

УДК 539.3

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОЛЯ СВОБОДНОЙ ЭНЕРГИИ НА СТАДИЯХ УПРОЧНЕНИЯ И РАЗУПРОЧНЕНИЯ СРЕДЫ ГЕНКИ ПРИ НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ ОБЪЁМНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

К. В. Бердников, В. В. Стружанов

Институт машиноведения УрО РАН,
Россия, 620049, Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34.

Рассматривается среда Генки с разупрочнением при изотермическом квазистатическом деформировании. Предполагается, что объёмная деформация неположительна. В этом случае разупрочнение характеризуется падающей ветвью единой кривой. Для данных условий приводится функция свободной энергии. В пространстве «объёмная деформация – интенсивность деформаций» сдвига строятся её линии уровня на всех стадиях деформирования. Установлено, что на стадии упрочнения линиями уровня являются эллипсы. Функция свободной энергии возрастает при удалении от их центров. На стадии разупрочнения линиями уровня являются гиперболы. Функция свободной энергии убывает при удалении от их центров. Полученные результаты являются косвенным подтверждением смены типа краевой задачи при переходе материала на стадию разупрочнения с эллиптического на гиперболический.

Ключевые слова: среда Генки, свободная энергия, потенциальные поля, линии уровня, упрочнение, разупрочнение.

Введение. Разупрочняющиеся материалы, кривые одноосного деформирования которых имеют падающие ветви, известны достаточно давно и, естественно, все время привлекали внимание исследователей, как теоретиков, так и экспериментаторов [1–15]. На частных примерах было показано, что введение в рассмотрение разупрочнения материала приводит к более точному определению предельной несущей способности элементов конструкций. Однако построение теории определяющих соотношений для сред, обладающих свойством деформационного разупрочнения, еще далеко от завершения. В работе [16] предпринята попытка разработки частной модели материала Генки с разупрочнением при диагональном тензоре деформаций и условии неположительности объёмных деформаций. В предлагаемой авторами статье исследуются геометрические характеристики функции свободной энергии, определяющей свойства материала в предложенной модели.

1. При активном квазистатическом деформировании в изотермическом

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1307>

© 2014 Самарский государственный технический университет.

Образец цитирования: К. В. Бердников, В. В. Стружанов, “Потенциальные поля свободной энергии на стадиях упрочнения и разупрочнения среды Генки при неположительности объёмной деформации” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 2 (35). С. 82–88. doi: [10.14498/vsgtu1307](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1307).

Сведения об авторах: *Кирилл Вячеславович Бердников*, аспирант, лаб. микромеханики материалов. *Валерий Владимирович Стружанов* (д.ф.-м.н., проф.), главный научный сотрудник, лаб. микромеханики материалов.

E-mail addresses: kir.berdnikov@mail.ru (K.V. Berdnikov, *Corresponding author*), stru@imach.uran.ru (V.V. Struzhanov)

процессе функция свободной энергии для среды Генки с упрочнением имеет вид [17]

$$F(\Gamma, \theta) = \frac{1}{3}K \int_0^\theta \theta d\theta + \int_0^\Gamma T(\Gamma) d\Gamma. \quad (1)$$

Здесь θ — относительное изменение объёма, T — интенсивность касательных напряжений, Γ — интенсивность деформаций сдвига, $T(\Gamma) = G^s(\Gamma)\Gamma$ — уравнение единой кривой, G^s — секущий модуль единой кривой. Объёмная деформация упругая, т. е. объёмный модуль постоянен ($K = \text{const}$) и равен объёмному модулю в упругости.

В процессе деформирования материал переходит в стадию разупрочнения. Если предположить, что и в этом случае объёмный модуль не изменяется, что возможно только тогда, когда объёмная деформация неположительна, то свободная энергия будет также описываться формулой (1), причём единая кривая уже обладает падающей до нуля ветвью [16].

Свободная энергия, являясь потенциалом напряжений, определяет в пространстве (Γ, θ) некоторое потенциальное поле с линиями уровня, заданными уравнениями $F(\Gamma, \theta) = C$ ($C = \text{const}$). Вектор-градиент функции F , компонентами которого являются объёмные напряжения, связанные с объёмными деформациями модулем K , и интенсивность касательных напряжений T , ортогонален к линиям уровня данного потенциального поля, направлен в сторону возрастания функции F и задаёт определяющие соотношения среды Генки.

2. Сначала возьмем единую кривую деформирования, которая аппроксимируется кусочно-линейной функцией с падающим участком. Пусть для определённости

$$T(\Gamma) = \begin{cases} G\Gamma, & 0 \leq \Gamma \leq \Gamma_T; \\ G(\Gamma - \Gamma_T)/6 + G/50, & \Gamma_T < \Gamma \leq \Gamma_B; \\ -G(\Gamma - \Gamma_B)/2 + G/40, & \Gamma_B < \Gamma \leq \Gamma_Z; \\ 0, & \Gamma_Z < \Gamma. \end{cases}$$

Здесь G — модуль сдвига в упругости, $\Gamma_T = 0.02$ — предел текучести, $\Gamma_B = 0.05$ — предел прочности при сдвиге, $\Gamma_Z = 0.1$ — интенсивность деформаций сдвига при разрушении материала под действием касательных напряжений.

В упругости ($0 \leq \Gamma \leq \Gamma_T$) выражение свободной энергии (1) имеет вид

$$F_1(\Gamma, \theta) = \frac{1}{6}K\theta^2 + G\frac{\Gamma^2}{2}.$$

Линиями уровня потенциального поля, определяемого этой функцией, являются эллипсы с центром в начале координат, с отношением полуосей, равным $\sqrt{3G/K}$. Возрастание функции F_1 происходит при удалении от центра. В дальнейшем при построении линий уровня потенциальных полей будем использовать значения $K = 5 \cdot 10^5$ МПа, $G = 76 \cdot 10^3$ МПа.

При переходе на стадию упрочнения ($\Gamma_T < \Gamma \leq \Gamma_B$) функция свободной энергии принимает значение

$$F_2(\Gamma, \theta) = F_1(\Gamma_T, \theta') + \frac{1}{3}K \int_{\theta'}^\theta \theta d\theta + \int_{\Gamma_T}^\Gamma T(\Gamma) d\Gamma,$$

или после проведения необходимых преобразований

$$F_2(\Gamma, \theta) = \frac{1}{6}K\theta^2 + \frac{1}{12}G\Gamma^2 + \frac{1}{60}G\Gamma - \frac{1}{2}G\Gamma_T^2 - \frac{1}{12}G\Gamma_T^2 - \frac{1}{60}G\Gamma_T. \quad (2)$$

Здесь (Γ_T, θ') — точка выхода пути деформирования из области упругости в область упрочнения. Из выражения (2) следует, что функция свободной энергии в области упрочнения не зависит от координаты θ' . Линии уровня потенциальной функции (2) представляют собой эллипсы с центром в точке $(-0.1; 0)$ с отношением полуосей, равным $\sqrt{0.5G/K}$. При удалении от центра функция F_2 возрастает.

Отметим, что функции F_1 и F_2 в трехмерном пространстве (Γ, θ, F) определяют расширяющиеся в положительном направлении оси OF эллиптические параболоиды с вершинами, расположенными на плоскости (Γ, θ) соответственно в точках $(0; 0)$ и $(-0.1; 0)$.

После выхода на стадию разрушения ($\Gamma_B < \Gamma \leq \Gamma_Z$) имеем

$$F_3(\Gamma, \theta) = F_2(\Gamma_B, \theta'') + \frac{1}{3}K \int_{\theta''}^{\theta} \theta d\theta + \int_{\Gamma_B}^{\Gamma} T(\Gamma) d\Gamma.$$

Осуществляя некоторые преобразования, находим

$$F_3(\Gamma, \theta) = \frac{1}{6}K\theta^2 - \frac{1}{4}G\Gamma^2 + \frac{1}{20}G\Gamma + \frac{5}{12}G\Gamma_T^2 - \frac{1}{60}G\Gamma_T + \frac{1}{3}G\Gamma_B^2 - \frac{1}{30}G\Gamma_B. \quad (3)$$

Здесь (Γ_B, θ'') — точка выхода пути деформирования в область разрушения. Из формулы (3) следует независимость функции свободной энергии от координаты θ'' . Линиями уровня функции (3) являются гиперболы, вершина крайней левой ветви которых расположена в точке $(0.1; 0)$. При удалении от оси OG функция F_3 убывает. В трёхмерном пространстве (Γ, θ, F) функция F_3 определяет гиперболический параболоид — поверхность в виде седла, построенную относительно точки $(0.1; 0)$.

На последней стадии деформирования ($\Gamma > \Gamma_Z$), когда материал уже не сопротивляется сдвигу, свободная энергия описывается следующим выражением:

$$F_4(\Gamma, \theta) = F_3(\Gamma_Z, \theta_Z) + \frac{1}{3}K \int_{\theta_Z}^{\theta} \theta d\theta = \frac{1}{6}K\theta^2 + \frac{5}{12}G\Gamma_T^2 - \frac{1}{4}G\Gamma_Z^2 + \frac{1}{3}G\Gamma_B^2 - \frac{1}{30}G\Gamma_B + \frac{1}{4}G\Gamma_Z - \frac{1}{60}G\Gamma_T.$$

Линии уровня этой функции — прямые, параллельные оси OG . Возрастание функции F_4 происходит при удалении от оси.

На рис. 1 изображены линии уровня потенциальных полей, описанных выше, и некоторый гипотетический путь деформирования элемента среды.

3. Пусть теперь единая кривая деформирования на участке $0 \leq \Gamma \leq \Gamma_Z$ задана гладкой функцией $T(\Gamma) = G(1 - 10\Gamma)\Gamma$. Тогда свободная энергия определяется функцией

$$F(\theta, \Gamma) = \begin{cases} K\theta^2/6 + G\Gamma^2/2 - 10G\Gamma^3/3, & 0 \leq \Gamma \leq \Gamma_Z; \\ K\theta^2/6 + G\Gamma_Z^2/2 - 10G\Gamma_Z^3/3, & \Gamma_Z < \Gamma. \end{cases}$$

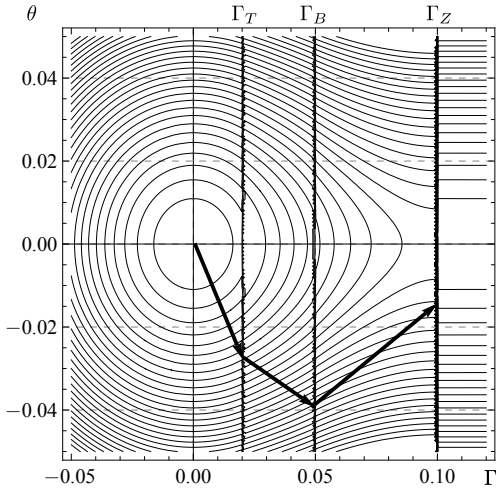


Рис. 1. Линии уровня потенциальных полей и некоторый гипотетический путь деформирования элемента среды

[Figure 1. The contour lines of potential fields, and some hypothetical deformation path for an element of medium]

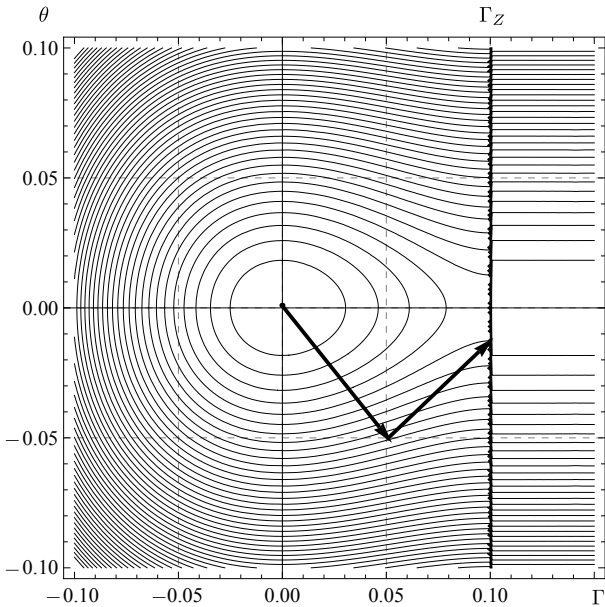


Рис. 2. Линии уровня в случае гладкой единой кривой деформирования и некоторый гипотетический путь деформирования элемента среды

[Figure 2. The contour lines of potential fields in the case of a smooth uniform deformation curve, and some hypothetical deformation path for an element of medium]

Линии уровня показаны на рис. 2. Сначала путь деформирования пересекает эллипсы, центры которых и отношение полуосей непрерывно изменяются. Затем пересекает гиперболы, центры которых также изменяются непрерывно. И, наконец, выходит в область разрушения, где материал может сопротивляться только гидростатическому сжатию. Отсюда линии уровня свободной энергии суть прямые, параллельные оси ОГ.

Заключение

1. В пространстве деформаций в общем случае существует множество потенциальных полей, определяющих свойства материала, и путь деформирования переходит из одного поля в другое.
2. На стадии упрочнения, когда линиями уровня являются эллипсы, а функция свободной энергии представляет собой эллиптический параболоид (выпуклая вниз поверхность), материал устойчиво сопротивляется деформированию. На стадии разупрочнения, когда линиями уровня являются гиперболы, а функция свободной энергии определяет гиперболический параболоид (выпуклая вверх поверхность), материал является собственно неустойчивым.
3. При упрочнении материала задачи механики по определению напряжённо-деформированного состояния являются задачами эллиптического типа, что гарантирует единственность решения. Переход в стадию разупрочнения сопровождается сменой типа задачи — она становится гиперболической, что должно приводить к неединственности решений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 13–08–00186–а).

This work is supported by RFBR, project no. 13–08–00186–a.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ/ REFERENCES

1. В. А. Ибрагимов, В. Д. Ключников, “Некоторые задачи для сред с падающей диаграммой” // *Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела*, 1971. №4. С. 116–121. [V. A. Ibragimov, V. D. Klyushnikov, “Some problems for media with falling stress-strain diagram”, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Tverd. Tela*, 1971, no. 4, pp. 116–121 (In Russian)].
2. А. А. Лебедев, Н. Г. Чаусов, “Феноменологические основы трещиностойкости материалов по параметрам спадающих участков диаграмм деформаций” // *Проблемы прочности*, 1983. №2. С. 6–10; А. А. Lebedev, N. G. Chausov, “Phenomenological fundamentals of the evaluation of crack resistance of materials on the basis of parameters of falling portions of strain diagrams”, *Strength of Materials*, 1983, vol. 15, no. 2, pp. 155–160 doi: [10.1007/BF01523460](https://doi.org/10.1007/BF01523460).
3. В. В. Стружанов, Вяч. В. Башуров, “Модификационная модель Мазинга” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007. №1(14). С. 29–39 doi: [10.14498/vsgtu484](https://doi.org/10.14498/vsgtu484). [V. V. Struzhanov, Vyach. V. Bashurov, “The modified Masing model”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2007, no. 1(14), pp. 29–39 (In Russian)].
4. В. П. Радченко, Е. В. Небогина, М. В. Басов, “Структурно-феноменологический подход к описанию полной диаграммы упругопластического деформирования” // *Изв. вузов. Машиностроение*, 2000. №5–6. С. 3–13. [V. P. Radchenko, E. V. Nebogina, M. V. Basov, “Structural-phenomenological approach to the description of a complete diagram of elastic-plastic deformation”, *Izv. vuzov. Mashinostroenie*, 2000, no. 5–6, pp. 3–13 (In Russian)].
5. Ю. И. Кадашевич, С. П. Помыткин, “Исследование одноосного и двуосного нагружения разупрочняющихся материалов по эндохронной теории неупругости” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. №1(26). С. 110–115 doi: [10.14498/vsgtu1007](https://doi.org/10.14498/vsgtu1007). [Yu. I. Kadashevich, S. P. Pomytkin, “Investigation of uniaxial and biaxial

- loadings of softening materials in endochronic theory of inelasticity”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2012, no. 1(26), pp. 110–115 (In Russian)].
6. В. В. Стружанов, “Ассоциированный и инкрементальный законы пластического течения для сред, проявляющих деформационное разупрочнение” // *Известия Уральского государственного университета*, 1998. № 10. С. 92–101, <http://hdl.handle.net/10995/24582>. [V. V. Struzhanov, “Associated and incremental laws of plastic flow for mediums exhibiting strain-softening behaviour”, *Izvestiya Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta*, 1998, no. 10, pp. 92–101 (In Russian)].
 7. Н. Г. Чаусов, “Полная диаграмма деформирования как источник информации о кинетике накопления повреждений и трещиностойкости материалов” // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*, 2004. № 7. С. 42–49. [N. G. Chausov, “Complete stress-strain diagram as a source of information on the kinetics of damage accumulation and crack resistance of materials”, *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov*, 2004, no. 7, pp. 42–49 (In Russian)].
 8. Б. В. Горев, И. А. Банщикова, “К описанию ниспадающего участка кривой деформирования «напряжение–деформация» по кинетическим уравнениям со скалярным параметром поврежденности” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008. № 2(17). С. 110–117 doi: [10.14498/vsgtu621](https://doi.org/10.14498/vsgtu621). [B. V. Gorev, I. A. Bانشchikova, “To the description of softening stage of “stress–strain” diagram with scalar damage parameter kinetic equations”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2008, no. 2(17), pp. 110–117 (In Russian)].
 9. В. Э. Вильдеман, М. П. Третьяков, “Испытания материалов с построением полных диаграмм деформирования” // *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2013. № 2. С. 93–98; V. E. Vil'deman, M. P. Tretyakov, “Material testing by plotting total deformation curves”, *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2013, vol. 42, no. 2, pp. 166–170 doi: [10.3103/S1052618813010159](https://doi.org/10.3103/S1052618813010159).
 10. В. Э. Вильдеман, М. П. Третьяков, “Анализ влияния жесткости нагружающей системы на стадию закритического деформирования материалов” // *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2013. № 3. С. 49–57; V. E. Vil'deman, M. P. Tretyakov, “Analysis of the effect of loading system rigidity on postcritical material strain”, *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2013, vol. 42, no. 3, pp. 219–226 doi: [10.3103/S1052618813030138](https://doi.org/10.3103/S1052618813030138).
 11. В. В. Стружанов, Е. А. Бахарева, “Математические методы в теории чистого изгиба прямоугольных балок из разупрочняющегося материала с симметричной диаграммой растяжения–сжатия” // *Вычислительная механика сплошных сред*, 2012. Т. 5, № 2. С. 158–167 doi: [10.7242/1999-6691/2012.5.2.19](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2012.5.2.19). [V. V. Struzhanov, E. A. Bakhareva, “Mathematical methods in the theory of pure bending of rectangular beams made of weakening material with symmetric stress-strain diagram”, *Computational continuum mechanics*, 2012, vol. 5, no. 2, pp. 158–167 (In Russian)].
 12. В. В. Стружанов, В. И. Миронов, *Деформационное разупрочнение материала в элементах конструкций*. Екатеринбург: УрО РАН, 1995. 192 с. [V. V. Struzhanov, V. I. Mironov, *Deformatsionnoye razuprochneniye materiala v elementakh konstruksiy* [Strain softening of material in structural elements], Ekaterinburg, Publishing House of UB RAS, 1995, 192 pp. (In Russian)]
 13. Л. В. Никитин, Е. И. Рыжак, “Об осуществимости состояний материала, соответствующих «падающему» участку диаграммы” // *Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела*, 1986. № 2. С. 155–161. [L. V. Nikitin, E. I. Ryzhak, “Feasibility of realizing states of material corresponding to ‘falling’ section of diagram”, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Tverd. Tela*, 1986, no. 2, pp. 155–161 (In Russian)].
 14. Е. И. Рыжак, “К вопросу об осуществимости однородного закритического деформирования при испытаниях в жесткой трехосной машине” // *Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела*, 1991. № 1. С. 111–127. [E. I. Ryzhak, “To the Problem of Realizability of Homogeneous Postcritical Deformation in a Rigid Triaxial Testing Machine”, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Tverd. Tela*, 1991, no. 1, pp. 111–127 (In Russian)].

15. В. П. Радченко, Е. В. Небогина, Е. А. Андреева, “Структурная модель разупрочняющегося при ползучести материала в условиях сложного напряженного состояния” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009. №1(18). С. 75–84 doi: [10.14498/vsgtu682](https://doi.org/10.14498/vsgtu682). [V. P. Radchenko, E. V. Nebogina, E. A. Andreeva, “Structural Model of Material Softening at Creep under Complex Stress Conditions”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2009, no. 1(18), pp. 75–84 (In Russian)].
16. В. В. Стружанов, К. В. Бердников, “Об определяющих соотношениях среды Генки для разупрочняющегося материала при диагональном тензоре деформаций” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. №3(28). С. 72–80 doi: [10.14498/vsgtu1115](https://doi.org/10.14498/vsgtu1115). [V. V. Struzhanov, K. V. Berdnikov, “On defining relations for the Hencky environment of softening of the material under diagonal stress tensor”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2012, no. 3(28), pp. 72–80 (In Russian)].
17. А. И. Лурье, *Теория упругости*. М.: Наука, 1970. 940 с.; А. I. Lurie, *Theory of Elasticity*, Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 2005, 1050 pp. doi: [10.1007/978-3-540-26455-2](https://doi.org/10.1007/978-3-540-26455-2).

Поступила в редакцию 10/IV/2014;
в окончательном варианте — 11/V/2014;
принята в печать — 23/V/2014.

MSC: 74C10

POTENTIAL FIELDS OF FREE ENERGY AT THE STAGES OF HARDENING AND SOFTENING OF THE HENCKY MEDIUM AT NONPOSITIVITY OF VOLUME DEFORMATION

K. V. Berdnikov, V. V. Struzhanov

Institute of Engineering Science, Ural Branch of RAS,
34, Komsomolskaya st., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation.

The Hencky medium with softening under isothermal and quasistatic deformation is considered. It is believed that volume deformation is not positive. In this case softening is characterized by the part of union curve with negative slope. For aforementioned conditions function of free energy is presented. For all stages of deformation in the space “volume deformation – intensity of shear’s deformation” level lines of the free energy are constructed. It is established that level lines are ellipses in hardening and function of free energy increases with distance from their centers, while in softening hyperbolas are level lines and function of free energy decreases with distance from their centers. Obtained results indirectly confirm the change in type of boundary value problem from elliptic to hyperbolic under material transition to the softening.

Keywords: *Hencky medium, free energy, potential fields, level lines, hardening, softening.*

Received 10/IV/2014;
received in revised form 11/V/2014;
accepted 23/V/2014.

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1307>
© 2014 Samara State Technical University.

Citation: K. V. Berdnikov, V. V. Struzhanov, “Potential Fields of Free Energy at the Stages of Hardening and Softening of the Hencky Medium at Nonpositivity of Volume Deformation”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 2 (35), pp. 82–88. doi: [10.14498/vsgtu1307](https://doi.org/10.14498/vsgtu1307). (In Russian)

Authors Details: *Kirill V. Berdnikov*, Postgraduate Student, Lab. of Matherial Micromechanics. *Valery V. Struzhanov* (Dr. Phys. & Math. Sci.), Chief Researcher, Lab. of Matherial Micromechanics.

E-mail addresses: kir.berdnikov@mail.ru (K.V Berdnikov, *Corresponding author*),
stru@imach.uran.ru (V.V. Struzhanov)