

Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ РЕЗИНОМЕТАЛЛИЧЕСКОЙ СЕЙСМООПОРЫ

С. И. Гоменюк, С. Н. Гребенюк, А. А. Бова, В. З. Юречко

Запорожский национальный университет,
Украина, 69600, Запорожье, ул. Жуковского, 66.

Разработан конечно-элементный подход для численного анализа параметров напряжённо-деформированного состояния резинометаллической сейсмоопоры в условиях вязкоупругого деформирования при наличии слоев из пористой резины. Упругие характеристики пористой резины определялись методом самосогласования для пор сферической формы. Для моделирования вязкоупругого поведения использовались интегральные соотношения на основе наследственной теории Больцмана–Вольтерра. В качестве ядра релаксации используется экспоненциальное ядро, содержащее мгновенные и длительные упругие характеристики материала. На основе вариационного принципа строится конечно-элементная модель деформирования конструкции с пространственной дискретизацией и дискретизацией по времени. Полученная система разрешающих уравнений содержит вектор дополнительной нагрузки, моделирующий реологические составляющие процесса деформирования; для ее решения использовался модифицированный метод Ньютона–Канторовича. Для повышения точности получаемых результатов применялась уточненная моментная схема конечного элемента с кубической аппроксимацией перемещений. Исследована численная сходимость конечно-элементных схем на примере решения задачи Ляме для полого вязкоупругого цилиндра из пористой резины. Проведен расчёт резинометаллической сейсмоопоры в предположении о релаксации только модуля сдвига пористой резины. Получены основные параметры напряжённо-деформированного состояния в зависимости от времени и марок применяемых резин.

Ключевые слова: резинометаллическая сейсмоопора, моментная схема конечного элемента, кубическая аппроксимация, пористость, вязкоупругость.

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1284>

© 2014 Самарский государственный технический университет.

Образец цитирования: С. И. Гоменюк, С. Н. Гребенюк, А. А. Бова, В. З. Юречко, “Исследование напряженно-деформированного состояния резинометаллической сейсмоопоры” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 2 (35). С. 64–81. doi: [10.14498/vsgtu1284](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1284).

Сведения об авторах: *Сергей Иванович Гоменюк* (д.т.н., проф.), профессор, каф. математического моделирования. *Сергей Николаевич Гребенюк* (к.т.н., доц.), доцент, каф. математического анализа. *Анна Анатольевна Бова*, аспирант, каф. математического анализа. *Василий Зиновьевич Юречко*, аспирант, каф. математического анализа.

E-mail addresses: serega@znu.edu.ua (S.I. Gomenjuk), bova-anna@mail.ru (A.A. Bova, Corresponding author), gsm1212@ukr.net (S.N. Grebenjuk), iuriechko@i.ua (V.Z. Jurechko)

Анализ конструктивных особенностей сейсмоизоляции зданий, сооружений, инфраструктурных объектов показывает, что наиболее перспективным считается применение вибростеймоизоляторов на основе резинометаллических конструкций. Это позволяет защитить машины и сооружения при сейсмических колебаниях не только от воздействия в горизонтальной и вертикальной плоскостях, но и от кручения. Кроме того, применение резинометаллических слоистых виброизоляторов позволяет защитить здания и находящиеся в них людей от вибрационных воздействий метрополитена, автомобильного и железнодорожного транспорта [1].

Вибростеймоизоляции зданий, сооружений посвящен ряд работ. В работе А. А. Чылбак [2] предложена методика оценки сейсмостойкости сооружений, расположенных на системе сейсмоизоляции. Усовершенствованию инженерного метода расчёта многослойных силовых виброизоляторов для массового строительства виброизолированных зданий посвящена работа В. В. Моторина [3]. В работе О. А. Ковальчука [4] рассмотрена эффективность работы резинометаллических виброизоляторов в каркасных зданиях. Подходы к решению задач о напряжённо-деформированном состоянии резинометаллических виброизоляторов рассмотрены в работе Ю. Г. Козуба [5]. Задача определения осадки резиновых элементов, работающих на сжатие, решалась в работах Э. Э. Лавендела [6], С. И. Дымникова [7], В. Л. Бидермана, Н. А. Суховой [8], В. И. Дырды [9]. В работе В. М. Малькова [10] даётся изложение теории и методов расчёта эластомерного слоя и многослойных конструкций.

Растущая сложность резинометаллических виброизоляторов предусматривает учёт специфических свойств материала: слабой сжимаемости, реологических свойств, а также наличия пористости, что обусловлено широким внедрением пористых резин в различные отрасли науки и техники. Исходя из особенностей деформирования актуальным является решение задачи о нахождении напряжённо-деформированного состояния вибростеймоизолятора с позиций теории вязкоупругости.

Изучению вязкоупругих свойств материалов посвящены работы В. В. Киричевского [11], В. Л. Нарусберга [12]. В работах [13, 14] предлагаются различные подходы к описанию поведения упругих пористых сред. Вязкоупругое поведение пористых сред исследовалось в работах [15, 16, 17].

Постановка задачи. Решается статическая задача вязкоупругости в трёхмерной постановке для двухслойной цилиндрической резинометаллической сейсмоопоры. Такой вибростеймоопорой, предназначенной для сейсмозащиты многоэтажных жилых домов, является двухслойная сейсмоопора, разработанная Институтом геотехнической механики им. Н. С. Полякова НАН Украины и Государственным научно-исследовательским институтом строительных конструкций (рис. 1).

Первоначально резинометаллическая сейсмоопора выполнялась из сплошной резины. Улучшить жесткостные характеристики данной сейсмоопоры можно путём введения промежуточного слоя из композиционного материала. Однако такое конструктивное решение будет иметь недостаток — повышенную жёсткость на сдвиг, что не всегда удовлетворяет критериям виброизоляции зданий и сооружений. Другим возможным развитием сейсмоопо-

ры является введение слоев из пористой резины, что позволяет варьировать жесткостными характеристиками и снизить материалоемкость конструкции.

На рис. 2 приведена расчётная схема комбинированного резинового слоя: 1, 3 — пористая резина, 2 — сплошная резина; R — радиус сейсмоопоры, h — высота резинового слоя, $h_1 = h_2 = 0.25h$, P — распределённая поверхностная нагрузка, Q — сдвиговая нагрузка. резинометаллическая сейсмоопора снизу опирается на абсолютно жёсткую основу. Боковая поверхность свободна от защемлений и нагрузок. Граничные условия задачи записываются в следующем виде:

$$\bar{u}|_{x_1=0} = 0, \quad \sigma_{11}|_{x_1=h} = -P, \quad \sigma_{12}|_{x_1=h} = -Q,$$

где \bar{u} — вектор перемещений, σ_{11} и σ_{12} — нормальное и касательное напряжения соответственно.



Рис. 1. Двухслойная сейсмоопора
[Figure 1. The bilayer seismic bearing]

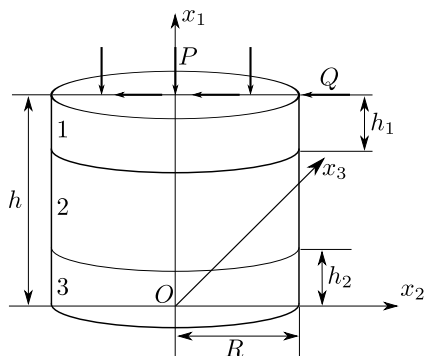


Рис. 2. Схема резинового слоя
[Figure 2. The scheme for the rubber layer.
Designations: 1, 3 — a porous rubber; 2 — a solid rubber; R — a radius of the seismic bearing; h — a rubber layer height; $h_1 = h_2 = 0.25h$; P — distributed surface load; Q — shear load]

Построение конечно-элементной модели вязкоупругого деформирования резинометаллической сейсмоопоры на основе уточненной моментной схемы конечного элемента. При решении задач механики деформируемого твёрдого тела для слабосжимаемых материалов возникают проблемы математического характера, когда коэффициент Пуассона $\nu \rightarrow 0.5$. Тогда в процессе формирования матрицы жёсткости возникает необходимость в вычислении коэффициента $E/(1 - 2\nu)$, где E — модуль упругости материала. При $\nu \rightarrow 0.5$ данная величина стремится к бесконечности, и расчёт конструкций приводит к неопределенностям.

Одним из путей разрешения указанных трудностей является применение моментной схемы конечного элемента (МСКЭ) [18, 19], которая, кроме того, позволяет получать матрицу жёсткости конечного элемента, учитывающую эффект «ложного» сдвига и абсолютные смещения конечного элемента как жёсткого целого.

Рассмотрим шестигранный конечный элемент. Введём две системы координат — базисную $Oz^1 z^2 z^3$ и местную криволинейную $O_1 x^1 x^2 x^3$, связанную с конечным элементом (рис. 3).

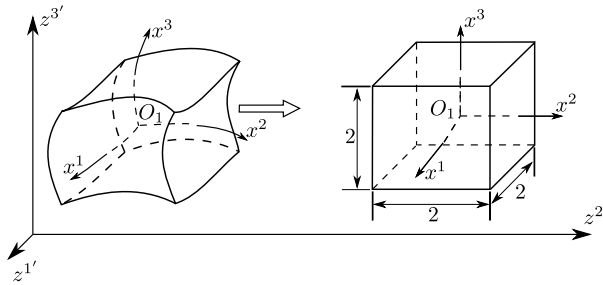


Рис. 3. Криволинейный конечный элемент
 [Figure 3. The curvilinear finite element]

Для построения конечно-элементной модели воспользуемся вариационным принципом. Рассмотрим вариацию полной потенциальной энергии системы:

$$\delta\Pi = \delta\widetilde{W} - \delta A.$$

Здесь $\delta\widetilde{W}$ — вариация внутренней энергии вязкоупругого деформирования:

$$\delta\widetilde{W} = \iiint_V \tilde{\sigma}^{ij}(t) \delta\varepsilon_{ij} dV; \quad (1)$$

δA — вариация работы распределенных объемных P^i и поверхностных F^i сил:

$$\delta A = \iiint_V P^i \delta u_i dV + \iint_S F^i \delta u_i dS.$$

Тензор вязкоупругих напряжений на основе наследственной теории Больцмана—Вольтерра запишется в виде

$$\tilde{\sigma}^{ij}(t) = C_0^{ijkl} \varepsilon_{kl}(t) - \int_0^t (C_0^{ijkl} - C_\infty^{ijkl}) e^{-(t-\tau)} \varepsilon_{kl}(\tau) d\tau, \quad (2)$$

где C_0^{ijkl} и C_∞^{ijkl} — компоненты тензора мгновенных и длительных упругих постоянных, которые определяются соотношением

$$C^{ijkl} = B g^{ij} g^{kl} + G \left(g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk} - \frac{2}{3} g^{ij} g^{kl} \right), \quad (3)$$

где g^{ij} — компоненты метрического тензора, B и G — мгновенные или длительные модули объёмного сжатия и сдвига соответственно.

Выражение (2) с учётом симметричности тензора напряжений и с учётом выражения (3) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{ij}(t) = & B_0 g^{ij} \theta(t) + 2G_0 \left(g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl}(t) - \frac{1}{3} g^{ij} \theta(t) \right) - \\ & - \int_0^t \left((B_0 - B_\infty) g^{ij} \theta(\tau) + \right. \end{aligned}$$

$$+ 2(G_0 - G_\infty) \left(g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl}(\tau) - \frac{1}{3} g^{ij} \theta(\tau) \right) e^{-(t-\tau)} d\tau, \quad (4)$$

где $\theta(t) = \varepsilon_{11}(t) + \varepsilon_{22}(t) + \varepsilon_{33}(t)$ — функция изменения объёма.

Для определения упругих постоянных пористой резины в выражении (4) воспользуемся методом самосогласования для пор сферической формы, в рамках которого зависимость модуля объёмного сжатия B_p и модуля сдвига G_p пористой резины от их относительной плотности $\rho = 1 - p$ запишется в виде [13]

$$\frac{B_p}{B} = 1 - \frac{1 - \rho}{1 - \alpha\rho}, \quad \frac{G_p}{G} = 1 - \frac{1 - \rho}{1 - \beta\rho},$$

где

$$\alpha = \frac{1 + \nu}{3(1 - \nu)}, \quad \beta = \frac{2}{15} \frac{4 - 5\nu}{1 - \nu},$$

ν — коэффициент Пуассона матрицы, p — пористость.

Для построения конечно-элементной модели представим интегральные соотношения (4) в конечно-разностной форме. Допуская релаксацию только модуля сдвига G_p пористой резины, получим $B_0 = B_\infty$. Полагая, что перемещения $u(t)$ и деформации $\varepsilon(t)$ изменяются линейно внутри каждого интервала времени, выражение для компонентов тензора напряжений (4) запишем в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{ij}(t) = & B_p g^{ij} \theta(t_n) + 2G_p \left(g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl}(t_n) - \frac{1}{3} g^{ij} \theta(t_n) \right) - \\ & - \sum_{m=0}^{n-1} R_m \left(g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl}(t_m) - \frac{1}{3} g^{ij} \theta(t_m) \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где $R_m = 2(G_{p0} - G_{p\infty})(e^{t_{m+1}-t_m})$; G_{p0} , $G_{p\infty}$ — мгновенный и длительный модули сдвига пористой резины.

Подставим компоненты тензора напряжений (5) в вариацию энергии деформирования (1). В этом случае вариация полной потенциальной энергии (1) запишется в виде

$$\delta\Pi = \delta W + \delta W^* - \delta A, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \delta W = & \iiint_V \left(B_{p0} g^{ij} \delta\theta(t_n) + 2G_{p0} \left(g^{ik} g^{jl} \delta\varepsilon_{kl}(t_n) - \frac{1}{3} g^{ij} \delta\theta(t_n) \right) \right) dV, \\ \delta W^* = & - \iiint_V \left(\sum_{m=0}^{n-1} R_m \left(g^{ik} g^{jl} \delta\varepsilon_{kl}(t_m) - \frac{1}{3} g^{ij} \delta\theta(t_m) \right) \right) dV. \end{aligned}$$

Для традиционного конечно-элементного представления (6) через вектор перемещений аппроксимацию перемещений для линейного параллелепипедного конечного элемента (согласно МСКЭ) представим в виде

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{k'} = \sum_{lmn} \omega_{k'}^{lmn} \psi^{lmn} = \omega_{k'}^{000} + \omega_{k'}^{100} \psi^{100} + \omega_{k'}^{010} \psi^{010} + \omega_{k'}^{001} \psi^{001} + \\ + \omega_{k'}^{110} \psi^{110} + \omega_{k'}^{101} \psi^{101} + \omega_{k'}^{011} \psi^{011} + \omega_{k'}^{111} \psi^{111}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\omega_{k'}^{pqr}$ — коэффициенты разложения перемещений; ψ^{pqr} — степенные координатные функции:

$$\psi^{pqr} = \frac{(x^1)^p (x^2)^q (x^3)^r}{p! q! r!}.$$

Непосредственное применение МСКЭ для получения матрицы жёсткости по заданным интерполяционным полиномам для аппроксимации перемещений конечного элемента в ряде случаев приводит к отбрасыванию значительного числа членов разложения деформаций, особенно для конечных элементов с высокой степенью аппроксимирующих полиномов.

Решить эту проблему можно с помощью уточненной моментной схемы конечного элемента (УМСКЭ) [20,21], которая, по сути, является модификацией МСКЭ. Этот подход предполагает получение выражений для деформаций на базе дополнения исходных аппроксимирующих полиномов конечного элемента до полных с последующим исключением «лишних» коэффициентов при дополнительных слагаемых.

Для уточнения решений приведём (7) к полному кубическому полиному:

$$u_{k'} = \tilde{u}_{k'} + \Delta u_{k'}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta u_{k'} = \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{200} \psi^{200} + \omega_{k'}^{020} \psi^{020} + \omega_{k'}^{002} \psi^{002} + \omega_{k'}^{210} \psi^{210} + \omega_{k'}^{201} \psi^{201} + \\ + \omega_{k'}^{120} \psi^{120} + \omega_{k'}^{102} \psi^{102} + \omega_{k'}^{021} \psi^{021} + \omega_{k'}^{012} \psi^{012}) + \\ + \frac{1}{6} (\omega_{k'}^{300} \psi^{300} + \omega_{k'}^{030} \psi^{030} + \omega_{k'}^{003} \psi^{003}). \end{aligned}$$

Разложим компоненты тензора деформаций в ряд Тейлора в окрестности начала координат:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{stg} e_{ij}^{stg} \psi^{stg} \quad (9)$$

либо в матричной форме:

$$\{\varepsilon_{ij}\} = \{e_{ij}\}^T \{\psi_{ij}\}, \quad (10)$$

$$\{e_{ij}\} = [F_{ij}^{k'}] \{\omega_{k'}\}. \quad (11)$$

Построим матрицу $[F_{ij}^{s'}]$. Для этого вычислим коэффициенты разложения e_{ij}^{pqr} , входящие в (9), (10), согласно МСКЭ по формулам [20]:

$$e_{11}^{pqr} = \sum_{\mu\nu\eta} \omega_{k'}^{\mu+1} \nu \eta b_{p+1-\mu}^{q-\nu} b_{r-\eta}^{k'}$$

$$\begin{aligned}
 e_{22}^{pqr} &= \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \omega_{k'}^{\mu \nu+1} \eta b_{p-\mu \ q+1-\nu \ r-\eta}^{k'}, \\
 e_{33}^{pqr} &= \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} \omega_{k'}^{\mu \nu \ \eta+1} b_{p-\mu \ q-\nu \ r+1-\eta}^{k'}; \\
 e_{12}^{pqr} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} (\omega_{k'}^{\mu \nu+1} \eta b_{p+1-\mu \ q-\nu \ r-\eta}^{k'} + \omega_{k'}^{\mu+1 \ \nu} \eta b_{p-\mu \ q+1-\nu \ r-\eta}^{k'}), \\
 e_{13}^{pqr} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} (\omega_{k'}^{\mu \ \nu \ \eta+1} b_{p+1-\mu \ q-\nu \ r-\eta}^{k'} + \omega_{k'}^{\mu+1 \ \nu} \eta b_{p-\mu \ q-\nu \ r+1-\eta}^{k'}), \quad (12) \\
 e_{23}^{pqr} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\eta}^{pqr} (\omega_{k'}^{\mu \ \nu \ \eta+1} b_{p-\mu \ q+1-\nu \ r-\eta}^{k'} + \omega_{k'}^{\mu \ \nu+1} \eta b_{p-\mu \ q-\nu \ r+1-\eta}^{k'}),
 \end{aligned}$$

где

$$b_{\mu\nu\eta}^{k'} = \frac{\partial^{(\mu+\nu+\eta)} z^{k'}}{(\partial x^1)^\mu (\partial x^2)^\nu (\partial x^3)^\eta} \Big|_{x^1=x^2=x^3=0}.$$

Проанализировав все компоненты e_{ij}^{pqr} , легко заметить, что некоторые коэффициенты $\omega_{k'}^{pqr}$ из (12) не входят в разложение для аппроксимации перемещений (8) с учётом дополнительных коэффициентов. Поэтому коэффициенты разложения деформаций e_{ij}^{pqr} , содержащие хотя бы один из не входящих членов, необходимо опустить в разложении (9).

Таким образом, в развёрнутом виде все компоненты деформаций ε_{ij} , получаемые на основе (8), представляются в виде полных квадратичных полиномов:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{ij} &= e_{ij}^{000} + e_{ij}^{100} \psi^{100} + e_{ij}^{010} \psi^{010} + e_{ij}^{001} \psi^{001} + \frac{1}{2} e_{ij}^{200} \psi^{200} + e_{ij}^{110} \psi^{110} + \\
 &+ \frac{1}{2} e_{ij}^{020} \psi^{020} + e_{ij}^{101} \psi^{101} + e_{ij}^{011} \psi^{011} + \frac{1}{2} e_{ij}^{002} \psi^{002}, \quad (13)
 \end{aligned}$$

где все моменты деформаций e_{ij}^{pqr} удовлетворяют условиям МСКЭ.

С другой стороны, применяя соотношения Коши для выражения (8) и сравнивая с (13), определим те компоненты, которые содержат дополнительные коэффициенты, входящие в разложение для $\Delta u_{k'}$:

$$\begin{aligned}
 e_{11}^{100} &= \omega_{1'}^{200}, & e_{11}^{110} &= \omega_{1'}^{210}, & e_{11}^{101} &= \omega_{1'}^{201}, & e_{11}^{020} &= \omega_{1'}^{120}, & e_{11}^{002} &= \omega_{1'}^{102}, \\
 e_{11}^{200} &= \omega_{1'}^{300}, & e_{22}^{010} &= \omega_{2'}^{020}, & e_{22}^{200} &= \omega_{2'}^{210}, & e_{22}^{110} &= \omega_{2'}^{120}, & e_{22}^{011} &= \omega_{2'}^{021}, \\
 e_{22}^{002} &= \omega_{2'}^{012}, & e_{22}^{020} &= \omega_{2'}^{030}, & e_{33}^{001} &= \omega_{3'}^{002}, & e_{33}^{200} &= \omega_{3'}^{201}, & e_{33}^{101} &= \omega_{3'}^{102}, \\
 & & e_{33}^{020} &= \omega_{3'}^{021}, & e_{33}^{011} &= \omega_{3'}^{012}, & e_{33}^{002} &= \omega_{3'}^{003}, \\
 e_{12}^{100} &= \frac{1}{2} (\omega_{1'}^{110} + \omega_{2'}^{200}), & e_{12}^{010} &= \frac{1}{2} (\omega_{2'}^{110} + \omega_{1'}^{020}), & e_{12}^{101} &= \frac{1}{2} (\omega_{1'}^{111} + \omega_{2'}^{201}), \\
 e_{12}^{011} &= \frac{1}{2} (\omega_{2'}^{111} + \omega_{1'}^{021}), & e_{12}^{002} &= \frac{1}{2} (\omega_{1'}^{012} + \omega_{2'}^{102}), & e_{12}^{200} &= \frac{1}{2} (\omega_{1'}^{210} + \omega_{2'}^{300}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_{12}^{110} &= \frac{1}{2}(\omega_{1'}^{120} + \omega_{2'}^{210}), & e_{12}^{020} &= \frac{1}{2}(\omega_{1'}^{030} + \omega_{2'}^{120}), & e_{13}^{100} &= \frac{1}{2}(\omega_{1'}^{101} + \omega_{3'}^{200}), \\
 e_{13}^{001} &= \frac{1}{2}(\omega_{3'}^{101} + \omega_{1'}^{002}), & e_{13}^{110} &= \frac{1}{2}(\omega_{1'}^{111} + \omega_{3'}^{210}), & e_{13}^{011} &= \frac{1}{2}(\omega_{1'}^{012} + \omega_{3'}^{111}), \\
 e_{13}^{020} &= \frac{1}{2}(\omega_{1'}^{021} + \omega_{3'}^{120}), & e_{13}^{200} &= \frac{1}{2}(\omega_{1'}^{201} + \omega_{3'}^{300}), & e_{13}^{101} &= \frac{1}{2}(\omega_{1'}^{102} + \omega_{3'}^{201}), \\
 e_{13}^{002} &= \frac{1}{2}(\omega_{1'}^{003} + \omega_{3'}^{102}), & e_{23}^{010} &= \frac{1}{2}(\omega_{2'}^{011} + \omega_{3'}^{020}), & e_{23}^{001} &= \frac{1}{2}(\omega_{2'}^{002} + \omega_{3'}^{011}), \\
 e_{23}^{110} &= \frac{1}{2}(\omega_{2'}^{111} + \omega_{3'}^{120}), & e_{23}^{101} &= \frac{1}{2}(\omega_{3'}^{111} + \omega_{2'}^{102}), & e_{23}^{200} &= \frac{1}{2}(\omega_{2'}^{201} + \omega_{3'}^{210}), \\
 e_{23}^{011} &= \frac{1}{2}(\omega_{2'}^{012} + \omega_{3'}^{021}), & e_{23}^{020} &= \frac{1}{2}(\omega_{2'}^{021} + \omega_{3'}^{030}), & e_{23}^{002} &= \frac{1}{2}(\omega_{2'}^{003} + \omega_{3'}^{012}).
 \end{aligned}$$

Уточнение МСКЭ сводится к минимизации тех коэффициентов разложения деформаций, которые, согласно МСКЭ, должны отбрасываться. На основе метода наименьших квадратов из моментов деформаций, которые представлены через коэффициенты разложения перемещений и имеют «лишние» коэффициенты, составляется сумма квадратов. Путём её минимизации получаем систему уравнений, решая которую, определим дополнительные коэффициенты:

$$\begin{aligned}
 \omega_{1'}^{200} &= \omega_{1'}^{210} = \omega_{1'}^{201} = \omega_{1'}^{120} = \omega_{1'}^{102} = \omega_{1'}^{300} = \omega_{1'}^{030} = 0, \\
 \omega_{1'}^{003} &= \omega_{2'}^{020} = \omega_{2'}^{021} = \omega_{2'}^{012} = \omega_{2'}^{030} = \omega_{2'}^{210} = \omega_{2'}^{120} = 0, \\
 \omega_{2'}^{300} &= \omega_{2'}^{003} = \omega_{3'}^{003} = \omega_{3'}^{021} = \omega_{3'}^{002} = 0, \\
 \omega_{3'}^{300} &= \omega_{3'}^{030} = \omega_{3'}^{201} = \omega_{3'}^{102} = \omega_{3'}^{012} = 0, \\
 \omega_{1'}^{021} &= \omega_{3'}^{120} = -\omega_{2'}^{111}/3, & \omega_{1'}^{020} &= -\omega_{2'}^{110}, & \omega_{3'}^{200} &= -\omega_{1'}^{101}, \\
 \omega_{1'}^{012} &= \omega_{2'}^{102} = -\omega_{3'}^{111}/3, & \omega_{1'}^{002} &= -\omega_{3'}^{101}, & \omega_{2'}^{200} &= -\omega_{1'}^{110}, \\
 \omega_{2'}^{201} &= \omega_{3'}^{210} = -\omega_{1'}^{111}/3, & \omega_{2'}^{002} &= -\omega_{3'}^{011}, & \omega_{3'}^{020} &= -\omega_{2'}^{011}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

На основе формул (8) и (14) получаем вспомогательный закон распределения перемещений трёхмерного конечного элемента:

$$u_{1'} = \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 \omega_{1'}^{pqr} \psi^{pqr} - \frac{1}{2}(\omega_{2'}^{110} \psi^{020} + \omega_{3'}^{101} \psi^{002}) - \frac{1}{6}(\omega_{2'}^{111} \psi^{021} + \omega_{3'}^{111} \psi^{012}),$$

$$u_{2'} = \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 \omega_{2'}^{pqr} \psi^{pqr} - \frac{1}{2}(\omega_{1'}^{110} \psi^{200} + \omega_{3'}^{011} \psi^{002}) - \frac{1}{6}(\omega_{1'}^{111} \psi^{201} + \omega_{3'}^{111} \psi^{102}),$$

$$u_{3'} = \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 \omega_{3'}^{pqr} \psi^{pqr} - \frac{1}{2}(\omega_{1'}^{101} \psi^{200} + \omega_{2'}^{011} \psi^{020}) - \frac{1}{6}(\omega_{1'}^{111} \psi^{210} + \omega_{2'}^{111} \psi^{120})$$

или в матричной форме

$$\{u_{k'}\} = \{\omega_{k'}\}^T \{\psi\}. \tag{15}$$

Матрицы $[F_{ij}^{k'}]$ получаются на основе выражений (11) и известного теперь числа и вида коэффициентов e_{ij}^{pqr} по формуле (13) с учётом (14).

Функция изменения объёма, ответственная за слабую сжимаемость эластомера, представляется разложением

$$\theta = \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\beta=0}^{n-1} \sum_{\gamma=0}^{l-1} \xi^{\alpha\beta\gamma} \psi^{\alpha\beta\gamma}, \quad (16)$$

где $\xi^{\alpha\beta\gamma}$ — коэффициенты разложения, определяемые соотношением

$$\xi^{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial^{(\alpha+\beta+\gamma)} \varepsilon_{ij} g^{ij}}{(\partial x^1)^\alpha (\partial x^2)^\beta (\partial x^3)^\gamma} \Big|_{x^1=x^2=x^3=0}, \quad (17)$$

или в векторной форме:

$$\{\theta\} = \{\xi\}^\top \{\psi_\theta\}, \quad (18)$$

$$\{\xi\} = [F_\theta^{k'}] \{\omega_{k'}\}. \quad (19)$$

Воспользовавшись формулами (14), (16) и (17), проанализируем выражения для компонент $\xi^{\alpha\beta\gamma}$, опуская при этом те слагаемые, которые содержат наряду с коэффициентами разложения для θ коэффициенты разложения для деформаций, т. е. те, для которых не выполняется условие

$$\xi^{\alpha\beta\gamma} = e_{11}^{\alpha\beta\gamma} g^{11} + e_{22}^{\alpha\beta\gamma} g^{22} + e_{33}^{\alpha\beta\gamma} g^{33}.$$

Легко заметить, что необходимо учитывать только коэффициент ξ^{000} . Таким образом, получим приближенное значение функции изменения объёма:

$$\theta = \xi^{000} = e_{11}^{000} g^{11} + e_{22}^{000} g^{22} + e_{33}^{000} g^{33}.$$

С учётом (10) и (18) δW в выражении (6) примет вид

$$\begin{aligned} \delta W = & 2G_{p0} \iiint_V \{\delta e_{ij}\}^\top \{\psi_{ij}\} g^{ik} g^{jl} \{e_{kl}\}^\top \{\psi_{kl}\} dV + \\ & + \left(B_{p0} - \frac{2}{3} G_{p0} \right) \iiint_V \{\xi\}^\top \{\psi_\theta\} \delta\{\xi\} \{\psi_\theta\} dV = \\ & = \{\delta e_{ij}\}^\top [H^{ijkl}] \{e_{kl}\} + \delta\{\xi\}^\top [H^\theta] \{\xi\}, \quad (20) \end{aligned}$$

где

$$[H^{ijkl}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 2G_{p0} g^{ik} g^{jl} \{\psi_{ij}\} \{\psi_{kl}\}^\top \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3;$$

$$[H^\theta] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(B_{p0} - \frac{2}{3} G_{p0} \right) \{\psi_\theta\} \{\psi_\theta\}^\top \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3.$$

На основе (11) и (19) выражение (20) можно записать в следующем виде:

$$\delta W = \delta\{\omega_{s'}\}^\top [F_{ij}^{s'}]^\top [H^{ijkl}] [F_{kl}^{t'}] \{\omega_{t'}\} + \delta\{\omega_{s'}\}^\top [F_\theta^{s'}]^\top [H^\theta] [F_\theta^{t'}] \{\omega_{t'}\}. \quad (21)$$

Принимая во внимание (15) и представление перемещений точек конечного элемента через функцию Лагранжа $\{N\}$ и узловые значения перемещений

$$\{u_{k'}\} = \{u_i\}^\top \{N\},$$

запишем связь между степенными и аппроксимирующими функциями Лагранжа:

$$\{\omega_{k'}\} = [A]\{u_{k'}\},$$

с учётом которой, выражение (21) можем представить в таком виде:

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta\{u_{s'}\}^\top [A]^\top [F_{ij}^{s'}]^\top [H^{ijkl}] [F_{kl}^{t'}] [A] \{u_{t'}\} + \\ &+ \delta\{u_{s'}\}^\top [A]^\top [F_\theta^{s'}]^\top [H^\theta] [F_\theta^{t'}] [A] \{u_{t'}\} = \\ &= \delta\{u_{s'}\} [G^{s't'}] \{u_{t'}\} + \delta\{u_{s'}\}^\top [G_\theta^{s't'}] \{u_{t'}\}, \end{aligned}$$

где

$$[G^{s't'}] = [A]^\top [F_{ij}^{s'}]^\top [H^{ijkl}] [F_{kl}^{t'}] [A], \quad [G_\theta^{s't'}] = [A]^\top [F_\theta^{s'}]^\top [H^\theta] [F_\theta^{t'}] [A].$$

Матрица жёсткости конечного элемента окончательно вычисляется по формуле

$$[K^{s't'}] = [A]^\top [F_{ij}^{s'}]^\top [H^{ijkl}] [F_{kl}^{t'}] [A] + [A]^\top [F_\theta^{s'}]^\top [H^\theta] [F_\theta^{t'}] [A].$$

В выражении (6) δW является вариацией энергии упругого деформирования, которая зависит от истории нагружения, но не зависит от закона изменения деформации во времени и служит основой формирования матрицы жёсткости конечных элементов $[K^{s't'}]$ для фиксированного момента времени t . Можно записать:

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(2G_{p0} g^{ik} g^{jl} \delta\varepsilon_{kl}(t_n) + \left(B_{p0} - \frac{2}{3} G_{p0} \right) g^{ij} \delta\theta(t_n) \right) dV = \\ = K^{s't'}(t_n) u_{s'}(t_n) \delta u_{t'}. \quad (22) \end{aligned}$$

Величина δW^* в выражении (6) является наследственной составляющей матрицы жёсткости; её подынтегральное выражение представим в виде

$$\begin{aligned} - \sum_{m=0}^{n-1} R_m \left(g^{ik} g^{jl} \delta\varepsilon_{kl}(t_m) - \frac{1}{3} g^{ij} \delta\theta(t_m) \right) dV = \\ = - \sum_{m=0}^{n-1} R_m M^{s't'}(t_m) u_{s'}(t_m) \delta u_{t'}. \quad (23) \end{aligned}$$

Предполагая, что на тело действует только распределённая поверхностная нагрузка, которую можно свести к сосредоточенным силам в каждом

узле, и используя соотношения (22) и (23), вариацию потенциальной энергии можно записать в виде

$$\left(K^{s't'}(t_n)u_{s'}(t_n) - \sum_{m=0}^{n-1} R_m M^{s't'}(t_m)u_{s'}(t_m) - F^{t'}(t_n) \right) \delta u_{t'} = 0.$$

Поскольку $\delta u_{t'} \neq 0$, нулю должно равняться выражение в скобках, которое представляет собой линейризованную систему разрешающих уравнений наследственной вязкоупругости:

$$K_{(n)}\bar{u}^{(n)} = \sum_{m=0}^{n-1} \bar{P}_m + \bar{Q}_{(n)}, \quad (24)$$

где $\bar{u}^{(n)} = u_{s'}(t_n)$ — вектор перемещений; $\bar{P}_m = R_m M^{s't'}(t_m)u_{s'}(t_m)$ — вектор дополнительной нагрузки, моделирующий вязкоупругое поведение пористой резины; $\bar{Q}_{(n)} = F^{t'}(t_n)$ — вектор распределённых поверхностных нагрузок, действующих на момент времени t_n .

Решение системы (24) строится на основе модифицированного метода Ньютона—Канторовича для решения задачи вязкоупругости [18].

В общем виде теоретическое доказательство сходимости МСКЭ для степенного закона аппроксимации перемещений, в том числе и для предложенного выше, изложены в [20]. Построение матрицы жёсткости, рассмотренной выше, и итерационного алгоритма (24) реализовано в программном комплексе МРЕЛА+ [22].

Исследование численной сходимости конечно-элементных схем и результаты расчётов. Исследуем сходимость решений, полученных численно при использовании УМСКЭ, путём сравнения их с аналитическим решением задачи Ляме в условиях вязкоупругого деформирования [23].

Рассмотрим напряжённо-деформированное состояние полого цилиндра из пористого материала в условиях вязкоупругого деформирования под внутренним давлением Q при жёстком защемлении по внешнему контуру. Пусть a — внутренний радиус, b — внешний радиус, r — полярный радиус, t — время. Аналитическая зависимость радиальных перемещений в условиях вязкоупругого поведения от упругих модулей пористого материала имеет следующий вид [18]:

$$\tilde{u}(t, r) = f(1 + \lambda K^*(t)) \left(r - \frac{b^2}{r} \right),$$

где

$$f = -\frac{Q}{2B_{p0} + 2G_{p0}(1/3 + b^2/a^2)}, \quad \lambda = \frac{G_{p0}(1/3 + b^2/a^2)}{B_{p0} + G_{p0}(1/3 + b^2/a^2)},$$

$$K^*(t) = \int_0^t K(t - \tau) d\tau = \frac{G_{p0} - G_{p\infty}}{2G_{p0} - G_{p\infty}} \left(1 - \exp\left(-\frac{2G_{p0} - G_{p\infty}}{G_{p0}} t\right) \right);$$

$K(t - \tau)$ — разностное ядро ползучести для пористого материала.

Сравним перемещения внутренней точки полого цилиндра, получаемые численно с использованием традиционного МКЭ и УМСКЭ, с аналитическим решением (см. таблицу) для следующих исходных данных: внутренний радиус $a = 0.025$ м, внешний радиус $b = 0.1$ м, модуль упругости $B_{p0} = 64.567 \times 10^6$ Па, мгновенный модуль сдвига резины $G_{p0} = 1.3 \times 10^6$ Па, длительный модуль сдвига резины $G_{p\infty} = 0.93 \times 10^6$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0.49$, внутреннее давление $Q = 1.3 \times 10^6$ Па, пористость $p = 0.4$.

Сходимость численных решений
[The convergence of the numerical solutions]

Размеры сетки [The mesh sizes]	МКЭ [FEM]		УМСКЭ [RMFES]	
	u , m	ε , %	u , m	ε , %
Упругий случай [The elasticity]				
$3 \times 3 \times 3$	0.01631	16.7	0.01882	3.9
$5 \times 5 \times 3$	0.01821	7.1	0.01922	1.9
$7 \times 7 \times 3$	0.01887	3.6	0.01939	0.98
$9 \times 9 \times 3$	0.01916	2.2	0.01947	0.6
$11 \times 11 \times 3$	0.01930	1.5	0.01951	0.4
Аналитическое решение [The analytical solution]	0.019581			
Вязкоупругость [The viscoelasticity], $t = 1$ sec				
$3 \times 3 \times 3$	0.01712	22.6	0.01998	9.6
$5 \times 5 \times 3$	0.01942	12.1	0.02073	6.2
$7 \times 7 \times 3$	0.02024	8.5	0.02092	5.3
$9 \times 9 \times 3$	0.02059	6.9	0.02102	4.9
$11 \times 11 \times 3$	0.02078	6.0	0.02107	4.7
Аналитическое решение [The analytical solution]	0.022105			

RMFES is the refined moment finite element scheme.

Как видно из таблицы, УМСКЭ имеет устойчивую сходимость при сгущении сетки дискретизации и даёт предпочтительные результаты по сравнению с традиционным МКЭ, приближая их к аналитическим.

Таким образом, предложенная конечно-элементная модель на основе УМСКЭ с тройной аппроксимацией компонент вектора перемещений, компонент тензора деформаций и функции изменения объема позволяет получать приемлемые результаты при расчёте конструкций из пористой резины в условиях вязкоупругого деформирования.

Выполним расчёт для резинового слоя сейсмоопоры при следующих исходных данных: радиус $R = 0.2$ м, высота $h = 0.12$ м, $h_1 = h_2 = 0.03$ м, нагрузка $P = 100$ кН; модули упругости резины марки 51-1562 — $G_0 = 0.78$ МПа, $G_\infty = 0.51$ МПа; модули упругости резины марки 51-1714 — $G_0 = 2$ МПа, $G_\infty = 1.1$ МПа.

Распределение перемещений u_1 при различных значениях коэффициента Пуассона ν и распределение нормальных напряжений при коэффициенте Пуассона $\nu = 0.49$ по высоте сплошного резинового слоя сейсмоопоры при $Q = 0$ представлены на рис. 4 и 5 соответственно.

Зависимость перемещений $u_1(t)$ и нормальных напряжений $\sigma^{11}(t)$ от вре-

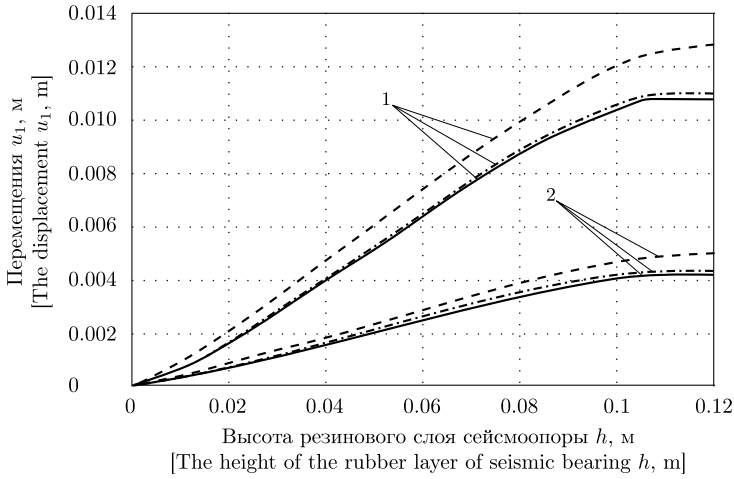


Рис. 4. Распределение перемещений u_1 по высоте резинового слоя сейсмоопоры для резины марки 51–1562 (1) и резины марки 51–1714 (2) при $\nu = 0.49$ (штриховые линии), $\nu = 0.499$ (штрих-пунктирные линии), $\nu = 0.49999$ (сплошные линии); здесь $Q = 0$

[Figure 4. The distribution of displacements u_1 along the height of the rubber layer of seismic bearing for 51–1562 rubber (1) and 51–1714 rubber (2) when $\nu = 0.49$ (dashed lines), $\nu = 0.499$ (dot-dashed lines), and $\nu = 0.49999$ (solid lines); there is $Q = 0$]

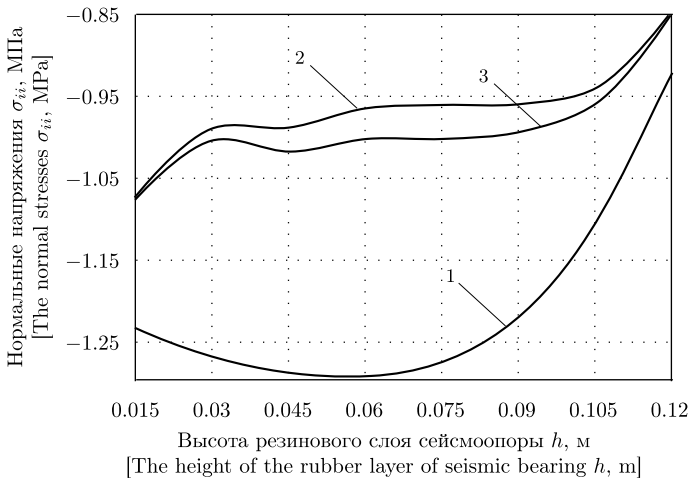


Рис. 5. Распределение нормальных напряжений σ^{ii} по высоте резинового слоя сейсмоопоры: 1 – σ^{11} , 2 – σ^{22} , 3 – σ^{33} ; здесь $Q = 0$

[Figure 5. The distribution of normal stresses σ^{ii} along the height of the rubber layer of seismic bearing: 1 – σ^{11} , 2 – σ^{22} , 3 – σ^{33} ; there is $Q = 0$]

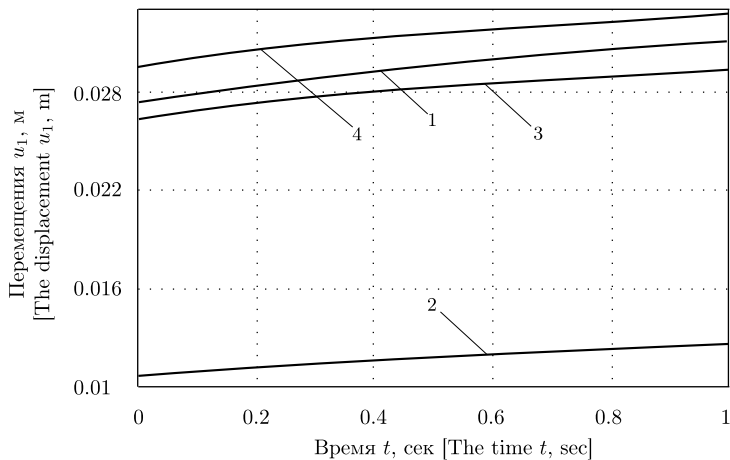


Рис. 6. Зависимость перемещений u_1 от времени: 1 — сплошная резина марки 51-1562, 2 — сплошная резина марки 51-1714, 3 — пористая резина с пористостью $p = 0.5$, 4 — пористая резина с пористостью $p = 0.55$; здесь $Q = 0.5P$

[Figure 6. The dependence of displacements u_1 on time t : 1 — 51-1562 solid rubber, 2 — 51-1714 solid rubber, 3 — porous rubber with a porosity $p = 0.5$, 4 — porous rubber with a porosity $p = 0.55$; there is $Q = 0.5P$]

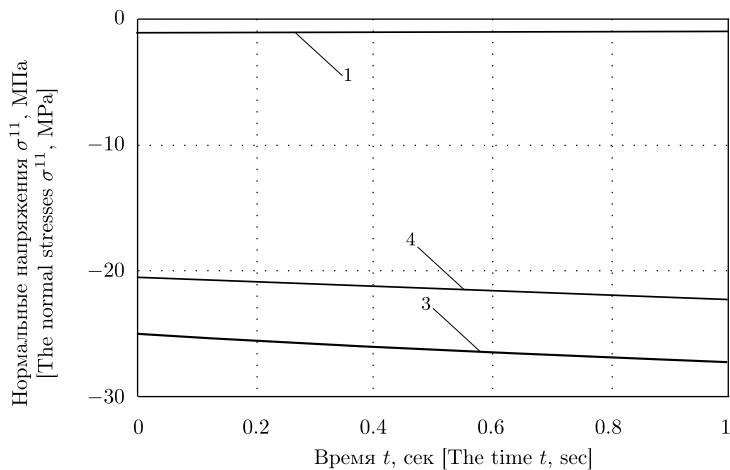


Рис. 7. Зависимость нормальных напряжений σ^{11} от времени: 1 — сплошная резина марки 51-1562, 3 — пористая резина с пористостью $p = 0.5$, 4 — пористая резина с пористостью $p = 0.55$; здесь $Q = 0.5P$

[Figure 7. The dependence of normal stresses σ^{ii} on time t : 1 — 51-1562 solid rubber, 3 — porous rubber with a porosity $p = 0.5$, 4 — porous rubber with a porosity $p = 0.55$; there is $Q = 0.5P$]

мени при $Q = 0.5P$ представлены на рис. 6 и 7 соответственно. Здесь 1 — сплошная резина марки 51–1562; 2 — сплошная резина марки 51–1714, 3 — пористая резина с пористостью $p = 0.5$, 4 — пористая резина с пористостью $p = 0.55$.

Следует отметить, что осадка сплошной резинометаллической сейсмоопоры из резины марки 51–1562 практически совпадает с осадкой сейсмоопоры из резины марки 51–1714 с пористыми слоями ($p = 0.50 \div 0.55$). Таким образом, варьируя пористыми слоями и марками резины, можно получить ряд резинометаллических сейсмоопор с практически одинаковыми жесткостными свойствами.

Выводы. В статье представлен численный подход к решению статической задачи упругости в трехмерной постановке для вибростойкоопоры, выполненной из сплошной и комбинированной резины, на основе уточненной моментной схемы конечного элемента. С помощью предложенного метода получены основные параметры напряжённо-деформированного состояния резинометаллической сейсмоопоры.

При расчёте резинометаллической сейсмоопоры из сплошной резины продольная деформация снижается с увеличением коэффициента Пуассона (см. рис. 4). Сжимающие напряжения увеличиваются в середине конструкции и значительно ослабевают в месте приложения нагрузки (см. рис. 5).

При расчёте резинометаллической сейсмоопоры из комбинированной резины в условиях вязкоупругого деформирования осадка верхней поверхности увеличивается на 10–11% (см. рис. 6). Сжимающие напряжения в пористой резине слабо проявляют реологические свойства и увеличиваются на 7–10% при увеличении пористости материала (см. рис. 7).

Полученные результаты позволяют точнее судить о характере напряжённо-деформированного состояния резинометаллической сейсмоопоры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. В. И. Дырда, Н. И. Лисица, Н. Г. Марьянков, Т. Е. Твердохлеб, Е. Ю. Заболотная, Н. Н. Лисица, Н. В. Тымко, “Обоснование и выбор параметров резинометаллических сейсмоопор” // *Геотехническая механика*, 2009. № 84. С. 17–23. [V. I. Dyrda, N. I. Lisitsa, N. G. Maryankov, T. E. Tverdokhleba, E. Yu. Zabolotnaya, N. N. Lisitsa, N. V. Tymko, “The justification and the choice of the rubber-metal seismic bearing parameters”, *Geotekhnicheskaya Mekhanika*, 2009, no. 84, pp. 17–23 (In Russian)].
2. А. А. Чылбак, “Методика оценки прочности сейсмоизолированного здания при сейсмическом воздействии” // *Вестник Тувинского государственного университета*, 2013. № 3, Технические и физико-математические науки. С. 65–70. [A. A. Chylbak, “The technique of evaluating strength structure located on the seismic isolation system”, *Vestnik Tuvinского gosuniversiteta*, 2013, no. 3, Tekhnicheskie i fiziko-matematicheskie nauki, pp. 65–70 (In Russian)].
3. В. В. Моторин, *Разработка, исследование и реализация метода виброзащиты зданий с применением многослойных резинометаллических заменяемых виброизоляторов*: Автореф. дис. . . канд. техн. наук; спец. 05.23.17 «Строительная механика». М., 2005. 19 с. [V. V. Motorin, *Development, research and implementation of vibration protection method for buildings using replaceable multilayer rubber isolators*, Thesis of Cand. Sci. Dissertation, Moscow, 2005, 19 pp. (In Russian)].
4. О. А. Ковальчук, Д. А. Зубков, П. И. Андреева, “Исследование эффективности резинометаллических виброизоляторов фирмы «Вибросейсмозащита» применительно к кар-

- касным зданиям, возведенным вблизи тоннелей метро мелкого заложения” // *Вестник МГСУ*, 2011. № 6. С. 335–340. [O. A. Kovalchuk, D. A. Zubkov, P. I. Andreeva, “A study of the efficiency of rubber-and-metal vibroisolators produced by the “Vibroseismozashtshita” company with respect to the frame buildings erected near shallow underground railway tunnels”, *Vestnik MGSU*, 2011, no. 6, pp. 335–340 (In Russian)].
5. Ю. Г. Козуб, *Напряженно-деформированное состояние резинометаллических виброизоляторов: Modern Problems and Ways of Their Solution in Science, Transport, Production and Education’2012* (8–27 December, 2012), 2012. 10 с., <http://www.sworld.com.ua/konfer29/1109.pdf>. [Yu. G. Kozub, *Stress-strain state of rubber-metal vibration and seismic isolators, Modern Problems and Ways of Their Solution in Science, Transport, Production and Education’2012* (8–27 December, 2012), 2012, 10 pp. (In Russian), <http://www.sworld.com.ua/konfer29/1109.pdf>].
 6. Э. Э. Лавендел, *Расчет резинотехнических изделий*. М.: Машиностроение, 1976. 232 с. [E. E. Lavendelis, *Design of Rubber-Technical Construction Elements*, Moscow, Mashinostroenie, 1976, 232 pp. (In Russian)]
 7. С. И. Дымников, “Расчет резинотехнических деталей при средних деформациях” // *Механика полимеров*, 1968. №2. С. 271–275; S. I. Dymnikov, “Calculation of rubber engineering components for average deformations”, *Polymer Mechanics*, 1968, vol. 4, no. 2, pp. 206–210 doi: [10.1007/BF00855620](https://doi.org/10.1007/BF00855620).
 8. В. Л. Бидерман, Н. А. Сухова, “Расчет цилиндрических и прямоугольных длинных резиновых амортизаторов сжатия” // *Расчеты на прочность*, 1968. №13. С. 55–72. [V. L. Biderman, N. A. Sukhova, “Calculation of cylindrical and rectangular long rubber shock compression”, *Raschety na prochnost’*, 1968, no. 13, pp. 55–72 (In Russian)].
 9. В. И. Дырда, Н. И. Лисица, А. В. Новикова, С. Н. Гребенюк, Ю. Г. Козуб, А. А. Бова, “Определение напряженно-деформированного состояния резинометаллических сейсмоопор” / *Методы розв’язування прикладних задач механіки деформіованого твердого тіла*, Збірник наукових праць. Т. 13. Дніпропетровськ: Ліра, 2012. С. 152–158, <http://dspace.luguniv.edu.ua/jspui/handle/123456789/441>. [V. I. Dyrda, N. I. Lisitsa, A. V. Novikova, S. N. Grebenjuk, Yu. G. Kozub, A. A. Bova, “Determination of the stress-strain state of rubber-metal seismic bearing”, *Metodi rozv’yazuvannya prikladnikh zadach mekhaniki deformivnogo tverdogo tila* [Methods of Solving Applied Problems in Solids Mechanics]. V. 13, Dnipropetrovsk, Lira, 2012, pp. 152–158 (In Russian), <http://dspace.luguniv.edu.ua/jspui/handle/123456789/441>].
 10. В. М. Мальков, *Механика многослойных эластомерных конструкций*. СПб.: СПбГУ, 1998. 320 с. [V. M. Malkov, *Mekhanika mnogosloynnykh elastomernykh konstruksiy* [Mechanics of Multilayers Elastomeric Structures], St. Petersburg, St. Petersburg University Press, 1998, 320 pp. (In Russian)]
 11. В. В. Киричевский, *Метод конечных элементов в механике эластомеров*. Киев: Наукова думка, 2002. 655 с. [V. V. Kirichevskiy, *Metod konechnykh elementov v mekhanike elastomerov* [Finite Element Method in Mechanics of Elastomers], Kiev, Naukova Dumka, 2002, 655 pp. (In Russian)]
 12. В. Л. Нарусберг, Г. А. Тетерс, *Устойчивость и оптимизация оболочек из композитов*. Рига: Зинатне, 1988. 299 с. [V. L. Narusberg, G. A. Teters, *Ustoychivost’ i optimizatsiya obolochek iz kompozitov* [Stability and Optimization of a Shell Made of Composite Materials], Riga, Zinatne, 1988, 299 pp. (In Russian)]
 13. М. С. Ковальченко, “Механические свойства изотропных пористых материалов. I. Упругие и реологические свойства” // *Порошковая металлургия*, 1993. №3(363). С. 89–96; M. S. Koval’chenko, “Mechanical properties of isotropic porous materials. I. Elastic and rheological properties”, *Powder Metallurgy and Metal Ceramics*, 1993, vol. 32, no. 3, pp. 268–273 doi: [10.1007/BF00559762](https://doi.org/10.1007/BF00559762).
 14. R. W. Lewis, B. A. Schrefler, *The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media*, Chichester, Wiley, 1998.
 15. E. Bemer, M. Boutéca, O. Vincké, N. Hoteit, O. Ozanam, “Poromechanics: from linear

- poroelasticity to non-linear poroelasticity and poroviscoelasticity”, *Oil & Gas Science and Technology – Rev. IFP*, 2001, vol. 56, no. 6, pp. 531–544 doi: [10.2516/ogst:2001043](https://doi.org/10.2516/ogst:2001043).
16. X. Chateau, L. Dormieux, “Micromechanics of saturated and unsaturated porous media”, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 2002, vol. 26, no. 8, pp. 831–844 doi: [10.1002/nag.227](https://doi.org/10.1002/nag.227).
 17. O. Coussy, R. Eymard, “Non-Linear Binding and the Diffusion–Migration Test”, *Transport in Porous Media*, 2003, vol. 53, no. 1, pp. 51–74 doi: [10.1023/A:1023529906079](https://doi.org/10.1023/A:1023529906079).
 18. В. В. Киричевский, А. С. Сахаров, *Нелинейные задачи термомеханики конструкций из слабосжимаемых эластомеров*. Киев: Будівельник, 1992. 216 с. [V. V. Kirichevskii, A. S. Sakharov, *Nelineynyye zadachi termomekhaniki konstruksiy iz slaboszhimayemykh elastomerov* [Nonlinear Problems of the Thermomechanics of Structures of Weakly Compressible Elastomers], Kiev, Budivel'nyk, 1992, 216 pp. (In Russian)]
 19. С. М. Гребенюк, В. З. Юречко, “Визначення напружено-деформованого стану конструкцій із пористих матеріалів” / *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*, Збірник наукових праць. Т. 15. Дніпропетровськ: Ліра, 2011. С. 60–69. [S. M. Grebenjuk, V. Z. Yurechko, “Definition of stress-strain state for constructions made of porous materials”, *Problemi obchisluyval'noi mekhaniki i mitsnosti konstruksiy* [Problems of Computational Mechanics and Strength of Structures]. V. 15, Dnipropetrovsk, Lira, 2011, pp. 60–69 (In Ukrainian)].
 20. А. С. Сахаров, В. Н. Кислокий, В. В. Киричевский, И. Альтенбах, У. Габберт, Ю. Данкерт, Х. Кепплер, З. Кочык, *Метод конечных элементов в механике твёрдых тел*. Киев: Вища школа, 1982. 480 с. [A. S. Sakharov, V. N. Kislookiy, V. V. Kirichevskiy, I. Al'tenbakh, U. Gabbert, J. Dankert, Kh. Keppler, Z. Kochyk, *Metod konechnykh elementov v mekhanike tvordykh tel* [Finite Elements Method in Solid Mechanics], Kiev, Vishcha shkola, 1982, 480 pp. (In Russian)]
 21. С. Н. Гребенюк, А. А. Бова, “Повышение точности моментной схемы конечного элемента для слабосжимаемых материалов” / *Современные проблемы и пути их решения в науке, транспорте, производстве, образовании*, Сборник научных трудов по материалам международной научно-практической конференции. Т. 22, Физика и математика, География. Одесса: Черноморье, 2009. С. 55–64. [S. N. Grebenjuk, A. A. Bova, “Improving the accuracy of moment finite element schemes for slightly compressible materials”, *Sovremennyye problemy i puti ikh resheniya v nauke, transporte, proizvodstve, obrazovanii* [Modern Problems and Their Solutions in Science, Transportation, Manufacturing, Education], Collection of Scientific Papers Based on International Scientific and Practical Conference. V. 22, Odessa, Chernomor'ye, 2009, pp. 55–64 (In Russian)].
 22. В. В. Киричевский, Б. М. Дохняк, Ю. Г. Козуб, С. И. Гоменюк, Р. В. Киричевский, С. Н. Гребенюк, *Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «MIRELA+»*. Киев: Наукова думка, 2005. 416 с. [V. V. Kirichevskiy, B. M. Dokhnyak, YU. G. Kozub, S. I. Gomenjuk, R. V. Kirichevskiy, S. N. Grebenjuk, *Metod konechnykh elementov v vychislitel'nom komplekse “MIRELA+”* [Finite element method in obtained complex “MIRELA+”], Kiev, Naukova dumka, 2005, 416 pp. (In Russian)]
 23. В. И. Самуль, *Основы теории упругости и пластичности*. М.: Высшая школа, 1982. 264 с. [V. I. Samul, *Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti* [Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity], Moscow, Vysshaya shkola, 1982, 264 pp. (In Russian)]

Поступила в редакцию 20/XII/2013;
в окончательном варианте — 29/I/2014;
принята в печать — 21/II/2014.

MSC: 74S05

THE STRESS-STRAIN STATE OF THE RUBBER-METAL SEISMIC BEARING

S. I. Gomenjuk, S. N. Grebenjuk, A. A. Bova, V. Z. Jurechko

Zaporizhzhya National University,
66, Zhukovskogo st., Zaporizhzhya, 69600, Ukraine.

This work is devoted to elaboration of finite element approach for the numerical analysis of parameters of the stress-strain state of the rubber-metal seismic bearing under viscoelastic deformation in the presence of layers of porous rubber. Elastic characteristics of porous rubber were determined by self-consistency method for the spherical pores. The integral relations on the basis of Boltzmann–Volterra hereditary theory have been used for viscoelastic behavior modeling. The exponential core containing instant and long elastic characteristics of the material has been used as core of relaxation. The finite element model of deforming the construction with spatial discretization and time discretization was built on the basis of the variational principle. The resulting system of resolving equations contains the additional load vector modeling the rheological constituents of the deformation process; a modified Newton–Kantorovich method has been used to solve this system. For increasing the accuracy of numerical results the precise finite element moment scheme with cubic approximation of displacements has been applied. The numerical convergence of the finite element schemes has been studied on the example of solution of Lamé problem for hollow viscoelastic cylinder made of porous rubber. The rubber-metal seismic bearing was calculated on the assumption of the relaxation of the shift module of porous rubber only. The basic parameters of the stress-strain state have been obtained depending on the time and the applicable stamps of rubber.

Keywords: *rubber-metal seismic bearing, finite element moment scheme, cubic approximation, porosity, relaxation core, viscoelasticity.*

Received 20/XII/2013;
received in revised form 29/I/2014;
accepted 21/II/2014.

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1284>

© 2014 Samara State Technical University.

Citation: S. I. Gomenjuk, S. N. Grebenjuk, A. A. Bova, V. Z. Jurechko, “The Stress-strain State of the Rubber-metal Seismic Bearing”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 2 (35), pp. 64–81. doi: [10.14498/vsgtu1284](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1284). (In Russian)

Authors Details: *Sergej I. Gomenjuk* (Dr. Techn. Sci.), Professor, Dept. of Mathematic Modeling. *Sergej N. Grebenjuk* (Cand. Techn. Sci.), Associate Professor, Dept. of Mathematical Analysis. *Anna A. Bova*, Postgraduate Student, Dept. of Mathematical Analysis. *Vasilij Z. Jurechko*, Postgraduate Student, Dept. of Mathematical Analysis.

E-mail addresses: serega@znu.edu.ua (S.I. Gomenjuk), bova-anna@mail.ru (A.A. Bova, Corresponding author), gsm1212@ukr.net (S.N. Grebenjuk), iuriechko@i.ua (V.Z. Jurechko)