Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2014. № 3 (36). С. 44–56
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1321

УДК 517.956.6

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

М. Х. Рузиев

Институт математики, Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
100125, Узбекистан, Ташкент, Дурмон йули, 29.

Аннотация

Исследуется задача с условиями во внутренней характеристике и на частях линии вырождения для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом в неограниченной области. Единственность решения задачи доказывается с помощью принципа экстремума. При доказательстве существования решения задачи применяются теория сингулярных интегральных уравнений и интегральные уравнения Фредгольма.

Ключевые слова: принцип экстремума, единственность решения, существование решения, интегральные уравнения, уравнение Винера—Хопфа, индекс уравнения, интеграл Фурье.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1321

1. Введение и постановка задачи. Пусть $D = D^+ \cup D^- \cup I$ — область комплексной плоскости $z = x + iy$, где D^+ — полуплоскость $y > 0$, D^- — конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная характеристиками AC и BC уравнения

$$(\operatorname{sign} y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \tag{1}$$

исходящими из точек $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, и отрезком AB прямой $y = 0$; $I = \{(x, y) : -1 < x < 1, \ y = 0\}$. В уравнении (1) предполагается, что m, β_0 — некоторые действительные числа, удовлетворяющие условиям $m > 0$, $-m/2 < \beta_0 < 1$.

Пусть D_R^+ — конечная область, отсекаемая от области D^+ дугой нормальной кривой $x^2+4y^{m+2}/(m+2)^2 = R^2$, $-R \leqslant x \leqslant R$, $0 \leqslant y \leqslant ((m + 2)R/2)^{2/(m+2)}$, $A_R(-R, 0)$, $B_R(R, 0)$.

Введём обозначения:

$$I_1 = \{(x, y) : -\infty < x < -1, \ y = 0\}, \quad I_2 = \{(x, y) : 1 < x < \infty, \ y = 0\},$$

$C_0(C_1)$ — точки пересечения характеристики AC (BC) с характеристикой, исходящей из точки $E(c, 0)$, где $c \in I$ — произвольное фиксированное число, $D_R = D_R^+ \cup D^-$, D_R — подобласть неограниченной области D.

Образец для цитирования: Р у з и е в М. Х. О разрешимости краевой задачи для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 3 (36). С. 44–56. doi: 10.14498/vsgtu1321.

Сведения об авторе: *Менглибай Холтожибаевич Рузиев* (к.ф.-м.н.; mruziev@mail.ru), старший научный сотрудник.

Пусть $p(x) \in C^1[-1, c]$ — диффеоморфизм, переводящий отрезок $[-1, c]$ в отрезок $[c, 1]$, причём $p'(x) < 0$, $p(-1) = 1$, $p(c) = c$. В качестве примера такой функции приведем линейную функцию $p(x) = \delta - kx$, где $k = (1-c)/(1+c)$, $\delta = 2c/(1+c)$, $\delta + k = 1$, $\delta - kc = c$.

Краевая задача со смещением для уравнения смешанного типа в неограниченной области, эллиптическая часть которой — верхняя полуплоскость, исследована в работе [1]. Изучению краевой задачи в бесконечной полуполосе для обобщённого двуосесимметрического уравнения Гельмгольца посвящена работа [2]. Краевая задача для уравнения (1) в смешанной области, эллиптическая часть которой — полуполоса, решена в работе [3].

Отметим, что в задаче Геллерстедта [4] значение искомой функции в гиперболической части смешанной области D задается на характеристиках EC_0 и EC_1:

$$u\big|_{EC_0} = \psi_1(x), \quad u\big|_{EC_1} = \psi_2(x).$$

В данной работе решается задача, где характеристика EC_1 освобождена от краевого условия, и это недостающее условие Геллерстедта заменено внутренне краевым условием локального смещения на отрезке AB линии вырождения $y = 0$.

Задача Г. *Требуется найти в области D функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям*:

1) *функция $u(x, y)$ непрерывна в любой подобласти $\bar{D}_R$ неограниченной области D*;
2) *$u(x, y)$ принадлежит пространству $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области*;
3) *$u(x, y)$ является обобщенным решением класса R_1[5] в области D^-*;
4) *выполняются равенства*

$$\lim_{R\to\infty} u(x, y) = 0, \quad y \geqslant 0, \quad R^2 = x^2 + 4(m+2)^{-2} y^{m+2}; \tag{2}$$

5) *$u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям*:

$$u(x, y)|_{y=0} = \tau_i(x), \quad \forall x \in \bar{I}_i \quad i = 1, 2, \tag{3}$$

$$u(x, y)|_{EC_0} = \psi(x), \quad (c-1)/2 \leqslant x \leqslant c, \tag{4}$$

$$u(p(x), 0) = \mu u(x, 0) + f(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant c \tag{5}$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y\to+0} y^{\beta_0} u_y = \lim_{y\to-0} (-y)^{\beta_0} u_y, \quad x \in I\backslash\{c\}, \tag{6}$$

причём эти пределы при $x = \pm 1$, $x = c$ могут иметь особенности порядка ниже $1 - 2\beta$, где $\beta = (m + 2\beta_0)/(2(m+2))$, $f(x)$, $\psi(x)$, $\tau_i(x)$, $i = 1, 2$ — заданные функции, причём $f(x) \in C[-1, c] \cap C^{(1,\alpha_0)}(-1, c)$, $f(c) = 0$, $f(-1) = 0$, $\psi(x) \in C[(c-1)/2, c] \cap C^{(1,\delta_0)}((c-1)/2, c)$, $\psi(c) = 0$, μ — const, функции $\tau_i(x)$ в окрестности точек $x = -1$, $x = 1$ представимы в виде $\tau_i(x) = (1 - x^2)\tilde{\tau}_i(x)$ и они удовлетворяют условию Гельдера на любых интервалах $(-N, -1)$, $(1, N)$, $N > 1$ и для достаточно больших $|x|$ удовлетворяют неравенству $|\tau_i(x)| \leqslant M|x|^{-\delta}$, где δ, M — положительные постоянные.

Отметим, что условие (5) является внутренне краевым условием локального смещения на отрезке линии параболического вырождения [6–8].

2. Единственность решения задачи Г.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* $\tau_i(x) \equiv 0$, $i = 1, 2$, $\psi(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 0$, $0 < \mu < 1$. *Тогда задача* Г *имеет лишь тривиальное решение.*

Доказательство. Решение видоизмененной задачи Коши для уравнения (1) в области D^-, удовлетворяющее начальным данным

$$\lim_{y\to -0} u(x,y) = \tau(x), \quad x \in \bar{I}; \qquad \lim_{y\to -0} (-y)^{\beta_0} u_y = \nu(x), \quad x \in I,$$

даётся формулой Дарбу [9, с. 34]:

$$u(x,y) = \gamma_1 \int_{-1}^{1} \tau\Big[x + \frac{2t}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\Big](1+t)^{\beta-1}(1-t)^{\beta-1}dt+$$
$$+ \gamma_2(-y)^{1-\beta_0} \int_{-1}^{1} \nu\Big[x + \frac{2t}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\Big](1+t)^{-\beta}(1-t)^{-\beta}dt, \quad (7)$$

где $\gamma_1 = \Gamma(2\beta)2^{1-2\beta}/\Gamma^2(\beta)$, $\gamma_2 = -\Gamma(2-2\beta)2^{2\beta-1}/(1-\beta_0)\Gamma^2(1-\beta)$, $\Gamma(z)$ — гамма-функция [4].

В силу формулы (7) из краевого условия (4) после несложных вычислений получим

$$\nu(X) = \gamma D^{1-2\beta}_{X,c}\tau(X) + \Psi(X), \quad X \in (-1, c), \quad (8)$$

где

$$\Psi(X) = \frac{(c-X)^{\beta} D^{1-\beta}_{X,c}\psi((X+c)/2)}{\gamma_2(m+2)/2)^{1-2\beta}\Gamma(1-\beta)}, \quad X = 2x - c,$$

$$\gamma = \frac{2\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)((m+2)/4)^{2\beta}}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-2\beta)},$$

$D^l_{X,c}$ — оператор дробного дифференцирования в смысле Римана—Лиувилля [5].

Равенство (8) является первым функциональным соотношением между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесённым на интервал $(-1, c)$ оси $y = 0$ из гиперболической части D^- смешанной области D.

Теперь докажем, что если

$$\tau_i(x) \equiv 0, \quad i = 1, 2, \quad \psi(x) \equiv 0, \quad f(x) \equiv 0, \quad 0 < \mu < 1,$$

то решение задачи Г в области $D^+ \cup I_1 \cup \bar{I} \cup I_2$ в силу (2) тождественно равно нулю.

Пусть (x_0, y_0) — точка положительного максимума функции $u(x,y)$ в области $\bar{D}^+_R$.

В силу (2) $\forall\varepsilon > 0$ существует такое $R_0 = R_0(\varepsilon)$, что при $R > R_0(\varepsilon)$

$$|u(x,y)| < \varepsilon, \quad (x,y) \in A_R B_R. \quad (9)$$

В силу обозначения $u(x,0)=\tau(x)$, $x\in\bar{I}$ условие (5) перепишем в виде

$$\tau(p(x))=\mu\tau(x)+f(x),\quad x\in[-1,c]. \tag{10}$$

Отсюда при $x=c$, (где $f(x)\equiv 0$), имеем $\tau(p(c))=\mu\tau(c)$. Тогда в силу равенства $p(c)=c$ следует, что $\tau(c)(1-\mu)=0$, т. е. $\tau(c)=0$. В силу принципа Хопфа [10, с. 25] функция $u(x,y)$ своего положительного максимума и отрицательного минимума во внутренних точках области $\bar{D}_R^+$ не достигает. В силу $0<\mu<1$ из (10) (где $f(x)\equiv 0$) следует, что их также нет и в интервале $(c,1)$ оси $y=0$. Допустим, что искомая функция своего положительного максимума и отрицательного минимума достигает в точках интервала $(-1,c)$ оси $y=0$.

Пусть $(x_0,0)$ (где $x_0\in(-1,c)$) — точка положительного максимума (отрицательного минимума) функции $u(x,0)=\tau(x)$. Тогда в этой точке в случае положительного максимума (отрицательного минимума) [9, с. 74]

$$\nu(x_0)<0\quad(\nu(x_0)>0). \tag{11}$$

Хорошо известно, что в точке положительного максимума (отрицательного минимума) функции $\tau(x)$ для операторов дробного дифференцирования имеет место неравенство $D_{x_0,c}^{1-2\beta}\tau(x)>0$ ($D_{x_0,c}^{1-2\beta}\tau(x)<0$). Тогда в силу (8) (где $\Psi(x)\equiv 0$)

$$\nu(x_0)=\gamma D_{x_0,c}^{1-2\beta}\tau(x)>0\quad(\nu(x_0)=\gamma D_{x_0,c}^{1-2\beta}<0). \tag{12}$$

Неравенства (11) и (12) противоречат условию сопряжения (6), отсюда следует, что $x_0\notin(-1,c)$.

Следовательно, точки положительного максимума (отрицательного минимума) функции $u(x,y)$ нет на интервале AB. Пусть $R>R_0$. Из принципа Хопфа и предыдущих рассуждений получаем, что $(x_0,y_0)\in A_RB_R$ и в силу (9) — $|u(x_0,y_0)|<\varepsilon$. Следовательно, $|u(x,y)|<\varepsilon$ $\forall(x,y)\in\bar{D}_R^+$. Отсюда в силу произвольности ε при $R\to+\infty$ заключаем, что $u(x,y)\equiv 0$ в области $D^+\cup I_1\cup\bar{I}\cup I_2$. Тогда

$$\lim_{y\to+0}u(x,y)=0,\quad x\in\bar{I};\quad \lim_{y\to+0}y^{\beta_0}u_y=0,\quad x\in I. \tag{13}$$

С учётом (13) в силу непрерывности решения в области $\bar{D}_R^+$ и условия сопряжения (6) восстанавливая искомую функцию $u(x,y)$ в области D^- как решение видоизмененной задачи Коши с однородными данными, получим $u(x,y)\equiv 0$ в области $\bar{D}^-$. $\square$

3. Существование решения задачи Г.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* $p(x)=\delta-kx$, $\mu k^{1/2-3\alpha}<1$, $0<\mu<1$, $\beta_0>(1-m)/3$, *где* $\delta=2c/(1+c)$, $k=(1-c)/(1+c)$, $\alpha=(1-2\beta)/4$. *Тогда решение задачи* Г *существует.*

Доказательство. Решение задачи Дирихле, удовлетворяющее условиям (3) и $u(x,0)=\tau(x)$, $x\in\bar{I}$, представимо в виде

$$u(x,y)=k_2(1-\beta_0)y^{1-\beta_0}\int_{-1}^{1}\tau(t)(r_0^2)^{\beta-1}dt+F_1(x,y), \tag{14}$$

где

$$r_0^2 = (x-t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2},$$

$$F_1(x,y) = k_2(1-\beta_0) y^{1-\beta_0} \left[\int_{-\infty}^{-1} \tau_1(t)(r_0^2)^{\beta-1} dt + \int_1^{\infty} \tau_2(t)(r_0^2)^{\beta-1} dt \right],$$

$$k_2 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{2-2\beta} \frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)}.$$

Дифференцируя (14) по y и учитывая равенство

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ y^{1-\beta_0} \left[(x-t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} \right]^{\beta-1} \right\} =$$
$$= \frac{m+2}{2} y^{-\beta_0} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ (x-t) \left[(x-t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} \right]^{\beta-1} \right\},$$

получим

$$\frac{\partial u}{\partial y} = k_2(1-\beta_0) \frac{m+2}{2} y^{-\beta_0} \times$$
$$\times \int_{-1}^{1} \tau(t) \frac{\partial}{\partial t} \left\{ (x-t) \left[(x-t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} \right]^{\beta-1} \right\} dt + \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}. \quad (15)$$

В интеграле правой части равенства (15), выполнив операцию интегрирования по частям, с учётом $\tau(-1) = 0$, $\tau(1) = 0$ после несложных вычислений имеем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -k_2(1-\beta_0) \frac{m+2}{2} y^{-\beta_0} \int_{-1}^{1} \tau'(t)(x-t) \left[(x-t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} \right]^{\beta-1} dt +$$
$$+ \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}. \quad (16)$$

Умножая обе части равенства (16) на y^{β_0} и затем переходя к пределу при $y \to +0$, получим

$$\nu(x) = k_2(1-\beta_0) \frac{m+2}{2} \int_{-1}^{1} \frac{(x-t)\tau'(t) dt}{|x-t|^{2-2\beta}} + \Phi(x), \quad x \in (-1,1), \quad (17)$$

где

$$\Phi(x) = \lim_{y \to +0} y^{\beta_0} \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} = k_2(1-\beta_0)^2 \left(\int_{-\infty}^{-1} \frac{\tau_1(t) dt}{(x-t)^{2-2\beta}} + \int_1^{\infty} \frac{\tau_2(t) dt}{(t-x)^{2-2\beta}} \right).$$

Это есть второе функциональное соотношение между неизвестными функциями $\nu(x)$ и $\tau(x)$, принесёнными на интервал I оси $y = 0$ из верхней полуплоскости.

Заметим, что соотношение (1) справедливо для всего промежутка I.

Далее, разбивая промежуток интегрирования $(-1,1)$ на промежутки $(-1,c)$ и $(c,1)$, а затем в интегралах с пределом $(c,1)$ сделав замену переменного интегрирования $t=p(s)=\delta-ks$, учитывая равенство (10), соотношение (17) приведём к виду

$$\nu(x)=-k_2(1-\beta_0)\frac{m+2}{2}\left[\int_{-1}^{x}\frac{\tau'(t)dt}{(x-t)^{1-2\beta}}-\int_{x}^{c}\frac{\tau'(t)dt}{(t-x)^{1-2\beta}}+\right.$$
$$\left.+\mu\int_{-1}^{c}\frac{\tau'(s)ds}{(p(s)-x)^{1-2\beta}}+\int_{-1}^{c}\frac{f'(s)ds}{(p(s)-x)^{1-2\beta}}\right]+\Phi(x),\quad x\in(-1,c). \quad (18)$$

В силу (6), исключая функцию $\nu(x)$ из (8) и (18), получим

$$\frac{-2\gamma}{k_2(1-\beta_0)(m+2)}D_{x,c}^{1-2\beta}\tau(x)+F_0(x)=$$
$$=\mu\int_{-1}^{c}\frac{\tau'(s)ds}{(p(s)-x)^{1-2\beta}}+\int_{-1}^{x}\frac{\tau'(t)dt}{(x-t)^{1-2\beta}}-\int_{x}^{c}\frac{\tau'(t)dt}{(t-x)^{1-2\beta}},\quad x\in(-1,c), \quad (19)$$

где

$$F_0(x)=-\frac{2(\Psi(x)-\Phi(x))}{k_2(1-\beta_0)(m+2)}-\int_{-1}^{c}\frac{f'(s)ds}{(p(s)-x)^{1-2\beta}}.$$

Применив оператор $\Gamma(1-2\beta)D_{x,c}^{2\beta-1}$ к обеим частям равенства (19) и учитывая, что $D_{x,c}^{2\beta-1}D_{x,c}^{1-2\beta}\tau(x)=\tau(x)$, имеем

$$\frac{-2\gamma}{k_2(1-\beta_0)(m+2)}\Gamma(1-2\beta)\tau(x)+\Gamma(1-2\beta)D_{x,c}^{2\beta-1}F_0(x)=$$
$$=\Gamma(1-2\beta)D_{x,c}^{2\beta-1}\left[\mu\int_{-1}^{c}\frac{\tau'(s)ds}{(p(s)-x)^{1-2\beta}}+\int_{-1}^{x}\frac{\tau'(t)dt}{(x-t)^{1-2\beta}}-\right.$$
$$\left.-\int_{x}^{c}\frac{\tau'(t)dt}{(t-x)^{1-2\beta}}\right],\quad x\in[-1,c]. \quad (20)$$

Далее нетрудно убедиться в том, что

$$\Gamma(1-2\beta)D_{x,c}^{2\beta-1}\int_{-1}^{x}\frac{\tau'(t)dt}{(x-t)^{1-2\beta}}=$$
$$=-\pi\operatorname{ctg}(2\beta\pi)\tau(x)+\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{c-t}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(t)dt}{t-x}, \quad (21)$$

$$\Gamma(1-2\beta)D_{x,c}^{2\beta-1}\int_{x}^{c}\frac{\tau'(t)dt}{(t-x)^{1-2\beta}}=-\frac{\pi}{\sin(2\beta\pi)}\tau(x), \quad (22)$$

$$\Gamma(1-2\beta)D_{x,c}^{2\beta-1}\mu\int_{-1}^{c}\frac{\tau'(s)ds}{(p(s)-x)^{1-2\beta}}=$$
$$=\mu\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{p(s)-c}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(s)p'(s)ds}{p(s)-x}. \quad (23)$$

Подставляя (21)–(23) в (20), после несложных вычислений получим сингулярное интегральное уравнение относительно $\tau(x)$:

$$\tau(x)+\lambda\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{c-t}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(t)dt}{t-x}=$$
$$=-\lambda\mu\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{p(s)-c}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(s)p'(s)ds}{p(s)-x}+F_1(x),\quad x\in[-1,c],\quad (24)$$

где

$$F_1(x)=\lambda\Gamma(1-2\beta)D_{x,c}^{2\beta-1}F_0(x),$$
$$F_1(x)\in C[-1,c]\cap C^{0,\bar{\gamma}}(-1,c),\quad \bar{\gamma}>1-\beta,\quad \lambda=\frac{\cos(\beta\pi)}{\pi(1+\sin(\beta\pi))}.$$

Интегральный оператор правой части равенства (24) не является регулярным, так как подынтегральное выражение при $x=c$, $s=c$ имеет изолированную особенность первого порядка, поэтому это слагаемое в (24) выделено отдельно.

Временно считая правую часть уравнения (24) известной функцией, перепишем его в виде

$$\tau(x)+\lambda\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{c-t}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(t)dt}{t-x}=g_0(x),\quad x\in[-1,c],\qquad (25)$$

где

$$g_0(x)=-\lambda\mu\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{p(s)-c}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau(s)p'(s)ds}{p(s)-x}+F_1(x).\qquad (26)$$

Полагая $(c-x)^{2\beta-1}\tau(x)=\rho(x)$, $(c-x)^{2\beta-1}g_0(x)=g_1(x)$, уравнение (25) запишем в виде

$$\rho(x)+\lambda\int_{-1}^{c}\frac{\rho(t)dt}{t-x}=g_1(x).\qquad (27)$$

Решение уравнения (27) будем искать в классе функций, удовлетворяющих условию Гёльдера на $(-1,c)$ и ограниченных при $x=-1$, а при $x=c$ могущих обращаться в бесконечность порядка меньше $1-2\beta$. В этом классе индекс уравнения (27) равен нулю. Решение уравнения (27) находится в явном виде методом Карлемана—Векуа [11]:

$$\rho(x)=\frac{1+\sin(\beta\pi)}{2}g_1(x)-\frac{\cos(\beta\pi)}{2\pi}\left(\frac{1+x}{c-x}\right)^{(1-2\beta)/4}\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-t}{1+t}\right)^{(1-2\beta)/4}\frac{g_1(t)dt}{t-x}.$$

Отсюда, возвращаясь к прежним функциям, получим

$$\tau(x)=\cos^2(\pi\alpha)g_0(x)-\frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi}\int_{-1}^{c}\frac{(1+x)^{\alpha}(c-x)^{3\alpha}}{(1+t)^{\alpha}(c-t)^{3\alpha}}\frac{g_0(t)dt}{t-x},\qquad (28)$$

где $\alpha=(1-2\beta)/4$.

Теперь, подставляя (26) в (28), после некоторых преобразований имеем

$$\tau(x) = -\lambda\mu\cos^2(\pi\alpha)\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{p(s)-c}\right)^{4\alpha}\frac{\tau(s)p'(s)ds}{p(s)-x}+ \\ +\lambda\mu\frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi}(1+x)^{\alpha}(c-x)^{3\alpha}\int_{-1}^{c}\frac{\tau(s)p'(s)ds}{(p(s)-c)^{4\alpha}}\times \\ \times\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-t}{1+t}\right)^{\alpha}\frac{dt}{(p(s)-t)(t-x)}+F_2(x), \quad x\in[-1,c], \quad (29)$$

где

$$F_2(x) = \cos^2(\pi\alpha)F_1(x) - \frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi}\int_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{\alpha}\left(\frac{c-x}{c-t}\right)^{3\alpha}\frac{F_1(t)dt}{t-x}.$$

В силу $p(x)=\delta-kx$, где $k=(1-c)/(1+c)$, $\delta=2c/(1+c)$, уравнение (29) запишем в виде

$$\tau(x) = \lambda\mu k^{1-4\alpha}\cos^2(\pi\alpha)\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{c-s}\right)^{4\alpha}\frac{\tau(s)ds}{\delta-ks-x}- \\ -\lambda\mu k^{1-4\alpha}\frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi}(1+x)^{\alpha}(c-x)^{3\alpha}\times \\ \times\int_{-1}^{c}\frac{\tau(s)ds}{(c-s)^{4\alpha}}\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-t}{1+t}\right)^{\alpha}\frac{dt}{(t-x)(\delta-ks-t)}+F_2(x), \quad x\in[-1,c]. \quad (30)$$

В (30) вычислим внутренний интеграл:

$$A(x,s) = \int_{-1}^{c}\left(\frac{c-t}{1+t}\right)^{\alpha}\frac{dt}{(t-x)(\delta-ks-t)}.$$

Разлагая рациональный множитель подынтегрального выражения на простые дроби, используя формулы гипергеометрической функции и выполнив несложные вычисления, имеем

$$A(x,s) = \frac{1}{\delta-ks-x}\Big[\pi\,\mathrm{ctg}(\pi\alpha)\frac{(c-x)^{\alpha}}{(1+x)^{\alpha}}+\Gamma(-\alpha)\Gamma(1+\alpha)+ \\ +\frac{1+c}{1+\delta-ks}\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)F\Big(1-\alpha,1,2;\frac{1+c}{1+\delta-ks}\Big)\Big], \quad (31)$$

где $F(a,b,c;z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса [5].

Подставляя (31) в (30), после несложных вычислений получим следующее интегральное уравнение:

$$\tau(x) = \lambda\int_{-1}^{c}\frac{\mathrm{K}(x,s)\tau(s)ds}{\delta-ks-x}+F_2(x), \quad x\in[-1,c], \quad (32)$$

где

$$K(x,s) = -\mu k^{1-4\alpha}\frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi}\frac{(1+x)^{\alpha}(c-x)^{3\alpha}}{(c-s)^{4\alpha}}\times \\ \times\left[\Gamma(-\alpha)\Gamma(1+\alpha)+\frac{1+c}{1+\delta-ks}\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)F\left(1-\alpha,1,2;\frac{1+c}{1+\delta-ks}\right)\right].$$

Применив формулу Больца [5, с. 11] для гипергеометрической функции

$$F\Big(1-\alpha,1,2;\frac{1+c}{1+\delta-ks}\Big),$$

в силу формул

$$F(a,b,b;z)=(1-z)^{-a}\quad [5,\ \text{с. } 13],$$

$$\Gamma(1+z)=z\Gamma(z),\quad \Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\quad [5,\ \text{с. } 5],$$

функцию $\mathrm{K}(x,s)$ запишем в виде

$$\mathrm{K}(x,s)=\mu k^{1-3\alpha}\cos(\pi\alpha)\Big(\frac{1+x}{1+\delta-ks}\Big)^{\alpha}\Big(\frac{c-x}{c-s}\Big)^{3\alpha}. \tag{33}$$

Подставив (33) в равенство (32), получим

$$\tau(x)=\lambda\mu k^{1-3\alpha}\cos(\pi\alpha)\int_{-1}^{c}\Big(\frac{1+x}{1+\delta-ks}\Big)^{\alpha}\Big(\frac{c-x}{c-s}\Big)^{3\alpha}\frac{\tau(s)ds}{\delta-ks-x}+$$
$$+F_2(x),\quad x\in[-1,c]. \tag{34}$$

Выделив в уравнении (34) характеристическую часть, преобразуем его к виду

$$\tau(x)=\lambda\mu k^{1-3\alpha}\cos(\pi\alpha)\int_{-1}^{c}\Big(\frac{c-x}{c-s}\Big)^{3\alpha}\frac{\tau(s)ds}{\delta-ks-x}+$$
$$+R_1[\tau(x)]+F_2(x),\quad x\in[-1,c], \tag{35}$$

где

$$R_1[\tau(x)]=\lambda\mu k^{1-3\alpha}\cos(\pi\alpha)\int_{-1}^{c}\Big(\frac{c-x}{c-s}\Big)^{3\alpha}\frac{\tau(s)}{\delta-ks-x}\left[\Big(\frac{1+x}{1+\delta-ks}\Big)^{\alpha}-1\right]ds$$

— регулярный оператор. Уравнение (35) запишем в виде

$$\tau(x)=\lambda\mu k^{1-3\alpha}\cos(\pi\alpha)\int_{-1}^{c}\Big(\frac{c-x}{c-s}\Big)^{3\alpha}\frac{\tau(s)ds}{(c-s)\big(k+(c-x)/(c-s)\big)}+$$
$$+R_1[\tau(x)]+F_2(x),\quad x\in[-1,c]. \tag{36}$$

Осуществляя в равенстве (36) замену переменных

$$x=c-(1+c)e^{-\xi},\quad s=c-(1+c)e^{-t}$$

и обозначая

$$\rho(\xi)=\tau(c-(1+c)e^{-\xi})e^{(3\alpha-1/2)\xi},$$

приведём его к виду

$$\rho(\xi)=\lambda\mu k^{1-3\alpha}\cos(\pi\alpha)\int_{0}^{\infty}\frac{\rho(t)dt}{ke^{(\xi-t)/2}+e^{-(\xi-t)/2}}+$$
$$+R_2[\rho(\xi)]+F_3(\xi),\quad \xi\in(0,\infty), \tag{37}$$

где

$$R_2[\rho(\xi)] = R_1[\tau(c-(1+c)e^{-\xi})]e^{(3\alpha-1/2)\xi},$$

$$F_3(\xi) = F_2(c-(1+c)e^{-\xi})e^{(3\alpha-1/2)\xi}.$$

Заметим, что в силу условия $3\beta_0 > 1-m$ имеет место неравенство $6\alpha-1<0$.

Введём обозначение

$$\mathrm{N}(\zeta) = \frac{\lambda\mu k^{1-3\alpha}\cos(\pi\alpha)}{ke^{\zeta/2}+e^{-\zeta/2}}.$$

Тогда уравнение (37) запишем в виде

$$\rho(\xi) = \int_0^\infty \mathrm{N}(\xi-t)\rho(t)dt + R_2[\rho(\xi)] + F_3(\xi), \quad \xi\in(0,\infty). \tag{38}$$

Уравнение (38) является интегральным уравнением Винера—Хопфа [12, с. 55] и с помощью преобразования Фурье оно приводится к краевой задаче Римана, т. е. решается в квадратурах. Функции $\mathrm{N}(\xi)$, $F_3(\xi)$ имеют показательный порядок убывания на бесконечности, причём

$$\mathrm{N}'(\xi)\in C(0,\infty), \quad F_3(\xi)\in \mathrm{H}^{\alpha_1}(0,\infty).$$

Следовательно, $\mathrm{N}(\xi)$, $F_3(\xi) \in L_2\cap \mathrm{H}^{\alpha_1}$, а решение уравнения (38) ищется в классе $\{0\}$ [12, с. 12]. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений типа свёртки справедливы лишь в одном частном случае — когда индекс этих уравнений равен нулю. Индексом уравнения (38) будет индекс выражения $1-\hat{N}(\xi)$ с обратным знаком, где

$$\hat{N}(\xi) = \int_{-\infty}^\infty e^{i\xi t}\mathrm{N}(t)dt = \lambda\mu k^{1-3\alpha}\cos(\pi\alpha)\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\xi t}dt}{ke^{t/2}+e^{-t/2}}. \tag{39}$$

Вычислив интеграл Фурье, с помощью теории вычетов [9, с. 198] найдём

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\xi t}dt}{ke^{t/2}+e^{-t/2}} = \frac{\pi e^{-i\xi\ln k}}{\sqrt{k}\,\mathrm{ch}(\pi\xi)}. \tag{40}$$

Подставляя (40) в равенство (39), используя

$$\pi\lambda\cos(\pi\alpha) = \pi\frac{\cos(\beta\pi)}{\pi(1+\sin(\beta\pi))}\cos(\alpha\pi) = \sin(\alpha\pi),$$

имеем

$$\hat{N}(\xi) = \mu k^{1/2-3\alpha}\sin(\pi\alpha)\frac{e^{-i\xi\ln k}}{\mathrm{ch}(\pi\xi)}.$$

В силу условия

$$\mu k^{1/2-3\alpha} < 1$$

и так как

$$\operatorname{Re}(\hat{N}(\xi)) = \operatorname{Re}\left(\mu k^{1/2-3\alpha}\sin(\pi\alpha)\frac{e^{-i\xi\ln k}}{\operatorname{ch}(\pi\xi)}\right) = \\ = \mu k^{1/2-3\alpha}\sin(\pi\alpha)\frac{\cos(\xi\ln k)}{\operatorname{ch}(\pi\xi)} < \mu k^{1/2-3\alpha} < 1,$$

$\operatorname{Re}(1-\hat{N}(\xi)) > 0$. Следовательно, индекс уравнения (38)

$$\chi = -\operatorname{Ind}(1-\hat{N}(\xi)) = 0,$$

т. е. изменение аргумента выражения $1-\hat{N}(\xi)$ на действительной оси, выраженное в полных оборотах, равно нулю [12, с. 56]. Следовательно, уравнение (38) редуцируется к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, однозначная разрешимость которого следует из единственности решения задачи Г. □

ORCID
Menglibay Ruziev: http://orcid.org/0000-0002-1097-0137

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Репин О. А., Кумыкова С. К. Об одной краевой задаче со смещением для уравнения смешанного типа в неограниченной области // *Диффер. уравн.*, 2012. Т. 48, № 8. С. 1140–1149.
2. Абашкин А. А. Об одной задаче для обобщённого двуосесимметрического уравнения Гельмгольца в бесконечной полуполосе // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. № 1(26). С. 39–45. doi: 10.14498/vsgtu1023.
3. Рузиев М. Х. Краевая задача для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом в области, эллиптическая часть которой — полуполоса // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009. № 1(18). С. 33–40. doi: 10.14498/vsgtu645.
4. Gellerstedt S. Quelques problèmes mixtes pour l'équation $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$ // *Ark. Mat. Astron. Fys.*, 1937. vol. 26A, no. 3. pp. 1–32.
5. Смирнов М. М. *Уравнения смешанного типа.* М.: Высшая школа, 1985. 304 с.
6. Лернер М. Е., Пулькин С. П. О единственности решений задач с условиями Франкля и Трикоми для общего уравнения Лаврентьева—Бицадзе // *Диффер. уравн.*, 1966. Т. 11, № 9. С. 1255–1263.
7. Рузиев М. Х. О нелокальной задаче для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом в неограниченной области // *Изв. вузов. Матем.*, 2010. № 11. С. 41–49.
8. Мирсабуров М, Рузиев М. Х. Об одной краевой задаче для одного класса уравнений смешанного типа в неограниченной области // *Диффер. уравн.*, 2011. Т. 47, № 1. С. 112–119.
9. Салахитдинов М. С., Мирсабуров М. *Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами.* Ташкент: Университет, 2005. 224 с.
10. Бицадзе А. В. *Некоторые классы уравнений в частных производных.* М.: Наука, 1981. 448 с.
11. Мусхелишвили Н. И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.* М.: Наука, 1968. 551 с.
12. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. *Уравнения типа свертки.* М.: Наука, 1978. 295 с.

Поступила в редакцию 25/III/2014;
в окончательном варианте — 18/IV/2014;
принята в печать — 27/VIII/2014.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki. 2014. Issue 3 (36). Pp. 44–56
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci. 2014. Issue 3 (36). Pp. 44–56]

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1321

MSC: 35M12; 35A01, 35A02

ON THE SOLVABILITY OF BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR MIXED-TYPE EQUATION WITH A SINGULAR COEFFICIENT

M. Kh. Ruziev

Institute of Mathematics, National University of Uzbekistan named by after Mirzo Ulugbek,
29, Durmon yuli st., Tashkent, 100125, Uzbekistan.

Abstract

In this paper we study a problem with conditions on the inner characteristic and on some parts of the degeneration line for mixed type equation with singular coefficient in unbounded domain. We prove the uniqueness of solution of the mentioned problem with the help of the extremum principle. The proof of the existence of solution is based on the theory of singular integral equations and Fredholm integral equations.

Keywords: principle of extremum, unique solvability, existence of solution, singular coefficient, integral equations, Wiener–Hopf equation, index equation, Fourier integral.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1321

ORCID
Menglibay Ruziev: http://orcid.org/0000-0002-1097-0137

REFERENCES

1. Repin O. A., Kumykova S. K. On a boundary value problem with shift for an equation of mixed type in an unbounded domain, *Differ. Equ.*, 2012, vol. 48, no. 8, pp. 1127–1136. doi: 10.1134/S0012266112080083.
2. Abashkin A. A. On one problem in an infinity half-strip for biaxisimmetric Helmholtz equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2012, no. 1(26), pp. 39–45 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1023.
3. Ruziev M. Kh. Boundary Value Problem For the Equation of Mixed Type with Singular Coefficient in the Domain where the Elliptical Part Is a Half-band, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2009, no. 1(18), pp. 33–40 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu645.
4. Gellerstedt S. Quelques problèmes mixtes pour l'équation $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$, *Ark. Mat. Astron. Fys.*, 1937, vol. 26A, no. 3, pp. 1–32.
5. Smirnov M. M. *Equations of mixed type*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 51. Providence, R.I., American Mathematical Society (AMS), 1977, iii+232 pp.

How to cite Reference: Ruziev M. Kh. On the Solvability of Boundary Value Problem for Mixed-type Equation with a Singular Coefficient, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 3 (36), pp. 44–56. doi: 10.14498/vsgtu1321. (In Russian)

Author Details: *Menglibay Kh. Ruziev* (Cand. Phys. & Math. Sci.; mruziev@mail.ru), Senior Scientific Researcher.

6. Lerner M. E., Pul'kin S. P. On uniqueness of solutions of problems satisfying the Frankl and Tricomi conditions for the general Lavrent'ev–Bitsadze equation, *Differ. Uravn.*, 1966, vol. 11, no. 9, pp. 1255–1263 (In Russian).
7. Ruziev M. Kh. A nonlocal problem for a mixed-type equation with a singular coefficient in an unbounded domain, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2010, vol. 54, no. 11, pp. 36–43. doi: 10.3103/S1066369X10110046.
8. Mirsaburov M., Ruziev M. Kh. A boundary value problem for a class of mixed-type equations in an unbounded domain, *Differ. Equ.*, 2011, vol. 47, no. 1, pp. 111–118. doi: 10.1134/S0012266111010125.
9. Salakhitdinov M. S., Mirsaburov M. *Nelokal'nye zadachi dlia uravnenii smeshannogo tipa s singuliarnymi koeffitsientami* [Source of the Document Nonlocal Problems for Mixed-Type Equations with Singular Coefficients]. Tashkent, Universitet, 2005, 224 pp. (In Russian)
10. Bitsadze A. V. *Some classes of partial differential equations*, Advanced Studies in Contemporary Mathematics, vol. 4. New York etc., Gordon & Breach Science Publishers, 1988, xi+504 pp.
11. Muskhelishvili N. I. *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Fundamental equations, plane theory of elasticity, torsion and bending.* Leyden, Noordhoff International Publishing, 1975, xxxi+732 pp.. doi: 10.1007/978-94-017-3034-1.
12. Gakhov F. D., Cherskii Yu. I. *Uravneniia tipa svertki* [Equations of convolution type]. Moscow, Nauka, 1978, 295 pp. (In Russian)

Received 25/III/2014;
received in revised form 18/IV/2014;
accepted 27/VIII/2014.