Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2014. № 3 (36). С. 31–43
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1332

УДК 517.956.27

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НЕИЗВЕСТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ В ЛИНЕЙНОМ ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

Р. А. Алиев

Азербайджанский университет кооперации,
Азербайджан, AZ 1106, Баку, ул. Наджафа Нариманова, 8в.

Аннотация

Исследуется обратная задача нахождения коэффициентов и решения линейного эллиптического уравнения в заданном прямоугольнике. Доказана теорема существования, единственности и устойчивости решения поставленной обратной задачи. С помощью метода последовательных приближений построен регуляризирующий алгоритм для определения нескольких коэффициентов.

Ключевые слова: обратная задача, эллиптическое уравнение, метод последовательных приближений, существование и единственность решения.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1332

Введение. Обратные задачи по определению коэффициентов дифференциальных уравнений с частными производными представляют интерес во многих прикладных исследованиях [1, 2]. Эти задачи приводят к необходимости приближенного решения обратных задач математической физики, которые некорректны в классическом смысле. К ним относятся задачи идентификации неизвестных плотностей источников и коэффициентов уравнения. Большое значение имеют коэффициентные задачи для эллиптических уравнений, в которых неизвестные коэффициенты не зависят от одной переменной. Такие модели характерны для задач теории фильтрации. В частности, определение теплофизических характеристик сред в стационарном случае приводит к обратным задачам для эллиптических уравнений [3–9]. Отметим также цикл работ [10–22], посвященный теоретическому и численному исследованию обратных задач для линейных и нелинейных уравнений эллиптического типа. Исследование таких задач вызвано как теоретическим интересом, так и практической необходимостью.

Целью данной работы является доказательство единственности и существования решений обратной краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка с дополнительным условием.

© 2014 Самарский государственный технический университет.

Образец для цитирования: Алиев Р. А. Об определении неизвестных коэффициентов при старших производных в линейном эллиптическом уравнении // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 3 (36). С. 31–43. doi: 10.14498/vsgtu1332.

Сведения об авторе: *Рамиз Аташ оглы Алиев* (к.ф.-м.н., доц.; ramizaliyev3@rambler.ru), доцент, каф. информатики.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу определения функций $\{a_1(x_2)$, $a_2(x_2)$, $u(x_1,x_2)\}$ из следующих условий:

$$-a_1(x_2)u_{x_1x_1} - a_2(x_2)u_{x_2x_2} + c(x_2)u = h(x_1,x_2), \quad (x_1,x_2) \in D; \tag{1}$$

$$u(0,x_2) = \phi_1(x_2), \quad u(l_1,x_2) = \phi_2(x_2), \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2; \tag{2}$$

$$u(x_1,0) = \varphi_1(x_1), \quad u(x_1,l_2) = \varphi_2(x_1), \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant l_1; \tag{3}$$

$$a_1(x_2)u_{x_1}(0,x_2) = g_1(x_2), \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2; \tag{4}$$

$$a_2(x_2)u_{x_1}(l_1,x_2) = g_2(x_2), \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant l_2, \tag{5}$$

причём $\varphi_1(0) = \phi_1(0)$, $\varphi_2(l_1) = \phi_2(l_2)$, $\varphi_1(l_1) = \phi_2(0)$, $\varphi_2(0) = \phi_1(l_2)$. Здесь $D = \{(x_1,x_2) \mid 0 < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2\}$; $c(x_2) \in C^\alpha[0,l_2]$, $h(x_1,x_2)$, $h_{x_1x_1}(x_1,x_2) \in C^\alpha(\overline{D})$, $g_i(x_2) \in C^\alpha[0,l_2]$, $\phi_i(x_2) \in C^{2+\alpha}(0,l_2) \cap C[0,l_2]$, $\varphi_i(x_1) \in C^{2+\alpha}(0,l_1) \cap C[0,l_1]$ — заданные функции; $i = 1,2$; $0 < \alpha < 1$.

Определение 1. Функции $\{a_1(x_2)$, $a_2(x_2)$, $u(x_1,x_2)\}$ назовём решением задачи (1)–(5), если $u(x_1,x_2) \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$, $0 < a_i(x_2) \in C[0,l_2]$, $i = 1,2$, и удовлетворяются соотношения (1)–(5).

Нетрудно проверить, что если решение задачи (1)–(5) существует, то при принятых предположениях о гладкости данных в задаче $a_i(x_2) \in C^\alpha[0,l_2]$, $i = 1,2$, $u(x_1,x_2) \in C^{2+\alpha}(\overline{D})$. Действительно, при принятых предположениях из общей теории эллиптических уравнений следует, что $u(x_1,x_2) \in W_p^2(D) \subset C^{1+\alpha}(\bar{D})$ при $p > 2$ [23, с. 283]. Поэтому из дополнительных условий (4) и (5) следует, что $a_i(x_2) \in C^\alpha[0,l_2]$, $i = 1,2$. Поэтому $u(x_1,x_2) \in C^{2+\alpha}(\overline{D})$.

2. Единственность и устойчивость решения. Пусть кроме задачи (1)–(5) задана еще задача ($\bar{1}$)–($\bar{5}$), где все функции, входящие в (1)–(5), заменены соответствующими функциями с чертой. Положим

$$Z(x_1,x_2) = \bar{u}(x_1,x_2) - u(x_1,x_2), \quad \lambda_i(x_2) = \bar{a}_i(x_2) - a_i(x_2),$$

$$\delta_1(x_2) = \bar{c}(x_2) - c(x_2), \quad \delta_2(x_1,x_2) = \bar{h}(x_1,x_2) - h(x_1,x_2),$$

$$\delta_{i+2}(x_2) = \bar{\phi}_i(x_2) - \phi_i(x_2), \quad \delta_{i+4}(x_1) = \bar{\varphi}_i(x_1) - \varphi_i(x_1),$$

$$\delta_{i+6}(x_2) = \bar{g}_i(x_2) - g_i(x_2), \quad i = 1,2.$$

Через $\tilde{\delta}_2(x_1,x_2)$ обозначим функцию на границе, совпадающую соответственно с $\delta_{i+2}(x_2)$, $\delta_{i+4}(x_1)$, $i = 1,2$, и принадлежащую $C^{2+\alpha}(\bar{D})$.

Лемма 1. *Пусть решения задачи (1)–(5) существуют. Тогда верны следующие оценки:*

$$|u(x_1,x_2)| \leqslant \max\Big[\max_D\Big|\frac{h(x_1,x_2)}{c(x_2)}\Big|, \max_i \max_{x_1}|\varphi_i(x_1)|, \max_i \max_{x_2}|\phi_i(x_2)|\Big],$$

$$|u_{x_1x_1}(x_1,x_2)| \leqslant \max\Big[\max_D\Big|\frac{h_{x_1x_1}(x_1,x_2)}{c(x_2)}\Big|, \max_i \max_{x_1}|\varphi_{i_{x_1x_1}}(x_1)|,$$

$$\max_{x_2}|\theta_{10}(0,x_2)|, \max_{x_2}|\theta_{20}(l_1,x_2)|\Big],$$

$$|u_{x_2x_2}(x_1,x_2)| \leqslant \max\Big[\max_D \frac{1}{a_2(x_2)}|a_1(x_2)u_{x_1x_1} + c_1(x_2)u(x_1,x_2) - h(x_1,x_2)|,$$
$$\max_i \max_{x_1}|\phi_{ix_1x_1}|, \max_{x_1}|\theta_{11}(x_1,0)|, \max_{x_1}|\theta_{21}(x_1,l_2)|\Big];$$

здесь

$$\theta_{ik}(x_1,x_2) = \frac{1}{a_{k+1}(x_2)}\Big\{(1-k)\big[-a_2(x_2)\phi_{ix_2x_2}(x_2) + c(x_2)\phi_i(x_2)\big] +$$
$$+ k\big[-a_1(x_2)\varphi_{ix_1x_1}(x_1) + c(x_2)\varphi_i(x_1)\big] - h(x_1,x_2)\Big\}, \quad i=1,2,\ k=0,1.$$

Доказательство. Первое неравенство получается из принципа максимума. Уравнение (1) продифференцируем дважды по x_1, учитывая условия (3) и обозначая $\upsilon(x_1,x_2) = u_{x_1x_1}$, получим

$$\begin{gathered}
-a_1(x_2)\upsilon_{x_1x_1} - a_2(x_2)\upsilon_{x_2x_2} + c(x_2)u = h_{x_1x_1}(x_1,x_2), \quad (x_1,x_2)\in D;\\
\upsilon(0,x_2) = \theta_{10}(0,x_2), \quad \upsilon(l_1,x_2) = \theta_{20}(l_1,x_2), \quad 0\leqslant x_2\leqslant l_2;\\
\upsilon(x_1,0) = \varphi_{1_{x_1x_1}}(x_1), \quad u(x_1,l_2) = \varphi_{2_{x_1x_1}}(x_1), \quad 0\leqslant x_1\leqslant l_1.
\end{gathered}$$

Используя принцип максимума, получим вторую оценку. Последнее неравенство получается из уравнения. Лемма 1 доказана. □

Единственность решения обратной задачи (1)–(5) в предположении его существования устанавливает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $g_1(x_2)\neq 0$, $g_2(x_2)\neq 0$, $N\,\mathrm{mes}\,D < 1$. Тогда решение задачи* (1)–(5) *единственно и верна следующая оценка*:

$$\sum_{i=1}^2 \big\|\bar a_i(x_2) - a_i(x_2)\big\|_{C[0,l_2]} + \big\|\bar u - u\big\|_{C(\overline D)} \leqslant N_1\Big[\big\|\bar c(x_2) - c(x_2)\big\|_{C[0,l_2]} +$$
$$+ \big\|\bar h(x_1,x_2) - h(x_1,x_2)\big\|_{C(\overline D)} + \sum_{i=1}^2\big(\big\|\bar\phi_i(x_2) - \phi_i(x_2)\big\|_{C^2[0,l_2]} +$$
$$+ \big\|\bar\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_1)\big\|_{C^2[0,l_1]}\big) + \sum_{i=1}^2\big\|\bar g_i(x_2) - g_i(x_2)\big\|_{C[0,l_2]}\Big], \quad (6)$$

где N, N_1 — положительные постоянные, зависящие от данных и решения задачи.

Доказательство. Из ($\bar 1$)–($\bar 5$) соответственно вычтем (1)–(5) и положим $Z_1(x_1,x_2) = Z(x_1,x_2) - \tilde\delta_2(x_1,x_2)$. Тогда получим

$$-\bar a_1(x_2)Z_{1_{x_1x_1}} - \bar a_2(x_2)Z_{1_{x_2x_2}} =$$
$$= \delta_9(x_1,x_2) - \bar c(x_2)\tilde\delta_2(x_1,x_2) - \bar c(x_2)Z_1 + \sum_{i=1}^2 \alpha_i(x_1,x_2)\lambda_i(x_2); \quad (7)$$

$$Z_1(0,x_2)=0, \quad Z_1(l_1,x_2)=0; \tag{8}$$
$$Z_1(x_1,0)=0, \quad Z_1(x_1,l_2)=0; \tag{9}$$
$$\lambda_i(x_2)=\delta_{i+9}(x_2)+\gamma_i(x_2)Z_{1x_1}[(i-1)l_1,x_2], \quad i=1,2. \tag{10}$$

Здесь

$$\alpha_i(x_1,x_2)=u_{x_ix_i}, \quad \delta_9(x_1,x_2)=-\delta_1(x_2)u+\delta_2(x_1,x_2)+\sum_{i=1}^{2}\bar{a}_i(x_2)\tilde{\delta}_{2_{x_ix_i}}(x_1,x_2),$$

$$\gamma_i(x_2)=\bar{a}_i(x_2)\{-u_{x_1}[(i-1)l_1,x_2]\}^{-1},$$
$$\delta_{i+9}(x_2)=\gamma_i(x_2)\big\{[-\bar{a}_i(x_2)]^{-1}\delta_{i+6}(x_2)+\tilde{\delta}_{2x_1}[(i-1)l_1,x_2]\big\}, \quad i=1,2.$$

Обозначим

$$L_{ik}(x_j)=\left(\frac{x_j}{i}\right)^{k(j-1)}\frac{(2-i)l_j-(-1)^{i+1}(1/2)^{k(j-1)}x_j}{l_j},$$
$$P_i(x_j)=(-1)^{(j+1)i}l_j^{(3-2i)(j-1)}x_j^{(i-1)(j-1)}, \quad X_j=x_{j+(-1)^{j+1}},$$
$$t_{ijk}=(1-j+k)\delta_{6-k}[(i-1)l_1]+[(-1)^k(1-j)+1-k]\delta_{(i+2)x_2}(kl_2),$$

$i,j=1,2,\ k=0,1.$

Функция $\tilde{\delta}_2(x_1,x_2)$ определяется следующим образом:

$$\tilde{\delta}_2(x_1,x_2)=\sum_{i=1}^{2}\Bigg\{\sum_{j=1}^{2}L_{i0}(x_j)\big\{\delta_{i+2j}(X_j)+(1-j)L_{i0}(x_1)\delta_{i+2j}(0)\big\}+$$
$$+(-1)^{i+1}\frac{x_1x_2}{l_1l_2}\delta_4[(i-1)l_2]\Bigg\}-\frac{x_1}{l_1}\delta_4(0).$$

При помощи функции Грина [24] из (7)–(9) определим функцию $Z_1(x_1,x_2)$ через правую часть равенства и это выражение подставим в условие (10). Тогда получим

$$\begin{aligned} Z(x_1,x_2)&=\tilde{\delta}_2(x_1,x_2)+\int_D G(x_1,x_2,\xi_1,\xi_2)\Bigg[\delta_9(\xi_1,\xi_2)-\bar{c}(\xi_2)Z(\xi_1,\xi_2)+\\ &\qquad+\sum_{i=1}^{2}\alpha_i(\xi_1,\xi_2)\lambda_i(\xi_2)\Bigg]d\xi_1d\xi_2,\\ \lambda_i(x_2)&=\delta_{i+9}(x_2)+\gamma_i(x_2)\int_D G_{x_1}[(i-1)l_1,x_2,\xi_1,\xi_2]\Bigg[\delta_9(\xi_1,\xi_2)-\\ &\qquad-\bar{c}(\xi_2)Z(\xi_1,\xi_2)+\sum_{i=1}^{2}\alpha_i(\xi_1,\xi_2)\lambda_i(\xi_2)\Bigg]d\xi_1d\xi_2, \quad i=1,2. \end{aligned} \tag{11}$$

Функция Грина имеет следующие оценки [24]:

$$|G(x_1,x_2,\xi_1,\xi_2)|\leqslant M_1\ln\frac{1}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2}},$$

$$|G_{x_1}(x_1,x_2,\xi_1,\xi_2)| \leqslant M_2[(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_1)^2]^{-1/2}, \quad M_i>0,\ i=1,2.$$

При достаточно малой мере D для указанных интегралов в (11) существуют оценки $N_i[\mathrm{mes}\,D]^{1/2}$, $N_i>0$, $i=2,3,4$. Теперь в системе (11) положим

$$\chi = \max_{x_1,x_2}|Z(x_1,x_2)| + \sum_{i=1}^{2}\max_{x_2}|\lambda_i(x_2)|.$$

Из системы (11) получим

$$\chi \leqslant N_5\Big[\big\|\delta_1(x_2)\big\|_{C[0,l_2]} + \big\|\delta_1(x_1,x_2)\big\|_{C(\overline{D})} + \big\|\tilde\delta_2(x_1,x_2)\big\|_{C^2(\bar D)} + \\ + \sum_{i=1}^{3}\big\|\delta_{i+6}(x_2)\big\|_{C[0,l_2]}\Big] + \chi N_6[\mathrm{mes}\,D]^{1/2},$$

где N_5, N_6 — некоторые положительные числа. Обозначим $N=N_6^2$. По условию теоремы $N\,\mathrm{mes}\,D<1$, поэтому $N_6[mesD]^{1/2}<1$. Отсюда получим, что при $(x_1,x_2)\in\bar D$ верна оценка устойчивости (6). Единственность решения задачи следует из оценки (6). Теорема 1 доказана. □

3. Метод последовательных приближений. Метод последовательных приближений для решения задачи (1)–(5) применяется по следующей схеме:

$$-a_1^{(s)}(x_2)u^{(s+1)}_{x_1x_1} - a_2^{(s)}(x_2)u^{(s+1)}_{x_2x_2} + c(x_2)u^{(s+1)}=h(x_1,x_2),\ (x_1,x_2)\in D; \tag{12}$$
$$u^{(s+1)}(0,x_2)=\phi_1(x_2), \quad u^{(s+1)}(l_1,x_2)=\phi_2(x_2), \quad 0\leqslant x_2\leqslant l_2; \tag{13}$$
$$u^{(s+1)}(x_1,0)=\varphi_1(x_1), \quad u^{(s+1)}(x_1,l_2)=\varphi_2(x_1), \quad 0\leqslant x_1\leqslant l_1; \tag{14}$$
$$a_1^{(s+1)}(x_2)u^{(s+1)}_{x_1}(0,x_2)=g_1(x_2), \quad 0\leqslant x_2\leqslant l_2; \tag{15}$$
$$a_2^{(s+1)}(x_2)u^{(s+1)}_{x_1}(l_1,x_2)=g_2(x_2), \quad 0\leqslant x_2\leqslant l_2. \tag{16}$$

По схеме (12)–(16) последовательные итерации проводятся следующим образом. Сперва выбираются некоторые $a_i^{(0)}(x_2)>0$, $i=1,2$, принадлежащие $C^\alpha[0,l_2]$, и подставляются в уравнение (12). Далее решается задача (12)–(14) и находится $u^1(x_1,x_2)$. По функциям $u^{(1)}_{x_1}(0,x_2)$, $u^{(1)}_{x_1}(l_1,x_2)$ из условий (15)–(16) находятся $a_1^{(1)}(x_2)$, $a_2^{(1)}(x_2)$ и эти функции используются для проведения следующего шага итерации.

Теорема 2. *Пусть решение задачи (1)–(5) существует и при всех $s=0,1$ и т.д. $u^{(s)}(x_1,x_2)\in C^2(D)$, $a_i^{(s)}(x_2)\in C^\alpha[0,l_2]$, $i=1,2$, $g_1(x_2)u^{(s)}_{x_1}(0,x_2)>0$, $g_2(x_2)u^{(s)}_{x_1}(l_1,x_2)>0$, $N\,\mathrm{mes}\,D<1$, а производные $u^{(s)}(x_1,x_2)$ по x_1, x_2 до второго порядка равномерно ограничены. Тогда функции $\{a_1^{(s)}(x_2)$, $a_2^{(s)}(x_2)$, $u^{(s)}(x_1,x_2)\}$, полученные методом последовательных приближений (12)–(16), при $s\to+\infty$ равномерно сходятся к решению задачи (1)–(5) со скоростью геометрической прогрессии. N — положительная постоянная, зависящая от данных задачи.*

Доказательство. Положим

$$Z^{(s)}(x_1,x_2)=u(x_1,x_2)-u^{(s)}(x_1,x_2),\ \lambda_i^{(s)}(x_2)=a_i(x_2)-a_i^{(s)}(x_2),\ i=1,2.$$

Легко проверить, что эти функции удовлетворяют системе

$$-a_1(x_2)Z^{(s+1)}_{x_1x_1}-a_2(x_2)Z^{(s+1)}_{x_2x_2}+c(x_2)Z^{(s+1)}=\sum_{i=1}^{2}\alpha_i^{(s)}(x_1,x_2)\lambda_i^{(s)}(x_2); \quad (17)$$

$$Z^{(s+1)}(0,x_2)=0,\quad Z^{(s+1)}(l_1,x_2)=0, \quad (18)$$

$$Z^{(s+1)}(x_1,0)=0,\quad Z^{(s+1)}(x_1,l_2)=0, \quad (19)$$

$$\lambda_i^{(s+1)}(x_2)=\gamma_i^{(s)}(x_2)Z^{(s+1)}_{x_1}[(i-1)l_1,x_2],\quad i=1,2, \quad (20)$$

где $\alpha_{i_0}^{(s)}(x_1,x_2)=u^{(s+1)}_{x_ix_i}$, $\gamma_i^{(s)}(x_2)=a_i(x_2)\{-u^{(s+1)}_{x_1}[(i-1)l_1,x_2]\}^{-1}$, $i=1,2$.

С помощью функции Грина из (17)–(19) определим $Z^{(s+1)}(x_1,x_2)$ через правую часть равенства (17) и подставим это выражение в условия (20). Тогда получим

$$\lambda_i^{(s+1)}(x_2)=\gamma_i^{(s)}(x_2)\int_D G_{x_1}\left[(i-1)l_1,x_2,\xi_1,\xi_2\right]\times$$
$$\times\sum_{i=1}^{2}\alpha_i^{(s)}(\xi_1,\xi_2)\lambda_i^{(s)}(\xi_2)d\xi_1d\xi_2,\quad i=1,2. \quad (21)$$

Положим

$$\chi^{(s)}=\sum_{i=1}^{2}\max_{x_2}\left|\lambda_i^{(s)}(x_2)\right|.$$

Аналогично из системы (21) следует, что $\chi^{(s+1)}\leqslant\chi^{(s)}N_6[\mathrm{mes}\,D]^{1/2}$. Таким образом, теорема 2 доказана. □

4. Существование решения. Пусть $m(x_2)\in C^2[0,l_2]$, $m(x_2)>0$, $m'(0)>0$, $m'(l_2)<0$, $m''(x_2)\geqslant 0$. Введём следующие обозначения:

$$\eta(x_1)=\frac{3}{2}\mu_0^{-1}(x_1-l_1)^2,\quad \beta_{i+2n}=m^{(n)}(il_2-l_2),$$
$$\xi_{in}(x_1)=\eta(x_1)\varphi_i(l_1)+\beta_{i+2n}l_1^{-1}(l_1-x_1),$$
$$p_i(x_i)=(2-i)\xi_{10}(x_1)+(i-1)\xi_{21}(x_1),$$
$$M_1=\max_{x_2}l_1^{-1}[\phi_1(x_2)-\phi_2(x_2)],\quad M_{i+1}=\max[M_1,\max_{x_1}|\varphi_{ix_1}(x_1)|],$$
$$M=\max_{k=2,3}M_k,\quad i,j=1,2,\ n=0,1.$$

Лемма 2. *Пусть задача*

$$-a_1(x_2)u_{x_1x_1}-a_2(x_2)u_{x_2x_2}+u=0,\quad (x_1,x_2)\in D;$$
$$u(0,x_2)=\phi_1(x_2),\quad u(l_1,x_2)=\phi_2(x_2),\quad 0\leqslant x_2\leqslant l_2;$$

$$u(x_1,0)=\varphi_1(x_1),\quad u(x_1,l_2)=\varphi_2(x_1),\quad 0\leqslant x_1\leqslant l_1,$$

удовлетворяющая условиям

$$\varphi_1(0)=\phi_1(0),\quad \varphi_1(l_1)=\phi_2(0),\quad \varphi_2(l_1)=\phi_2(l_2),\quad \phi_1(l_2)=\varphi_2(0),$$

при заданных $a_1(x_2)$, $a_2(x_2)\geqslant\mu_0>0$ *имеет решение, которое принадлежит классу* $C^2(D)\cap C(\overline{D})$, *и выполняются условия*

$$0<l_1<1,\quad \mu_0^{-1}l_1<1,\quad m(x_2)\leqslant\frac{1}{2}\phi_2(x_2)\leqslant\frac{1}{3}\big[M-l_1^{-1}m(x_2)\big],$$

$$\beta_i\leqslant\frac{1}{2}\varphi_i(l_1)\leqslant\frac{1}{3}\big(M-\beta_i l_1^{-1}\big),$$

$$m(x_2)+\eta(0)\phi_2(x_2)\leqslant\phi_1(x_2)-\phi_2(x_2)\leqslant Ml_1,$$

$$x_1l_1^{-1}\beta_i\leqslant\varphi_i(0)-\varphi_i(x_1)\leqslant Mx_1,$$

$$\xi_{i0}(x_1)\leqslant\varphi_i(x_1)-\varphi_i(l_1)\leqslant M(l_1-x_1),$$

$$\phi_{ix_2x_2}(x_2)=0,\quad i=1,2,$$

тогда

$$\begin{gathered}-M-\phi_i(x_2)(2\mu_0)^{-1}l_1\leqslant u_{x_1}(il_1-l_1,x_2)\leqslant -m(x_2)l_1^{-1},\\ i=1,2,\quad 0<x_2<l_2.\end{gathered}\tag{22}$$

Доказательство. Положим

$$v_i(x_1,x_2)=u(x_1,x_2)+m(x_2)l_1^{-1}(x_1-il_1+l_1)-\phi_i(x_2)-(i-1)\eta(x_1)\phi_i(x_2),$$

$$\begin{aligned}V_i(x_1,x_2)=-u(x_1,x_2)+\phi_i(x_2)-M(x_1-il_1+l_1)+&\\ +(-1)^i(2\mu_0)^{-1}x_1(l_1-x_1)\phi_i(x_2),&\quad i=1,2.\end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что $v_1(x_1,x_2)$ удовлетворяет условиям задачи

$$\begin{gathered}-a_1(x_2)v_{1x_1x_1}-a_2(x_2)v_{1x_2x_2}+v_1=\\ =-\phi_1(x_2)+m(x_2)x_1l_1^{-1}-a_2(x_2)m''(x_2)x_1l_1^{-1},\\ v_1(0,x_2)=0,\quad v_1(l_1,x_2)=-\phi_1(x_2)+m(x_2)+\phi_2(x_2),\\ v_1(x_1,0)=\varphi_1(x_1)-\varphi_1(0)+m(0)x_1l_1^{-1},\\ v_1(x_1,l_2)=\varphi_2(x_1)-\varphi_2(0)+m(l_2)x_1l_1^{-1}.\end{gathered}$$

Поэтому, по условию леммы, наибольшее положительное значение функции $v_1(x_1,x_2)$ достигается при $x_1=0$. Тогда $v_{1_{x_1}}(0,x_2)\leqslant 0$, другими словами,

$$u_{x_1}(0,x_2)\leqslant -m(x_2)l_1^{-1}.\tag{23}$$

Аналогично прежнему, подставляя $V_1(x_1, x_2)$ и учитывая условия леммы, получаем, что наибольшее положительное значение функции $V_1(x_1, x_2)$ достигается при $x_1 = 0$. Поэтому $V_{1_{x_1}}(0, x_2) \leqslant 0$ или

$$-M - \phi_1(x_2)(2\mu_0)^{-1} l_1 \leqslant u_{x_1}(0, x_2). \tag{24}$$

Объединяя оценки (23) и (24), получим оценку (22) при $i = 1$. Аналогично прежнему получим оценку (22) при $i = 2$. Лемма 2 доказана. □

Теорема 3. *Пусть*

$$\phi_i(x_2) \in C^{2+\alpha}(0, l_2) \cap C[0, l_2], \quad \varphi_i(x_1) \in C^{2+\alpha}(0, l_1) \cap C[0, l_1],$$

$$0 < l_1 < 1, \quad \mu_0^{-1} l_1 < 1, \quad c(x_2) = 1, \quad h(x_1, x_2) = 0,$$

$$m(x_2) \leqslant \frac{1}{2}\phi_2(x_2) \leqslant \frac{1}{3}\big[M - l_1^{-1} m(x_2)\big], \quad \beta_i \leqslant \frac{1}{2}\varphi_i(l_1) \leqslant \frac{1}{3}\big(M - \beta_i l_1^{-1}\big),$$

$$m(x_2) + \eta(0)\phi_2(x_2) \leqslant \phi_1(x_2) - \phi_2(x_2) \leqslant M l_1,$$

$$x_1 l_1^{-1} \beta_i \leqslant \varphi_i(0) - \varphi_i(x_1) \leqslant M x_1, \quad \xi_{i0}(x_1) \leqslant \varphi_i(x_1) - \varphi_i(l_1) \leqslant M(l_1 - x_1),$$

$$g_i(x_2) < 0, \quad g_0 \leqslant -g_i(x_2) - \frac{1}{2}\phi_i(x_2) l_1,$$

$$\varphi_{i x_1}(j l_1 - l_1) < 0, \quad \phi_{i x_2 x_2}(x_2) = 0, \quad i, j = 1, 2;$$

$m(x_2)$ — *неотрицательная функция такая, что* $g_i(x_2)[m(x_2)]^{-1}$, $i = 1, 2$, *ограниченны;* g_0 — *положительное число. Тогда задача* (1)–(5) *имеет хотя бы одно решение.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$a_j(i l_2 - l_2) = g_j(i l_2 - l_2)[\varphi_{i x_1}(j l_1 - l_1)]^{-1}, \quad i, j = 1, 2.$$

Доказательство проводится методом последовательных приближений. Из утверждения леммы 2 следует, что

$$-M\big[1 + \phi_1(x_2)(2g_0)^{-1} l_1\big] \leqslant u_{x_1}^{(s+1)}(i l_1 - l_1, x_2) \leqslant -m(x_2) \cdot l_1^{-1},$$

$i = 1, 2,\ 0 < x_2 < l_2$, тогда

$$g_0 M^{-1} \leqslant a_i^{(s+1)}(x_2) \leqslant \max_{x_2}\big\{[-g_i(x_2)] \cdot [m(x_2)]^{-1}\big\} \cdot l_1,\ i = 1, 2,\ 0 < x_2 < l_2.$$

Таким образом, при всех приближениях $a_1^{(s)}(x_2^{(s)})$, $a_2^{(s)}(x_2^{(s)})$ — строго положительные, непрерывные и равномерно ограниченные функции. Тогда из общей теории эллиптических уравнений следует, что при условиях теоремы последовательность $\{u^{(s)}(x_1, x_2)\}$ равномерно ограничена по норме $W_p^2(D)$ $\forall p > 2$. Поэтому $\{u^{(s)}(x_1, x_2)\}$ компактна в $C^1(\overline{D})$. При этом из условий (15), (16) следует, что $\{a_1^{(s)}(x_2),\, a_2^{(s)}(x_2)\}$ будет компактна в $C[0, l_2]$. Отсюда и из (12)–(14) вытекает компактность $\{u^{(s)}(x_1, x_2)\}$ в $C^2(\overline{D})$. В системе (4)–(16), переходя к пределу при $s \to +\infty$, получим, что существует пара функции

$\{a_1(x_2), a_2(x_2), u(x_1,x_2)\}$, удовлетворяющая условиям (1)–(5). Теорема 3 доказана. □

Вместо условия (3) можно выбрать одно из следующих условий:

$$u_{x_2}(x_1,0) = \varphi_1(x_1), \quad u_{x_2}(x_1,l_2) = \varphi_2(x_1), \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant l_1; \tag{25}$$

$$u_{x_2}(x_1,0) = \varphi_1(x_1), \quad u(x_1,l_2) = \varphi_2(x_1), \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant l_1; \tag{26}$$

$$u(x_1,0) = \varphi_1(x_1), \quad u_{x_2}(x_1,l_2) = \varphi_2(x_1), \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant l_1. \tag{27}$$

Для таких задач $\tilde{\delta}_2(x_1,x_2)$ определяются соответственно в следующем виде:

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}_2(x_1,x_2) = \sum_{i,j=1}^{2} & L_{i1}(x_j)\delta_{i+2j}(X_j) + \\ & +(-1)^{j+1}x_2\Big(\frac{x_2}{2l_2}+j-2\Big)L_{i1}(x_1)\delta_{(i+2)_{x_2}}\big[(j-1)l_2\big],\end{aligned}$$

$$\tilde{\delta}_2(x_1,x_2) = \sum_{i,j=1}^{2} P_i(x_j)L_{i0}(x_j)\delta_{i+2j}(X_j) + l_2^{2-j}t_{ij0}L_{i0}(x_1)[L_{j0}(x_2)]^{2^{j-1}},$$

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}_2(x_1,x_2) = \sum_{i,j=1}^{2} l_j^{(i-1)(j-1)}\big[L_{i0}(x_j)\big]^{2^{(2-i)(j-1)}}\delta_{i+2j}(X_j) - \\ - l_2^{j-1}t_{ij1}L_{i0}(x_1)\big[L_{j0}(x_2)\big].\end{aligned}$$

Аналогично теореме 3 можно доказать следующие теоремы существования для соответствующих задач.

Теорема 4. *Пусть*

$$\phi_i(x_2) \in C^{1+\alpha}(0,l_2) \cap C[0,l_2], \quad \varphi_i(x_1) \in C^{2+\alpha}(0,l_1) \cap C[0,l_1],$$

$$0 < l_1 < 1, \quad \mu_0^{-1}l_1 < 1, \quad c(x_2) = 1, \quad h(x_1,x_2) = 0, \quad \varphi_1(0) \leqslant 0, \quad \varphi_2(0) \geqslant 0,$$

$$m(x_2) \leqslant \frac{1}{2}\phi_2(x_2) \leqslant \frac{1}{3}[M - l_1^{-1}m(x_2)],$$

$$-\frac{2}{3}\beta_{i+2}l_1^{-1}(2-i) \leqslant \varphi_i(l_1) \leqslant -\frac{2}{3}\beta_{i+2}l_1^{-1}(i-1),$$

$$\eta(0)\phi_2(x_2) + m(x_2) \leqslant \phi_1(x_2) - \phi_2(x_2) \leqslant M_1 l_1,$$

$$x_1 l_1^{-1}\beta_{i+2}(2i-3) \leqslant \varphi_i(2x_1 - ix_1) - \varphi_i(ix_1 - x_1) \leqslant 0,$$

$$(i-1)\xi_{i1}(x_1) \leqslant \varphi_i(x_1) - \varphi_i(l_1) \leqslant (2-i)\xi_{i1}(x_1),$$

$$g_i(x_2) < 0, \quad g_0 \leqslant -g_i(x_2) - \frac{1}{2}\phi_i(x_2)l_1, \quad \phi_{ix_2x_2}(x_2) = 0, \quad i = 1,2;$$

$m(x_2)$ — неотрицательная функция такая, что $g_i(x_2)[m(x_2)]^{-1}$, $i = 1,2$, ограниченны; g_0 — положительное число. Тогда задача (1)–(2), (4)–(5) *и* (25) *имеет хотя бы одно решение.*

Теорема 5. *Пусть*

$$\phi_i(x_2) \in C^{2+\alpha}(0,l_2) \cap C[0,l_2], \quad \varphi_1(x_1) \in C^{1+\alpha}(0,l_1) \cap C[0,l_1],$$

$$\varphi_2(x_1) \in C^{2+\alpha}(0, l_1) \cap C[0, l_1], \quad 0 < l_1 < 1, \quad \mu_0^{-1} l_1 < 1,$$

$$c(x_2) = 1, \quad h(x_1, x_2) = 0, \quad c(x_2) = 1, \quad \varphi_1(0) \leqslant 0, \quad \varphi_2(0) \geqslant 0,$$

$$m(x_2) \leqslant \frac{1}{2}\phi_2(x_2) \leqslant \frac{1}{3}[M_3 - l_1^{-1} m(x_2)],$$

$$-\frac{2}{3}\beta_{i+2} l_1^{-1}(2-i) \leqslant \varphi_i(l_1) \leqslant -\frac{2}{3}\beta_i \big[M_3 - l_1^{-1}\beta_i\big](i-1),$$

$$\eta(0)\phi_2(x_2) + m(x_2) \leqslant \phi_1(x_2) - \phi_2(x_2) \leqslant M_3 l_1,$$

$$(-1)^i \beta_{(i+2)/i} x_1 l_1^{-1} \leqslant \varphi_i(2x_1 - ix_1) - \varphi_i(ix_1 - x_1) \leqslant M_3 x_1 (i-1),$$

$$\xi_{i0}(x_1)(i-1) \leqslant \varphi_i(x_1) - \varphi_i(l_1) \leqslant \xi_{i1}(x_1)(2-i) + M_3(l_1 - x_1)(i-1),$$

$$g_i(x_2) < 0, \quad g_0 \leqslant -g_i(x_2) - \frac{1}{2}\phi_i(x_2) l_1, \quad \varphi_{2x_1}(il_1 - l_1) < 0,$$

$$\phi_{ix_2x_2}(x_2) = 0, \quad i = 1, 2;$$

$m(x_2)$ — неотрицательная функция такая, что $g_i(x_2)[m(x_2)]^{-1}$, $i = 1, 2$, ограничены; g_0 — положительное число. Тогда задача (1)–(2), (4)–(5) и (26) имеет хотя бы одно решение.

Теорема 6. *Пусть*

$$\phi_i(x_2) \in C^{2+\alpha}(0, l_2) \cap C[0, l_2], \quad \varphi_1(x_1) \in C^{2+\alpha}(0, l_1) \cap C[0, l_1],$$

$$\varphi_2(x_1) \in C^{1+\alpha}(0, l_1) \cap C[0, l_1], \quad 0 < l_1 < 1, \quad \mu_0^{-1} l_1 < 1,$$

$$c(x_2) = 1, \quad h(x_1, x_2) = 0, \quad 0 \leqslant \varphi_i(l_1) \leqslant \frac{2}{3}[-\beta_{i^2} l_1^{-1} + M_2(2-i)],$$

$$p_i(x_1) \leqslant \varphi_i(x_1) - \varphi_i(l_1) \leqslant M_2(l_1 - x_1)(2-i),$$

$$x_1 l_1^{-1} \beta_{i^2} \leqslant \varphi_i(0) - \varphi_i(x_1) \leqslant (2-i) M_2 x_1,$$

$$\eta(0)\phi_2(x_2) + m(x_1) \leqslant \phi_1(x_2) - \phi_2(x_2) \leqslant M_2 l_1,$$

$$g_i(x_1) < 0, \quad g_0 \leqslant -g_i(x_2) - \frac{1}{2}\phi_i(x_2) l_1, \quad \varphi_{1x_1}(il_1 - l_1) < 0,$$

$$\phi_{ix_2x_2}(x_2) = 0, \quad i = 1, 2;$$

$m(x_2)$ — неотрицательная функция такая, что $g_i(x_1)[m(x_2)]^{-1}$, $i = 1, 2$, ограничены; g_0 — положительные числа. Тогда задача (1)–(2), (4)–(5) и (27) имеет хотя бы одно решение.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. *Некорректные задачи математической физики и анализа.* М.: Наука, 1980. 288 с.
2. Кабанихин С. И. *Обратные и некорректные задачи.* М.: Наука, 2009. 458 с.
3. Искендеров А. Д. Некоторые обратные задачи об определении правых частей дифференциальных уравнений // *Изв. Акад. наук Азерб. ССР*, 1976. №2. С. 58–63.
4. Искендеров А. Д. Обратная задача об определении коэффициентов квазилинейного эллиптического уравнения // *Изв. Акад. наук Азерб. ССР*, 1978. №2. С. 80–85.

5. Искендеров А. Д. Обратная задача об определении коэффициентов эллиптического уравнения // *Диффер. уравн.*, 1979. Т. 15. С. 858–867.
6. Темирбулатов С. И. *Обратные задачи для эллиптических уравнений.* Алма-Ата: Казах. ун-т, 1975. 72 с.
7. Клибанов М. В. Двумерная обратная задача для одного эллиптического уравнения // *Диффер. уравн.*, 1983. Т. 19, № 6. С. 1072–1074.
8. Клибанов М. В. Обратные задачи в целом и карлемановские оценки // *Диффер. уравн.*, 1984. Т. 20, № 6. С. 1035–1041.
9. Клибанов М. В. Единственность в целом обратных задач для одного класса дифференциального уравнения // *Диффер. уравн.*, 1984. Т. 20, № 11. С. 1947–1953.
10. Хайдаров А. Один класс обратных задач для эллиптических уравнений // *Докл. Акад. наук СССР*, 1984. Т. 277, № 6. С. 1335–1337.
11. Хайдаров А. Об одной обратной задаче для эллиптических уравнений / *Некоторые задачи математической физики и анализа.* Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1984. С. 245–249.
12. Вабищевич П. Н. Обратная задача восстановления правой части эллиптического уравнения и ее численные решения // *Диффер. уравн.*, 1985. Т. 21, № 2. С. 277–284.
13. Вабищевич П. Н. О единственности некоторых обратных задач для эллиптических уравнений // *Диффер. уравн.*, 1988. Т. 24, № 12. С. 2125–2129.
14. Соловьев В. В. Обратные задачи для эллиптических уравнений на плоскости. I // *Диффер. уравн.*, 2006. Т. 42, № 8. С. 1106–1114.
15. Соловьев В. В. Обратные задачи определения источника и коэффициента в эллиптическом уравнении в прямоугольнике // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2007. Т. 47, № 8. С. 1365–1377.
16. Sylvester J., Uhlmann G. A Global Uniqueness Theorem for an Inverse Boundary Value Problem // *Annals of Mathematics.* vol. 125, no. 1. pp. 153–169. doi: 10.2307/1971291.
17. Yang R., Ou Y. Inverse coefficient problems for nonlinear elliptic equations // *ANZIAM Journal*, 2008. vol. 49, no. 02. pp. 271–279. doi: 10.1017/s1446181100012839.
18. Вахитов И. С. Обратная задача идентификации старшего коэффициента в уравнении диффузии-реакции // *Дальневост. матем. журн.*, 2010. Т. 10, № 2. С. 93–105.
19. Козлов В. А., Мазья В. Г., Фомин А. В. Об одном итерационном методе решения задачи Коши для эллиптических уравнений // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1991. Т. 31, № 1. С. 64–74.
20. Johansson T. An iterative procedure for solving a Cauchy problem for second order elliptic equations // *Mathematische Nachrichten*, 2004. vol. 272, no. 1. pp. 46–54. doi: 10.1002/mana.200310188.
21. Алиев Р. А. Теорема единственности одной обратной задачи для квазилинейного уравнения эллиптического типа // *Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки*, 2012. № 5. С. 5–10.
22. Алиев Р. А. Теорема единственности одной обратной задачи для квазилинейного уравнения эллиптического типа / *Труды седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием.* Часть 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи / Матем. моделирование и краев. задачи. Самара: СамГТУ, 2010. С. 13–15.
23. Ладыженская О. Г., Уральцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* М.: Наука, 1973. 576 с.
24. Miranda C. *Partial differential equations of elliptic type.* Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1970. xii+370 pp.

Поступила в редакцию 16/VI/2014;
в окончательном варианте — 11/VII/2014;
принята в печать — 27/VIII/2014.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki. 2014. Issue 3 (36). Pp. 31–43
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci. 2014. Issue 3 (36). Pp. 31–43]

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1332

MSC: 35R30, 35J25

ON THE DETERMINATION OF THE UNKNOWN COEFFICIENTS OF THE HIGHEST DERIVATIVES IN A LINEAR ELLIPTIC EQUATION

R. A. Aliyev

Azerbaijan University of Cooperation
8v, Narimanova str., Baku, AZ 1106, Azerbaijan.

Abstract

Inverse problems on restoration of coefficients to the differential equations with partial derivatives are of interest in many applied researches. These problems lead to necessity of the approached decision of inverse problems for the equations of mathematical physics which are incorrect in classical sense. In the article the existence, uniqueness and stability of the solution of the given inversion problem for the elliptic equation are proved.

Keywords: inverse problem, elliptic equation, successive approximations method, existence and uniqueness of solutions.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1332

REFERENCES

1. Lavrent'ev M. M., Romanov V. G., Shishatskii S. P. *Nekorrektnye zadachi matematicheskoi fiziki i analiza* [Ill-posed problems of mathematical physics and analysis]. Moscow, Nauka, 1980, 288 pp. (In Russian)
2. Kabanikhin S. I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* [Inverse and ill-posed problems]. Moscow, Nauka, 2009, 458 pp. (In Russian)
3. Iskenderov A. D. Some inverse problems on the determination of right-hand parts of differential equations, *Izv. Akad. Nauk Az. SSR*, 1976, no. 2, pp. 58–63 (In Russian).
4. Iskenderov A. D. Inverse problem about the determination of the coefficients of a quasilinear elliptic equation, *Izv. Akad. Nauk Az. SSR*, 1978, no. 2, pp. 80–85 (In Russian).
5. Iskenderov A. D. The inverse problem of the determination of the coefficients in an elliptic equation, *Differ. Equ.*, 1979, vol. 15, pp. 605–612.
6. Temirbulatov S. I. *Obratnye zadachi dlia ellipticheskikh uravnenii* [Inverse problems for elliptic equations]. Alma-Ata, Kazakh. Univ., 1975, 72 pp. (In Russian)
7. Klibanov M. V. A two-dimensional inverse problem for an elliptic equation, *Differ. Uravn.*, 1983, vol. 19, no. 6, pp. 1072–1074 (In Russian).

© 2014 Samara State Technical University.

How to cite Reference: A l i y e v R. A. On the determination of the unknown coefficients of the highest derivatives in a linear elliptic equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 3 (36), pp. 31–43. doi: 10.14498/vsgtu1332. (In Russian)

Author Details: *Ramiz A. Aliyev* (Cand. Phys. & Math. Sci.; ramizaliyev3@rambler.ru), Associate Professor, Dept. of Informatics.

8. Klibanov M. V. Inverse problems in the "large" and Carleman bounds, *Differ. Equ.*, 1984, vol. 20, no. 6, pp. 755–760.
9. Klibanov M. V. Uniqueness in the large of solutions of inverse problems for a class of differential equations, *Differ. Equ.*, 1984, vol. 20, no. 11, pp. 1390–1395.
10. Khaidarov A. One class of inverse problems for elliptic equations, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1984, T. 277, № 6, C. 1335–1337 (In Russian).
11. Khaidarov A. On an inverse problem for elliptic equations, *Nekotorye zadachi matematicheskoi fiziki i analiza* [Some Problems of Mathematical Physics and Analysis]. Novosibirsk, Nauka, Siberian Branch, 1984, pp. 245–249 (In Russian).
12. Vabishchevich P. N. An inverse problem for reconstructing the right-hand side of an elliptic equation and its numerical solution, *Differ. Equ.*, 1985, vol. 21, pp. 201–207.
13. Vabishchevich P. N. Uniqueness of solutions of some inverse problems for elliptic equations, *Differ. Equ.*, 1988, vol. 24, no. 12, pp. 1443–1446.
14. Solov'ev V. V. Inverse problems for elliptic equations on the plane. I., *Differ. Equ.*, 2006, vol. 42, no. 8, pp. 1170–1179. doi: 10.1134/s0012266106080118.
15. Solov'ev V. V. Source and coefficient inverse problems for an elliptic equation in a rectangle, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2007, vol. 47, no. 8, pp. 1310–1322. doi: 10.1134/S096554250708009X.
16. Sylvester J., Uhlmann G. A Global Uniqueness Theorem for an Inverse Boundary Value Problem, *Annals of Mathematics*, vol. 125, no. 1, pp. 153–169. doi: 10.2307/1971291.
17. Yang R., Ou Y. Inverse coefficient problems for nonlinear elliptic equations, *ANZIAM Journal*, 2008, vol. 49, no. 02, pp. 271–279. doi: 10.1017/s1446181100012839.
18. Vakhitov I. S. Inverse problem of identification of the diffusion coefficient in diffision-reaction equation, *Dal'nevost. matem. zhurn.*, 2010, vol. 10, no. 2, pp. 93–105 (In Russian).
19. Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Fomin A. V. An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1991, vol. 31, no. 1, pp. 45–52.
20. Johansson T. An iterative procedure for solving a Cauchy problem for second order elliptic equations, *Mathematische Nachrichten*, 2004, vol. 272, no. 1, pp. 46–54. doi: 10.1002/mana.200310188.
21. Aliyev R. A. The uniqueness theorem of an inverse problem for a quasilinear elliptic equation, *Izvestiia vuzov. Severo-Kavkazskii region. Estestvennye nauki*, 2012, no. 5, pp. 5–10 (In Russian).
22. Aliyev R. A. The uniqueness theorem of an inverse problem for a quasilinear elliptic equation, Matem. modelirovanie i kraev. zadachi. Samara, Samara State Technical Univ., 2010, pp. 13–15 (In Russian).
23. Ladyzhenskaya O. A., Ural'tseva N. N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniia ellipticheskogo tipa* [Linear and quasilinear equations of elliptic type]. Moscow, Nauka, 1973, 576 pp. (In Russian)
24. Miranda C. *Partial differential equations of elliptic type.* Berlin, Heidelberg, New York, Springer Verlag, 1970, xii+370 pp.

Received 16/VI/2014;
received in revised form 11/VII/2014;
accepted 27/VIII/2014.