разложения получены как решения соответствующих систем ОДУ. Дано обоснование равномерной сходимости соответствующих рядов при определенных ограничениях на условия задачи.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, уравнение с сингулярным коэффициентом, биортогональный ряд, базис Рисса, функции Бесселя.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1328

Постановка задачи. Для уравнения

$$Lu = u_{xx} + \operatorname{sign} y \cdot u_{yy} + \frac{2p}{|y|} u_y + ku = 0, \quad p \geqslant \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{R} \tag{1}$$

рассмотрим следующую задачу.

Образец для цитирования: Абашкин А. А. Нелокальная задача для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом в области, гиперболическая часть которой — вертикальная полуполоса // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 3 (36). С. 7–20. doi: 10.14498/vsgtu1328.

Сведения об авторе: *Антон Александрович Абашкин* (к.ф.-м.н.; samcocaa@rambler.ru), старший преподаватель, каф. высшей математики.

Задача. *В области*

$$D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1,\ y < \alpha\}, \quad \alpha > 0$$

найти функцию $u(x, y)$, *удовлетворяющую следующим условиям*:

$$u \in C(\overline{D}) \cap C^2(D^+ \cup D^-), \quad Lu = 0; \tag{2}$$

$$u(0, y) = u(1, y), \quad u_x(0, y) = 0, \quad \textit{при} \quad y < \alpha; \tag{3}$$

$$u(x, \alpha) = \varphi(x) \quad \textit{при} \quad 0 < x < 1, \tag{4}$$

где $D^+ = D \cap \{y > 0\}$, $D^- = D \cap \{y < 0\}$; $\varphi(x)$ — *заданная непрерывная функция, удовлетворяющая условию* $\varphi(0) = \varphi(1)$.

Отметим, что уравнение (1) в области эллиптичности представляет собой обобщенное осесимметрическое уравнение Гельмгольца, а в области гиперболичности содержит в себе (при $k = 0$) уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу. Для частного случая уравнения (1) при $k = 0$ краевые задачи в областях различного вида рассматривались в публикациях С. П. Пулькина [1], В. Ф. Волкодавова [2], О. А. Репина [3], М. Х. Рузиева [4] и др.

В работах [5, 6] был предложен новый подход для доказательства единственности и построения решений краевых задач для уравнений смешанного типа — спектральный метод. Ранее подобный метод был применен В. А. Ильиным и Е. И. Моисеевым [7] при рассмотрении нелокальной задачи с условием, похожим на первое равенство условия (3).

Отметим, что впервые задача с нелокальным условием типа (3) возникла в статье Ф. И. Франкля [8] при изучении газодинамической задачи об обтекании профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения. Существует довольно много работ, в которых изучены краевые задачи с условием (3) для различных уравнений, например [9–12], в частности, в публикации [12], как и в данном исследовании, рассматривается нелокальная задача для уравнения смешанного типа в полуполосе. Задачи с нелокальным условием (3) для уравнения (1) в области эллиптичности были исследованы в работах М. Е. Лернера и О. А. Репина [13], Е. И. Моисеева [14] и автора настоящей работы [15, 16]. В работах [14–16] исследование основано на спектральном методе.

Для уравнения Лаврентьева—Бицадзе задача с условием (3) в прямоугольной области была рассмотрена Ю. К. Сабитовой в работе [17], а для уравнения смешанного типа $K(y)u_{xx} + u_{yy} - b^2 K(y)u = 0$ — в [18].

В данной работе тем же методом, что и в статьях [9, 14, 17], доказана единственность решения задачи (2)–(4). Решение построено в виде суммы ряда. Существование решения задачи доказано путем установления равномерной сходимости соответствующих рядов.

Отметим, что в задаче (2)–(4) на линии $y = 0$ требуется лишь непрерывность искомой функции.

1. Единственность решения задачи.

Теорема 1. *Если решение задачи (2)–(4) существует, то оно единственно.*

Доказательство. Следуя работе [14], рассмотрим функции

$$v_n(y) = 4 \int_0^1 u(x, y) \sin(2\pi n x)\, dx, \tag{5}$$

$$u_n(y) = 4\int_0^1 u(x,y)(1-x)\cos(2\pi nx)dx, \quad u_0(y) = 2\int_0^1 u(x,y)(1-x)dx,$$

где $u(x,y)$ — решение задачи (2)–(4).

Так как $u(x,y)$ является решением уравнения (1), то справедливо равенство

$$4\int_0^1 \left(u_{xx} + \operatorname{sign} y \cdot u_{yy} + \frac{2p}{|y|}u_y + ku\right)\sin(2\pi nx)dx = 0. \tag{6}$$

Дважды проинтегрировав по частям, с учетом условия (3) и определения (5) соотношение (6) запишем в виде

$$4\int_0^1 u_{xx}\sin(2\pi nx)dx = -(2\pi n)^2 v_n(y). \tag{7}$$

Из равенств (6) и (7) и определения (5) следует

$$v_n'' + \frac{2p}{y}v_n' - \operatorname{sign} y \cdot \sigma_n^2 v_n = 0 \quad \text{при} \quad (2\pi n)^2 > k; \tag{8}$$

$$v_n'' + \frac{2p}{y}v_n' + \operatorname{sign} y \cdot \sigma_n^2 v_n = 0 \quad \text{при} \quad (2\pi n)^2 < k; \tag{9}$$

$$v_n'' + \frac{2p}{y}v_n' = 0 \quad \text{при} \quad (2\pi n)^2 = k, \tag{10}$$

где $\sigma_n = \sqrt{|(2\pi n)^2 - k|}$.

При $y > 0$ уравнение (8) заменой $v_n(y) = y^{-p_1}F(\sigma_n y)$, $p_1 = p - 1/2$, сводится к модифицированному уравнению Бесселя [19, с. 141] и его общее решение представимо в виде

$$v_n = A_n y^{-p_1} I_{p_1}(\sigma_n y) + B_n y^{-p_1} K_{p_1}(\sigma_n y) \quad \text{при} \quad y > 0, \tag{11}$$

где $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ — модифицированные функции Бесселя [19, с. 139].

Вследствие асимптотики [19, с. 173]

$$K_\nu(z) \simeq \frac{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}{z^\nu}, \quad z \to 0 \quad \nu > 0; \qquad K_0(z) \simeq \ln\frac{2}{z}, \quad z \to 0, \tag{12}$$

для ограниченности функции $u(x,y)$ вблизи нуля необходимо, чтобы $B_n = 0$.

Из соотношения (4) получаем следующее условие:

$$v_n(\alpha) = a_n, \tag{13}$$

где $a_n = \displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\sin(2\pi nx)dx$.

В силу условия (13) имеем

$$A_n = \frac{a_n \alpha^{p_1}}{I_{p_1}(\sigma_n \alpha)}.$$

Окончательно функция $v_n(y)$ при $y > 0$ и $(2\pi n)^2 > k$ принимает вид

$$v_n(y) = \frac{a_n \alpha^{p_1}}{I_{p_1}(\sigma\alpha)} y^{-p_1} I_{p_1}(\sigma_n y). \tag{14}$$

При $y > 0$ уравнение (9) заменой $v_n(y) = y^{-p_1} F(\sigma_n y)$ сводится к уравнению Бесселя [19, с. 134] и его общее решение представимо в виде

$$v_n(y) = C_n y^{-p_1} J_{p_1}(\sigma_n y) + D_n y^{-p_1} Y_{p_1}(\sigma_n y),$$

где $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя первого [19, с. 132] и второго [19, с. 134] рода соответственно.

Из требования ограниченности функции $u(x,y)$ вблизи нуля и асимптотики [19, с. 172]

$$Y_\nu(z) \simeq -\frac{2^\nu \Gamma(\nu)}{\pi z^\nu}, \quad z \to 0, \quad \nu > 0; \qquad Y_0(z) \simeq -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{z}, \quad z \to 0,$$

следует, что $D_n = 0$.

Вследствие условия (13) имеем

$$C_n = \frac{a_n \alpha^{p_1}}{J_{p_1}(\sigma_n \alpha)}.$$

Окончательно при $y > 0$ и $(2\pi n)^2 < k$ получаем

$$v_n(y) = \frac{a_n \alpha^{p_1}}{J_{p_1}(\sigma\alpha)} y^{-p_1} J_{p_1}(\sigma_n y). \tag{15}$$

При $y < 0$ уравнение (8) сводится к уравнению Бесселя и с учетом требования ограниченности функции $u(x,u)$ вблизи нуля его решение имеет вид

$$v_n(y) = E_n (-y)^{-p_1} J_{p_1}(-\sigma_n y).$$

Используя непрерывность функции $u(x,y)$ и поведение функций $I_\nu(z)$, $J_\nu(z)$ при малых значениях z [19, с. 172, 173]:

$$I_\nu(z) \simeq \frac{z^\nu}{2^\nu \Gamma(1+\nu)}, \quad z \to 0, \tag{16}$$

$$J_\nu(z) \simeq \frac{z^\nu}{2^\nu \Gamma(1+\nu)}, \quad z \to 0, \tag{17}$$

получаем $E_n = A_n$.

Окончательно $v_n(y)$ при $y < 0$ и $(2\pi n)^2 > k$ принимает вид

$$v_n(y) = \frac{a_n \alpha^{p_1}}{I_{p_1}(\sigma\alpha)} (-y)^{-p_1} J_{p_1}(-\sigma_n y). \tag{18}$$

Таким же образом получаем выражение для $v_n(y)$ при $y < 0$ и $(2\pi n)^2 < k$:

$$v_n(y) = \frac{a_n \alpha^{p_1}}{J_{p_1}(\sigma\alpha)} (-y)^{-p_1} I_{p_1}(-\sigma_n y). \tag{19}$$

Уравнение (10) имеет следующее общее решение:

$$v_n(y) = F_n y^{1-2p} + G_n \quad \text{при} \quad p > \frac{1}{2}; \qquad v_n(y) = F_n \ln y + G_n \quad \text{при} \quad p = \frac{1}{2}.$$

С учетом требования ограниченности $u(x, y)$ вблизи нуля и условия (4) при $(2\pi n)^2 = k$ функция $v_n(y)$ будет иметь вид

$$v_n(y) = a_n. \tag{20}$$

Аналогично получаем дифференциальные уравнения для $u_n(y)$:

$$u_n'' + \frac{2p}{y} u_n' - \operatorname{sign} y \cdot \sigma_n^2 u_n = -\operatorname{sign} y \cdot 4\pi n v_n \quad \text{при} \quad (2\pi n)^2 > k; \tag{21}$$

$$u_n'' + \frac{2p}{y} u_n' + \operatorname{sign} y \cdot \sigma_n^2 u_n = -\operatorname{sign} y \cdot 4\pi n v_n \quad \text{при} \quad (2\pi n)^2 < k; \tag{22}$$

$$u_n'' + \frac{2p}{y} u_n' = -\operatorname{sign} y \cdot 4\pi n v_n \quad \text{при} \quad (2\pi n)^2 = k. \tag{23}$$

Уравнения (21)–(23) являются линейными неоднородным. Общее решение таких уравнений представимо в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного.

Однородное уравнение, соответствующее (21), совпадает с уравнением (8), поэтому его общее решение выражается формулами (11) и (18).

Частным решением неоднородного уравнения при $y > 0$ будет функция

$$u_n(y) = -\frac{2\pi n a_n \alpha^{p_1}}{\sigma_n I_{p_1}(\sigma_n \alpha)} y^{-p_1+1} I_{p_1-1}(\sigma_n y).$$

Таким образом, общее решение уравнения (21) при $y > 0$ имеет вид

$$u_n(y) = F_n y^{-p_1} I_{p_1}(\sigma_n y) + G_n y^{-p_1} K_{p_1}(\sigma_n y) - \frac{2\pi n a_n \alpha^{p_1}}{\sigma_n I_{p_1}(\sigma_n \alpha)} y^{-p_1+1} I_{p_1-1}(\sigma_n y).$$

Ввиду асимптотики (12) и требования непрерывности функции $u(x, y)$ необходимо, чтобы $G_n = 0$.

В силу условия (4) имеем

$$F_n = \frac{2\pi n a_n \alpha^{p_1+1} I_{p_1-1}(\sigma_n \alpha)}{\sigma_n I_{p_1}^2(\sigma_n \alpha)} + \frac{b_n \alpha^{p_1}}{I_{p_1}(\sigma_n \alpha)},$$

где $b_n = 4 \int_0^1 \varphi(x)(1-x)\cos(2\pi n x)dx$.

Окончательно функция $u_n(y)$ при $y > 0$ и $(2\pi n)^2 > k$ принимает вид

$$u_n(y) = \left(\frac{2\pi n a_n \alpha^{p_1+1} I_{p_1-1}(\sigma_n \alpha)}{\sigma_n I_{p_1}^2(\sigma_n \alpha)} + \frac{b_n \alpha^{p_1}}{I_{p_1}(\sigma_n \alpha)} \right) y^{-p_1} I_{p_1}(\sigma_n y) - \\ - \frac{2\pi n a_n \alpha^{p_1}}{\sigma_n I_{p_1}(\sigma_n \alpha)} y^{-p_1+1} I_{p_1-1}(\sigma_n y). \tag{24}$$

Частным решением уравнения (21) при $y<0$ является функция

$$u_n(y)=\frac{\pi n a_n \alpha^{p_1}}{p_1\sigma_n I_{p_1}(\sigma_n\alpha)}(-y)^{-p_1+1}J_{p_1-1}(-\sigma_n y).$$

Общим решением уравнения (21) при $y<0$ является

$$u_n(y)=T_n(-y)^{-p_1}J_{p_1}(-\sigma_n y)+\frac{\pi n a_n \alpha^{p_1}}{p_1\sigma_n I_{p_1}(\sigma_n\alpha)}(-y)^{-p_1+1}J_{p_1-1}(-\sigma_n y).$$

Приравнивая выражения для $u_n(y)$ при $y\to 0+$ и $y\to 0-$ и выражая коэффициент T_n будем иметь

$$T_n=\frac{2\pi n a_n \alpha^{p_1+1}I_{p_1-1}(\sigma_n\alpha)}{\sigma_n I_{p_1}^2(\sigma_n\alpha)}+\frac{b_n\alpha^{p_1}}{I_{p_1}(\sigma_n\alpha)}-\frac{2p(2p_1+1)\pi n a_n\alpha^{p_1}}{p_1\sigma_n^2 I_{p_1}(\sigma_n\alpha)}.$$

Окончательно $u_n(y)$ при $y<0$ и $(2\pi n)^2>k$ принимает вид

$$\begin{aligned}u_n(y)=\Big(&\frac{2\pi n a_n \alpha^{p_1+1}I_{p_1-1}(\sigma_n\alpha)}{\sigma_n I_{p_1}^2(\sigma_n\alpha)}+\frac{b_n\alpha^{p_1}}{I_{p_1}(\sigma_n\alpha)}-\\ &-\frac{2p(2p_1+1)\pi n a_n\alpha^{p_1}}{p_1\sigma_n^2 I_{p_1}(\sigma_n\alpha)}\Big)(-y)^{-p_1}J_{p_1}(-\sigma_n y)+\\ &+\frac{\pi n a_n \alpha^{p_1}}{p_1\sigma_n I_{p_1}(\sigma_n\alpha)}(-y)^{-p_1+1}J_{p_1-1}(-\sigma_n y).\end{aligned}\tag{25}$$

Выполнив подобные вычисления применительно к уравнениям (22) и (23) получим

$$\begin{aligned}u_n(y)=\Big(&\frac{2\pi n a_n \alpha^{p_1+1}J_{p_1-1}(\sigma_n\alpha)}{\sigma_n J_{p_1}^2(\sigma_n\alpha)}+\frac{b_n\alpha^{p_1}}{J_{p_1}(\sigma_n\alpha)}\Big)y^{-p_1}J_{p_1}(\sigma_n y)-\\ &-\frac{2\pi n a_n\alpha^{p_1}}{\sigma_n J_{p_1}(\sigma_n\alpha)}y^{-p_1+1}J_{p_1-1}(\sigma_n y)\quad\text{при}\quad y>0,\quad (2\pi n)^2<k;\end{aligned}\tag{26}$$

$$\begin{aligned}u_n(y)=\Big(&\frac{2\pi n a_n \alpha^{p_1+1}J_{p_1-1}(\sigma_n\alpha)}{\sigma_n J_{p_1}^2(\sigma_n\alpha)}+\frac{b_n\alpha^{p_1}}{J_{p_1}(\sigma_n\alpha)}-\\ &-\frac{2p(2p_1+1)\pi n a_n\alpha^{p_1}}{p_1\sigma_n^2 J_{p_1}(\sigma_n\alpha)}\Big)(-y)^{-p_1}I_{p_1}(-\sigma_n y)+\\ &+\frac{\pi n a_n \alpha^{p_1}}{p_1\sigma_n J_{p_1}(\sigma_n\alpha)}(-y)^{-p_1+1}I_{p_1-1}(-\sigma_n y)\quad\text{при}\quad y<0,\quad (2\pi n)^2<k;\end{aligned}\tag{27}$$

$$u_n(y)=b_n+\operatorname{sign}y\cdot\frac{\pi n a_n}{p_1+1}\alpha^2-\operatorname{sign}y\cdot\frac{\pi n a_n}{p_1+1}y^2\quad\text{при}\quad (2\pi n)^2=k.\tag{28}$$

Аналогичным образом (как и для $v_n(y)$ и $u_n(y)$) выражаем $u_0(y)$:

$$u_0(y)=\frac{a_0\alpha^{p_1}}{I_{p_1}(k\alpha)}y^{-p_1}I_{p_1}(\sqrt{-k}y)\quad\text{при}\quad y>0,\quad k<0;\tag{29}$$

$$u_0 = \frac{a_0 \alpha^{p_1}}{I_{p_1}(k\alpha)}(-y)^{-p_1} J_{p_1}(-\sqrt{-k}y) \quad \text{при} \quad y<0, \quad k<0; \tag{30}$$

$$u_0(y) = \frac{a_0 \alpha^{p_1}}{J_{p_1}(k\alpha)} y^{-p_1} J_{p_1}(\sqrt{k}y) \quad \text{при} \quad y>0, \quad k>0; \tag{31}$$

$$u_0 = \frac{a_0 \alpha^{p_1}}{J_{p_1}(k\alpha)}(-y)^{-p_1} I_{p_1}(-\sqrt{k}y) \quad \text{при} \quad y<0, \quad k>0; \tag{32}$$

$$u_0 = a_0 \quad \text{при} \quad k=0, \tag{33}$$

где $a_0 = 2\int_0^1 \varphi(x)(1-x)dx$.

Из формул (14), (15), (18)–(20), (24)–(33) следует, что если $\varphi(x) \equiv 0$, то $u_n \equiv 0$ и $v_n \equiv 0$, но тогда $u(x,y) \equiv 0$ в силу полноты системы функций [9]

$$\{4\sin 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{2(1-x)\}, \quad \{4(1-x)\cos 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty},$$

что завершает доказательство теоремы 1. □

2. Существование решения задачи.

Теорема 2. *Если $\varphi(x) \in C^2[0,1]$ и $k \neq (2\pi n)^2 + (r_m/\alpha)^2$, где r_m — положительные нули функции $J_{p_1}(z)$, пронумерованные в порядке возрастания, $n \in \mathbb{Z}$, то решение задачи (2)–(4) существует и представимо в виде суммы ряда*

$$u(x,y) = u_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)\cos 2\pi nx + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) x \sin 2\pi nx, \tag{34}$$

где функции $u_0(y)$, $u_n(y)$ и $v_n(y)$ определяются формулами (14), (15), (18)–(20), (24)–(33).

Доказательство. Поскольку системы функций

$$\{4\sin 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{2(1-x)\}, \quad \{4(1-x)\cos 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty},$$

$$\{x\sin 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{1\}, \quad \{\cos 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty},$$

образуют базис Рисса в $L_2(0,1)$ [9], то достаточно доказать два положения:

1) равномерную сходимость на множестве $\overline{D}$ остатка ряда (34), содержащего члены с номерами, удовлетворяющими соотношению $(2\pi n)^2 > k$;
2) равномерную сходимость рядов, полученных из того же остатка ряда (34) однократным и двукратным почленным дифференцированием по x и по y на множествах $D_\varepsilon = \{(x,y) \mid 0<x<1,\ y<\alpha-\varepsilon\}$, где ε — сколь угодно малое положительное число.

Докажем выполнение положения 1). Подставив вместо $u_n(y)$ и $v_n(y)$ их значения, определяемые формулами (14), (18), (24) и (25), получим, что достаточно доказать равномерную сходимость следующих рядов:

$$s_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \alpha^{p_1}}{I_{p_1}(\sigma\alpha)} y^{-p_1} I_{p_1}(\sigma_n y) x \sin 2\pi nx, \quad y>0,$$

$$s_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \alpha^{p_1}}{I_{p_1}(\sigma\alpha)} (-y)^{-p_1} J_{p_1}(-\sigma_n y) x \sin 2\pi nx, \quad y<0;$$

$$s_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{2\pi n a_n\alpha^{p_1+1}I_{p_1-1}(\sigma_n\alpha)}{\sigma_n I_{p_1}^2(\sigma_n\alpha)}+\frac{b_n\alpha^{p_1}}{I_{p_1}(\sigma_n\alpha)}\Big)\times$$
$$\times y^{-p_1}I_{p_1}(\sigma_n y)\cos 2\pi nx,\quad y>0,$$
$$s_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{2\pi n a_n\alpha^{p_1+1}I_{p_1-1}(\sigma_n\alpha)}{\sigma_n I_{p_1}^2(\sigma_n\alpha)}+\frac{b_n\alpha^{p_1}}{I_{p_1}(\sigma_n\alpha)}-\frac{2p(2p_1+1)\pi n\alpha^{p_1}}{p_1\sigma_n^2 I_{p_1}(\sigma_n\alpha)}\Big)\times$$
$$\times(-y)^{-p_1}J_{p_1}(-\sigma_n y)\cos 2\pi nx,\quad y<0;$$
$$s_3(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi n a_n\alpha^{p_1}}{\sigma_n I_{p_1}(\sigma_n\alpha)}y^{-p_1+1}I_{p_1-1}(\sigma_n y)\cos 2\pi nx,\quad y>0,$$
$$s_3(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n a_n\alpha^{p_1}}{p_1\sigma_n I_{p_1}(\sigma_n\alpha)}(-y)^{-p_1+1}J_{p_1-1}(-\sigma_n y)\cos 2\pi nx,\quad y<0.$$

Из формулы дифференцирования [19, с. 141]

$$\big(z^{-\nu}I_\nu(z)\big)'=z^{-\nu}I_{\nu+1}(z),$$

асимптотики (16) и отсутствия у функции $I_\nu(z)$ положительных нулей [19, с. 173] следует, что функция $z^{-\nu}I_\nu(z)$ положительна и монотонно возрастает при $z>0$, поэтому верны неравенства

$$\big|y^{-p_1}I_{p_1}(\sigma_n y)\big|\leqslant\alpha^{-p_1}I_{p_1}(\sigma_n\alpha),\quad y>0; \tag{35}$$
$$\big|y^{-p_1-1}I_{p_1+1}(\sigma_n y)\big|\leqslant\alpha^{-p_1-1}I_{p_1+1}(\sigma_n\alpha),\quad y>0. \tag{36}$$

Согласно асимптотикам (17) и [19, с. 172]

$$J_\nu(z)\simeq\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\Big(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\Big),\quad z\to+\infty,$$

функция $z^{-\xi}J_\nu(z)$ при $\xi\leqslant\nu$ ограничена при $z>0$. Обозначим

$$M_{J_\nu}=\max_{z>0}z^{-\nu}J_\nu(z),$$

тогда справедливы оценки

$$\big|(-y)^{-p_1}J_{p_1}(-\sigma_n y)\big|<\sigma_n^{p_1}M_{J_{p_1}},\quad \big|(-y)^{-p_1+1}J_{p_1-1}\big|<\sigma_n^{p_1-1}M_{J_{p_1-1}}.$$

В силу асимптотики [19, с. 173]

$$I_\nu(z)\simeq\frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}},\quad z\to+\infty, \tag{37}$$

существует такое N, что для $n>N$ выполняются свойства

$$\sigma_n^{p_1}M_{J_{p_1}}<\alpha^{-p_1}I_{p_1}(\sigma_n\alpha),\quad \sigma_n^{p_1-1}M_{J_{p_1-1}}<\alpha^{-p_1+1}I_{p_1-1}(\sigma_n\alpha)$$

и поэтому верны неравенства

$$\big|(-y)^{-p_1}J_{p_1}(-\sigma_n y)\big|<\alpha^{-p_1}I_{p_1}(\sigma_n\alpha),\quad y<0,\quad n>N; \tag{38}$$

$$\left|(-y)^{-p_1+1}J_{p_1-1}(-\sigma_n y)\right| < \alpha^{-p_1+1}I_{p_1-1}(\sigma_n\alpha), \quad y<0, \quad n>N. \tag{39}$$

Учитывая формулы (35) и (38), произведем оценки общих членов ряда $s_1(x,y)$:

$$\left|\frac{a_n\alpha^{p_1}}{I_{p_1}(\sigma\alpha)}y^{-p_1}I_{p_1}(\sigma_n y)x\sin 2\pi nx\right| < a_n, \quad y>0, \quad n>N; \tag{40}$$

$$\left|\frac{a_n\alpha^{p_1}}{I_{p_1}(\sigma\alpha)}(-y)^{-p_1}J_{p_1}(-\sigma_n y)x\sin 2\pi nx\right| < a_n, \quad y<0, \quad n>N \tag{41}$$

и ряда $s_2(x,y)$:

$$\left|\left(\frac{2\pi n a_n\alpha^{p_1+1}I_{p_1-1}(\sigma_n\alpha)}{\sigma_n I^2_{p_1}(\sigma_n\alpha)} + \frac{b_n\alpha^{p_1}}{I_{p_1}(\sigma_n\alpha)}\right)y^{-p_1}I_{p_1}(\sigma_n y)\cos 2\pi nx\right| < \\ < \frac{2\pi n\alpha I_{p_1-1}(\sigma_n\alpha)}{\sigma_n I_{p_1}(\sigma_n\alpha)} + b_n, \quad y>0, \quad n>N; \tag{42}$$

$$\left|\left(\frac{2\pi n a_n\alpha^{p_1+1}I_{p_1-1}(\sigma_n\alpha)}{\sigma_n I^2_{p_1}(\sigma_n\alpha)} + \frac{b_n\alpha^{p_1}}{I_{p_1}(\sigma_n\alpha)} - \frac{2(2p_1+1)\pi n\alpha^{p_1}}{\sigma_n^2 I_{p_1}(\sigma_n\alpha)}\right)\times \\ \times (-y)^{-p_1}J_{p_1}(-\sigma_n y)\cos 2\pi nx\right| < \\ < \frac{2\pi n\alpha I_{p_1-1}(\sigma_n\alpha)}{\sigma_n I_{p_1}(\sigma_n\alpha)} + b_n + \frac{2p(2p_1+1)\pi n a_n}{p_1\sigma_n^2}, \quad y<0, \quad n>N. \tag{43}$$

Используя неравенства (36) и (39), получаем оценки общего члена ряда $s_3(x,y)$:

$$\left|\frac{2\pi n a_n\alpha^{p_1}}{\sigma_n I_{p_1}(\sigma_n\alpha)}y^{-p_1+1}I_{p_1-1}(\sigma_n y)\cos 2\pi nx\right| < \\ < \frac{2\pi n a_n\alpha I_{p_1-1}(\sigma_n\alpha)}{\sigma_n I_{p_1}(\sigma_n\alpha)}, \quad y>0, \quad n>N; \tag{44}$$

$$\left|\frac{\pi n a_n\alpha^{p_1}}{p_1\sigma_n I_{p_1}(\sigma_n\alpha)}(-y)^{-p_1+1}J_{p_1-1}(-\sigma_n y)\cos 2\pi nx\right| < \\ < \frac{\pi n a_n\alpha I_{p_1-1}(\sigma_n\alpha)}{p_1\sigma_n I_{p_1}(\sigma_n\alpha)}, \quad y<0, \quad n>N. \tag{45}$$

Учитывая поведение коэффициентов ряда Фурье m раз дифференцируемой функции [20, с. 636]

$$a_n = o\left(n^{-2}\right), \quad b_n = o\left(n^{-2}\right)$$

и асимптотику (37), можно сделать вывод, что ряды, общими членами которых являются правые части неравенств (40)–(45), сходятся, из чего следует равномерная сходимость рядов $s_i(x,y)$, $i=1,2,3$, на множестве $\overline{D}$.

Докажем выполнение положения 2). Подставим в ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) x \sin 2\pi n x$$

вместо функций $v_n(y)$ значения, определяемые формулами (14) и (18), и почленно продифференцируем его по y:

$$s_4(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sigma_n \alpha^{p_1}}{I_{p_1}(\sigma\alpha)} y^{-p_1} I_{p_1+1}(\sigma_n y) x \sin 2\pi n x, \quad y > 0,$$

$$s_4(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sigma_n \alpha^{p_1}}{I_{p_1}(\sigma\alpha)} (-y)^{-p_1} J_{p_1+1}(-\sigma_n y) x \sin 2\pi n x, \quad y < 0.$$

Как было показано в доказательстве положения 1), функция $z^{-\nu} I_\nu(z)$ положительна и монотонно возрастает, поэтому в D_ε верна оценка

$$\left| y^{-p_1} I_{p_1+1}(\sigma_n y) \right| < \alpha^{-p_1} I_{p_1+1}(\sigma_n (a - \varepsilon)). \tag{46}$$

Так как функция $z^{-\xi} J_\nu(z)$ при $\xi \leqslant \nu$ ограничена при $z > 0$, справедливо неравенство

$$\left| (-y)^{-p_1} J_{p_1+1}(-\sigma_n y) \right| < M \sigma_n^{p_1}, \tag{47}$$

где

$$M = \max_{z>0} z^{-p_1} J_{p_1+1}(z).$$

Из асимптотики (37) и неравенства (47) получаем, что существует номер N такой, что для $n > N$ выполняется соотношение

$$\left| (-y)^{-p_1} J_{p_1+1}(-\sigma_n y) \right| < \alpha^{-p_1} I_{p_1+1}(\sigma_n (\alpha - \varepsilon)). \tag{48}$$

Из формул (46) и (48) следует

$$\left| \frac{a_n \sigma_n \alpha^{p_1}}{I_{p_1}(\sigma\alpha)} y^{-p_1} I_{p_1+1}(\sigma_n y) x \sin 2\pi n x \right| < \\ < \frac{a_n \sigma_n I_{p_1+1}(\sigma_n(\alpha - \varepsilon))}{I_{p_1}(\sigma\alpha)}, \quad y > 0, \quad n > N; \tag{49}$$

$$\left| \frac{a_n \sigma_n \alpha^{p_1}}{I_{p_1}(\sigma\alpha)} (-y)^{-p_1} J_{p_1+1}(-\sigma_n y) x \sin 2\pi n x \right| < \\ < \frac{a_n \sigma_n I_{p_1+1}(\sigma_n(\alpha - \varepsilon))}{I_{p_1}(\sigma\alpha)}, \quad y < 0, \quad n > N. \tag{50}$$

В силу асимптотики (37) последовательность

$$\frac{I_{p_1+1}(\sigma_n(\alpha - \varepsilon))}{I_{p_1}(\sigma\alpha)}$$

убывает экспоненциально, остальные множители, входящие в правую часть неравенств (49) и (50), имеют степенной рост, поэтому ряд, имеющий своим общим членом правую часть неравенств (49) и (50), сходится, а значит ряд $s_4(x,y)$ сходится равномерно в D_ε.

Доказательство равномерной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) x \sin 2\pi n x,$$

почленно продифференцированного по y дважды, однократно и двукратно почленно продифференцированного по x, а также равномерной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \cos 2\pi n x,$$

однократно и двукратно почленно продифференцированного по x и по y соответственно, проводится аналогичным образом.

Теорема 2 доказана. □

ORCID
Anton Abashkin: http://orcid.org/0000-0002-3610-1503

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пулькин С. П. О единственности решения сингулярной задачи Геллерстедта // *Изв. вузов. Матем.*, 1960. № 6. С. 214–225.
2. Волкодавов В. Ф. О единственности решения задачи TN для одного уравнения смешанного типа / *Волжский математический сборник*, Вып. 9. Куйбышев, 1970. С. 55–65.
3. Репин О. А. Нелокальная задача для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2005. № 34. С. 5–9. doi: 10.14498/vsgtu331.
4. Рузиев М. Х. О нелокальной задаче для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом в неограниченной области // *Изв. вузов. Матем.*, 2010. № 11. С. 41–49.
5. Сабитов К. Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // *Докл. РАН*, 2007. Т. 413, № 1. С. 23–26.
6. Сабитов К. Б., Сулейманова А. Х. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольной области // *Изв. вузов. Матем.*, 2007. № 4. С. 45–53.
7. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Двумерная нелокальная краевая задача для оператора Пуассона в дифференциальной и разностной трактовках // *Матем. моделирование*, 1990. Т. 2, № 8. С. 139–156.
8. Франкль Ф. И. К образованию скачков уплотнения в дозвуковых течениях с местными сверхзвуковыми скоростями // *Прикл. матем. и мех.*, 1947. Т. 11, № 1. С. 199–202.
9. Моисеев Е. И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи // *Диффер. уравн.*, 1999. Т. 35, № 8. С. 1094–1100.
10. Лернер М. Е., Репин О. А. О задачах типа задачи Франкля для некоторых эллиптических уравнений с вырождением разного рода // *Диффер. уравн.*, 1999. Т. 35, № 8. С. 1087–1093.
11. Сабитов К. Б., Сидоренко О. Г. Нелокальная задача для вырождающегося гиперболического уравнения / *Современные проблемы физики и математики*: Труды Всероссийской научной конференции. Т. 1 (16–18 сентября 2004 г.). Уфа: Гилем, 2004. С. 80–86.
12. Сидоренко О. Г. Существенно нелокальная задача для уравнения смешанного типа в полуполосе // *Изв. вузов. Матем.*, 2007. № 3. С. 60–64.

13. Лернер М. Е., Репин О. А. Нелокальные краевые задачи в вертикальной полуполосе для обобщенного осесимметрического уравнения Гельмгольца // *Диффер. уравн.*, 2001. Т. 37, № 11. С. 1562–1564.
14. Моисеев Е. И. О разрешимости одной нелокальной краевой задачи // *Диффер. уравн.*, 2001. Т. 37, № 11. С. 1565–1567.
15. Абашкин А. А. Однозначная разрешимость нелокальной задачи для осесимметрического уравнения Гельмгольца // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2011. № 2(83). С. 5–14.
16. Абашкин А. А. Об одной нелокальной задаче для осесимметрического уравнения Гельмгольца // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 3(24). С. 26–34. doi: 10.14498/vsgtu852.
17. Сабитова Ю. К. Нелокальная задача для уравнения Лаврентьева–Бицадзе в прямоугольной области / *Труды Стерлитамакского филиала АН РБ*, Вып. 6. Уфа: Гилем, 2009. С. 94–102.
18. Сабитова Ю. К. *Краевые задачи с нелокальным условием для уравнений смешанного типа в прямоугольной области*: Дисс. … к.ф.м.н. Стерлитамак, 2007. 133 с.
19. Лебедев Н. Н. *Специальные функции и их приложения.* Спб.: Лань, 2010. 368 с.
20. Зорич В. А. *Математический анализ.* Т. 2. М.: МЦНМО, 2002. 787 с.

Поступила в редакцию 14/VII/2014;
в окончательном варианте — 16/VIII/2014;
принята в печать — 27/VIII/2014.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki. 2014. Issue 3 (36). Pp. 7–20
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci. 2014. Issue 3 (36). Pp. 7–20]

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1328

MSC: 35M10, 35M12

A NONLOCAL PROBLEM FOR MIXED TYPE EQUATION WITH SINGULAR COEFFICIENT IN DOMAIN WITH HALF-STRIP AS HYPERBOLIC PART

A. A. Abashkin

Samara State University of Architecture and Civil Engineering,
194, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443001, Russian Federation.

Abstract

A nonlocal problem for mixed type equation with a singular coefficient and the spectral parameter is formulated in the field, which hyperbolic part is vertical half-strip and elliptic part is rectangle. The nonlocal condition of problem combines the values of required function on the right and left boundaries of half-stripe and rectangle. The only requirement on the unknown function in the change type line is continuity. To research the given

How to cite Reference: A b a s h k i n A. A. A Nonlocal Problem for Mixed Type Equation with Singular Coefficient in Domain with Half-Strip as Hyperbolic Part, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 3 (36), pp. 7–20. doi: 10.14498/vsgtu1328. (In Russian)

Author Details: *Anton A. Abashkin* (Cand. Phys. & Math. Sci.; samcocaa@rambler.ru), Assistant, Dept. of High Mathematics.

problem we apply the spectral method. The uniqueness and existence of a solution are proved. The solution is constructed as biortogonal series. Coefficients of this series should require special ODE systems, solved in the paper. The uniform convergence of the series is proved with the restrictions on problem conditions.

Keywords: mixed type equation, equation with a singular coefficient, biorthogonal series, Riesz basis, Bessel functions.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1328

ORCID
Anton Abashkin: http://orcid.org/0000-0002-3610-1503

REFERENCES

1. Pul'kin S. P. Uniqueness of the solution of a singular problem of Gellerstedt–Tricomi, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1960, no. 6, pp. 214–225 (In Russian).
2. Volkodavov V. F. The uniqueness of the solution of the TN problem for a certain equation of mixed type, *Volzhskii matematicheskii sbornik*, Vyp. 9. Kuibyshev, 1970, pp. 55–65 (In Russian).
3. Repin O. A. A nonlocal problem for a mixed-type equation with a singular coefficient, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2005, no. 34, pp. 5–9 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu331.
4. Ruziev M. Kh. A nonlocal problem for a mixed-type equation with a singular coefficient in an unbounded domain, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2010, vol. 54, no. 11, pp. 36–43. doi: 10.3103/S1066369X10110046.
5. Sabitov K. B. The Dirichlet problem for equations of mixed type in a rectangular domain, *Dokl. Akad. Nauk*, 2007, vol. 413, no. 1, pp. 23–26 (In Russian).
6. Sabitov K. B., Suleimanova A. Kh. The Dirichlet problem for a mixed-type equation of the second kind in a rectangular domain, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2007, vol. 51, no. 4, pp. 42–50. doi: 10.3103/S1066369X07040068.
7. Il'in V. A., Moiseev E. I. A two-dimensional nonlocal boundary value problem for the Poisson operator in the differential and the difference interpretation, *Matem. Modelirovanie*, 1990, vol. 2, no. 8, pp. 139–156 (In Russian).
8. Frankl F. I. Causes of shock waves in subsonic flows with local supersonic velocities, *Prikl. Matem. Mekh.*, 1947, vol. 11, no. 1, pp. 199–202 (In Russian).
9. Moiseev E. I. The solution of a nonlocal boundary value problem by the spectral method, *Differ. Equ.*, 1999, vol. 35, no. 8, pp. 1105–1112.
10. Lerner M. E., Repin O. A. On Frankl type problems for some elliptic equations with degeneration of various kinds, *Differ. Equ.*, 1999, vol. 35, no. 8, pp. 1098–1104.
11. Sabitov K. B., Sidorenko O. G. Solvability of a Nonlocal Boundary-Value Problem, *Sovremennye problemy fiziki i matematiki* [Contemporary Problems in Physics and Mathematics], Proceedings of All-Russia Conference, vol. 1. Ufa, Gilem, 2004, pp. 80–86 (In Russian).
12. Sidorenko O. G. An essentially nonlocal problem for a mixed-type equation in a semiband, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2007, vol. 51, no. 3, pp. 55–59. doi: 10.3103/S1066369X07030085.
13. Lerner M. E., Repin O. A. Nonlocal boundary value problems in a vertical half-strip for a generalized axisymmetric Helmholtz equation, *Differ. Equ.*, 2001, vol. 37, no. 11, pp. 1640–1642. doi: 10.1023/A:1017985319783.
14. Moiseev E. I. Solvability of a nonlocal boundary value problem, *Differ. Equ.*, 2001, vol. 37, no. 11, pp. 1643–1646. doi: 10.1023/A:1017937403853.
15. Abashkin A. A. One-valued solvability of a nonlocal problem for the axisymmetric Helmholtz equation, *Vestnik SamGU. Estestvenno-Nauchnaya Ser.*, 2011, no. 2(83), pp. 5–14 (In Russian).

16. Abashkin A. A. On one non-local problem for axisymmetric Helmholtz equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2011, no. 3(24), pp. 26–34 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu852.
17. Sabitova Yu. K. Nonlocal problem for Lavrent'ev–Bitsadze equation in a rectangular region, *Trudy Sterlitamakskogo filiala AN RB*, no. 6. Ufa, Gilem, 2009, pp. 94–102 (In Russian).
18. Sabitova Yu. K. *Boundary-value problems with nonlocal condition for mixed-type equations in a rectangular domain*, Theses of Candidate Dissertation in Physics and Mathematics. Sterlitamak, 2007, 133 pp. (In Russian)
19. Lebedev N. N. *Special functions and their applications.* New York, Dover Publications, Inc, 1972, xi+308 pp.
20. Zorich V. A. *Mathematical analysis*, vol. II, Universitext. Berlin, Springer, 2004, xv+681 pp.

Received 14/VII/2014;
received in revised form 16/VIII/2014;
accepted 27/VIII/2014.