Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2014. № 4 (37). С. 22–32

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1348

УДК 517.956.326

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕНИЕМ ТИПА И ПОРЯДКА*

О. А. Репин[1,2]***, С. К. Кумыкова***[3]

[1] Самарский государственный экономический университет,
Россия, 443090, Самара, ул. Советской Армии, 141.
[2] Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
[3] Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова
Россия, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173.

Аннотация

В характеристической области исследованы нелокальные задачи для модельного гиперболического уравнения второго порядка, тип и порядок которого вырождается на одной и той же линии $y = 0$. С помощью операторов дробного интегро-дифференцирования произвольного порядка на характеристической части границы области задано нелокальное условие, поточечно связывающее дробные производные и интегралы от искомого решения. Для различных значений порядков операторов дробного интегро-дифференцирования, входящих в краевое условие, доказана однозначная разрешимость рассматриваемых задач или установлена неединственность их решения.

Ключевые слова: нелокальная задача, операторы дробного интегро-дифференцирования, задача Коши, интегральное уравнение Вольтерра второго рода, интегральное уравнение Абеля.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1348

Введение. Рассмотрим уравнение

$$y^{2m}u_{xx} + y\,u_{yy} + \alpha u_y = 0,$$

где m — натуральное число, $\alpha = \text{const}$, $(1-2m)/2 \leqslant \alpha < 1$ в области Ω, ограниченной характеристиками

$$AC:\ x - \frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}} = 0, \quad BC:\ x + \frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}} = 1$$

Образец для цитирования

Репин О. А., Кумыкова С. К. Об одном классе нелокальных задач для гиперболического уравнения с вырождением типа и порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 4 (37). С. 22–32. doi: 10.14498/vsgtu1348.

Сведения об авторах

Олег Александрович Репин (д.ф.-м.н., проф.; matstat@mail.ru; автор, ведущий переписку), заведующий кафедрой, каф. математической статистики и эконометрики[1]; профессор, каф. прикладной математики и информатики[2].

Светлана Каншубиевна Кумыкова (к.ф.-м.н., доц.; bsk@rect.kbsu.ru), доцент, каф. теории функций и функционального анализа.

*Настоящая статья представляет собой расширенный вариант доклада [1], сделанного авторами на Четвёртой международной конференции «Математическая физика и её приложения» (Россия, Самара, 25 августа – 1 сентября 2014).

уравнения (1) и отрезком $I \equiv [0,1]$ прямой $y=0$, $A(0,0)$, $B(1,0)$.

Задача. *Найти регулярное в области Ω решение $u(x,y)$ уравнения (1) из класса $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup I)$, удовлетворяющее условиям*

$$u(x,0) = \tau(x) \quad \forall x \in \overline{I}, \tag{2}$$

$$A(x) D_{0x}^{a} u[\Theta_0(x)] + B(x) D_{x1}^{b} u[\Theta_1(x)] = C(x) \quad \forall x \in I. \tag{3}$$

Здесь $\tau(x)$, $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ — заданные функции, причём $A^2(x)+B^2(x) \neq 0$; $\Theta_0(x)$, $\Theta_1(x)$ — точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x,0) \in I$, с характеристиками AC, BC соответственно; $D_{0x}^{\alpha_1} f$, $D_{x1}^{\alpha_1} f$ — операторы дробного интегрирования порядка $(-\alpha_1)$ при $\alpha_1 < 0$ и обобщённые производные в смысле Лиувилля порядка $\alpha_1 > 0$ [2, с. 7, 8]; *a и b действительные числа, на которые далее будут наложены необходимые условия.*

Уравнение (1) служит моделью гиперболических уравнений второго порядка, тип и порядок которых вырождается на одном и том же $(n-1)$-мерном континууме [3, с. 274].

Задача (1)–(3) является нелокальной (задачей со смещением по терминологии А. М. Нахушева [4]). Её исследование связано с прикладным характером задач, возникающих, например, при изучении вопросов тепло- и массообмена в капиллярно-пористых средах.

В монографии [5] широко представлено значение теории дробного интегро-дифференцирования при исследовании нелокальных краевых задач и её проникновение в современную физику.

О возникновении таких задач, их использовании в физике, биологии, математическом моделировании можно узнать, например, в работах [6–8].

Ранее в работе [9] нами была исследована задача с обобщёнными операторами дробного интегро-дифференцирования (в смысле М. Сайго) для вырождающегося гиперболического уравнения. Данная работа является продолжением и обобщением результатов работы [9] для уравнения (1).

В случае

$$\alpha = 1/2 - m, \quad a = b = 1 - \beta, \quad \beta = \frac{2m - 1 + 2\alpha}{2(2m+1)}$$

существование и единственность решения задачи (1)–(3) доказаны А. В. Бицадзе [10].

1. Условия однозначной разрешимости задачи.

Теорема 1. *Пусть $b = 1-\beta$, $a \leqslant 1-\beta$, $B(x) \neq 0$, $\tau(x) \in C^1(\overline{I}) \cap C^3(I)$, $A(x)$, $B(x)$, $C(x) \in C^1(\overline{I})$.*

Тогда решение задачи (1)–(3) существует и единственно.

Доказательство. При $(1-2m)/2 < \alpha < 1$ регулярное в области Ω решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = \tau(x),\ x \in \overline{I}, \qquad \lim_{y \to -0} (-y)^{\alpha} u_y = \nu(x),\ x \in I,$$

в предположении, что $\tau''(x)$ и $\nu'(x)$ удовлетворяют условию Гёльдера, единственно и имеет вид [3, с. 277]

$$u(x,y)=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}\int_0^1\tau\Big[x+\frac{2(1-2t)}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\Big][t(1-t)]^{\beta-1}dt-$$
$$-\frac{2}{2m+1}\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}(-y)^{1-\alpha}\int_0^1\nu\Big[x+\frac{2(1-2t)}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\Big][t(1-t)]^{-\beta}dt. \quad (5)$$

Используя формулу (5), находим

$$\begin{aligned} u[\Theta_0(x)]&=k_1x^{1-2\beta}D_{0x}^{-\beta}x^{\beta-1}\tau(x)+k_2D_{0x}^{\beta-1}x^{-\beta}\nu(x),\\ u[\Theta_1(x)]&=k_1(1-x)^{1-2\beta}D_{x1}^{-\beta}(1-x)^{\beta-1}\tau(x)+k_2D_{x1}^{\beta-1}(1-x)^{-\beta}\nu(x), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$k_1=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)},\quad k_2=-\frac{\Gamma(1-2\beta)}{2\Gamma(1-\beta)}\Big(\frac{2m+1}{4}\Big)^{-2\beta}.$$

Подставляя (6) в краевое условие (3), учитывая свойства операторов дробного интегро-дифференцирования [11, с. 50, 51]

$$D_{0x}^{l}D_{0x}^{-l}f(x)=D_{x1}^{l}D_{x1}^{-l}f(x)=f(x),$$
$$D_{0x}^{l}D_{0x}^{m}f(x)=D_{0x}^{l+m}f(x),$$
$$D_{x1}^{l}D_{x1}^{m}f(x)=D_{x1}^{l+m}f(x),\quad l>0,\ m<0$$

при выполнении условий теоремы 1, получим

$$k_2B(x)(1-x)^{-\beta}\nu(x)+k_2A(x)D_{0x}^{a+\beta-1}x^{-\beta}\nu(x)=\gamma(x), \quad (7)$$

где

$$\gamma(x)=C(x)-k_1A(x)D_{0x}^{a}x^{1-2\beta}D_{0x}^{-\beta}x^{\beta-1}\tau(x)-$$
$$-k_1B(x)D_{x1}^{1-\beta}(1-x)^{1-2\beta}D_{x1}^{-\beta}(1-x)^{\beta-1}\tau(x).$$

Или, что то же самое, при $a<1-\beta$

$$\nu(x)+a_1(x)\int_0^x\frac{t^{-\beta}\nu(t)dt}{(x-t)^{a+\beta}}=f_1(x),$$

где

$$a_1(x)=\frac{A(x)}{B(x)}(1-x)^{\beta},\quad f_1(x)=\frac{\gamma(x)}{k_2B(x)}(1-x)^{\beta}.$$

Исследуем правую часть $f_1(x)$ уравнения (8).

Воспользуемся формулой композиции для операторов дробного интегро-дифференцирования, доказанной в [12],

$$I_1(x)=D_{x1}^{1-\beta}(1-x)^{1-2\beta}D_{x1}^{-\beta}(1-x)^{\beta-1}\tau(x)=(1-x)^{-\beta}D_{x1}^{1-2\beta}\tau(x). \quad (10)$$

Рассмотрим два случая изменения параметра a:

1) $a\leqslant 0$,
2) $0<a\leqslant 1-\beta$.

Исследуем

$$I_2(x) = D_{0x}^{a} x^{1-2\beta} D_{0x}^{-\beta} x^{\beta-1}\tau(x). \tag{11}$$

В результате ряда преобразований (11) примет вид

$$I_2(x) = \frac{\Gamma(\beta-a)x^{-a}}{\Gamma^2(\beta)\Gamma^2(-a)}\int_0^1 \frac{(1-z)^{\beta-1-a}\tau(xz)}{z^{1-\beta}}F(2\beta-1,-a;\beta-a;1-z)dz. \tag{12}$$

При $a<0$ в силу (9), (10), (11), (12) и условий теоремы 1 $(1-x)^\beta I_1(x)\in C[0{,}1)$, а при $x=1$ может обращаться в бесконечность порядка $1-2\beta$; $(1-x)^\beta I_2(x)\in C(\overline{I})$, а при $x=0$ и $x=1$ обращается в ноль.

При $a=0$

$$(1-x)^\beta I_2(x) = \frac{(1-x)^\beta}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 \frac{\tau(xz)dz}{[z(1-z)]^{1-\beta}}.$$

Следовательно, $(1-x)^\beta I_2(x)\in C(\overline{I})$.

Рассмотрим случай, когда $0<a\leqslant 1-\beta$. Так как параметр a в $I_1(x)$ отсутствует, исследуем только $I_2^*(x)=(1-x)^\beta I_2(x)$:

$$I_2^*(x) = \frac{(1-x)^\beta}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-a)}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{t^{1-\beta}dt}{(x-t)^a}\int_0^t \frac{\xi^{\beta-1}\tau(\xi)d\xi}{(t-\xi)^{1-\beta}}.$$

Поменяв порядок интегрирования, а затем продифференцировав, будем иметь

$$I_2^*(x) = \frac{(1-x)^\beta}{\Gamma(1-a+\beta)}\int_0^1 \frac{(1-a)x^{-a}\tau(xz)+x^{1-a}z\tau'(xz)}{z^{1-\beta}(1-z)^{a-\beta}}\times$$
$$\times F(2\beta-1,1-a;1-a+\beta;1-z)dz.$$

Поскольку $a\leqslant 1-\beta$, справедливы неравенства $a-\beta\leqslant 1-2\beta$, $0<1-2\beta<1$. Следовательно, $I_2^*(x)\in C(0,1]$ и при $x=0$ может обращаться в бесконечность порядка a.

Таким образом, при выполнении условий теоремы 1 вопрос существования решения задачи (1)–(3) редуцирован к вопросу разрешимости интегрального уравнения Вольтерра второго рода со слабой особенностью в ядре

$$\nu(x) + \int_0^x \frac{a_1(x)\nu(t)dt}{t^\beta(x-t)^{a+\beta}} = f_1(x),$$

где $f_1(x)\in C^1(I)$ и при $x=0$ может обращаться в бесконечность порядка a, если $0<a<1-\beta$, а при $x=1$ может обращаться в бесконечность порядка $1-2\beta$. Единственное решение уравнения (13) может быть построено методом последовательных приближений. $\square$

Замечание. Если $a=1-\beta$, то из (7) сразу находим

$$\nu(x) = \frac{\gamma(x)}{k_2[(1-x)^{-\beta}B(x)+x^{-\beta}A(x)]}$$

и решение $u(x,y)$ записываем по формуле (5).

2. Случаи неединственности решения задачи.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* $b = 1-\beta$, $1-\beta < a \leqslant 2-\beta$; $\nu(x) = x^{a+2\beta-2}\nu_1(x)$, $\nu_1(0) \neq 0$, $\nu_1(x) \in C^1(\overline{I})$; $\tau(x) = x^{\sigma}\tau_1(x)$, $\sigma \geqslant a$, $\tau_1(x) \in C^2(\overline{I}) \cap C^4(I)$; $B(x) = (1-x)^{\beta} b_2(x)$; $A(x)$, $b_2(x) \in C(\overline{I}) \cap C^1(I)$; $A(x)\cdot b_2(x) \neq 0$ $\forall x \in \overline{I}$.

Тогда задача (1)–(3) *имеет более одного решения.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $b = 1-\beta$, $a = 2-\beta$. Из (7) при $A(x) \neq 0$ имеем

$$\nu'(x) + \Big[\frac{B(x)}{A(x)}\Big(\frac{x}{1-x}\Big)^{\beta} - \frac{\beta}{x}\Big]\nu(x) = \frac{x^{\beta}\gamma(x)}{k_2 A(x)}.$$

Уравнение (14) является линейным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка и решение его, содержащее произвольную постоянную, можно выписать согласно общей теории. В силу этого решение задачи (1)–(3) не единственно.

Теперь рассмотрим случай, когда $b = 1-\beta$, $1-\beta < a < 2-\beta$, $A(x) \neq 0$. С учетом условий теоремы 2 уравнение (7) принимает вид

$$b_2(x)\nu(x) + a_2(x)\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{t^{-\beta}\nu(t)dt}{(x-t)^{a+\beta-1}} = \frac{1}{k_2}\gamma(x),$$

где

$$a_2(x) = \frac{A(x)}{\Gamma(2-a-\beta)}.$$

Исследуем гладкость $\gamma(x)$ — правой части уравнения (15).

Нетрудно показать, что

$$I_1(x) = (1-x)^{-\beta} D_{x1}^{1-2\beta}\tau(x) = \\ = (1-x)^{-\beta}\left[\frac{\tau(1)}{\Gamma(2\beta)(1-x)^{1-2\beta}} - \frac{1}{\Gamma(2\beta)}\int_x^1 \frac{\tau'(t)dt}{(t-x)^{1-2\beta}}\right];$$

$$\widetilde{I}_2(x) = D_{0x}^{a} x^{1-2\beta} D_{0x}^{-\beta} x^{\beta-1}\tau(x) = \frac{d^2}{dx^2} D_{0x}^{a-2} x^{1-2\beta} D_{0x}^{-\beta} x^{\beta-1}\tau(x) =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(2-a+\beta)}\,\frac{d^2}{dx^2} x^{2-a}\int_0^1 \frac{\tau(xz)}{z^{1-\beta}(1-z)^{a-\beta+1}} F(2\beta-1, 2-a; 2-a+\beta; 1-z)dz.$$

Дифференцируя дважды $\widetilde{I}_2(x)$, в результате несложных преобразований с учетом условий теоремы 2 можно заключить, что $I_1(x) \in C[0{,}1) \cap C^1(I)$ и при $x = 1$ может обращаться в бесконечность порядка $1-\beta$, $\widetilde{I}_2(x) \in C(\overline{I}) \cap C^{(1,\mu)}(I)$, $0 < \mu \leqslant 1$.

Итак, правая часть уравнения (15) $\gamma(x) \in C[0{,}1) \cap C^1(I)$ и при $x = 1$ может обращаться в бесконечность порядка $1-\beta$.

Для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что однородное уравнение, соответствующее (15),

$$b_2(x)\nu(x) + a_2(x)\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{t^{-\beta}\nu(t)dt}{(x-t)^{a+\beta-1}} = 0$$

имеет нетривиальное решение.

Аналогично [9] введем новую неизвестную функцию

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{t^{-\beta}\nu(t)dt}{(x-t)^{a+\beta-1}}$$

и применим формулу обращения

$$f(x) = \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{F(t)dt}{(x-t)^{1-\mu}}$$

интегрального уравнения Абеля [11, с. 38, 39]

$$\int_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\mu}} = F(x), \quad 0 < \mu < 1$$

к уравнению (17).

В результате получим

$$\nu(x) = \frac{x^{\beta}\sin(\pi[a+\beta-1])}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{2-a-\beta}}.$$

Подставляя $\nu(x)$ в (16), после преобразований будем иметь

$$a_2(x)\frac{d}{dx}\varphi(x) + \frac{x^{\beta-1}b_2(x)\sin(\pi[a+\beta-1])}{\pi}\times$$
$$\times\left[(a+\beta-1)\int_0^x \frac{\varphi(z)dz}{(x-z)^{2-a-\beta}} + \int_0^x \frac{z\varphi'(z)dz}{(x-z)^{2-a-\beta}}\right] = 0. \quad (19)$$

Из (17) с учетом условий теоремы 2 следует

$$\varphi(x) = \int_0^1 z^{a+\beta-2}(1-z)^{1-\beta-a}\nu_1(xz)dz$$

и

$$\varphi(0) = B(a+\beta-1, 2-\beta-a)\nu_1(0) = c_0 = \mathrm{const} \neq 0.$$

Обозначив

$$\psi(x) = \frac{d}{dx}\varphi(x), \quad (20)$$

будем иметь

$$\varphi(x) = c_0 + \int_0^x \psi(t)dt. \quad (21)$$

Подставляя (20) и (21) в (19), после некоторых преобразований получим

$$\psi(x)+a^*(x)\int_0^x \frac{\psi(t)dt}{(x-t)^{2-a-\beta}}=x^{a+2\beta-2}h(x), \tag{22}$$

где

$$a^*(x)=\frac{\sin(\pi[a+\beta-1])x^{\beta}b_2(x)}{\pi a_2(x)},\quad h(x)=-\frac{c_0\sin(\pi[a+\beta-1])x^{a+2\beta-2}b_2(x)}{\pi a_2(x)}.$$

Уравнение (22) — уравнение Вольтерра второго рода. Методом последовательных приближений можно показать, что оно имеет решение в классе функций $\psi(x)=x^{a+2\beta-2}\psi_1(x)$, где $\psi_1(x)\in C(\overline{I})\cap C^2(I)$. Следовательно, существует нетривиальное решение уравнения (22) и делается заключении о неединственности решения задачи (1)–(3).

Докажем существование решения задачи.

Уравнение (15), с учетом замен (17) и (20), примет вид

$$\psi(x)+\int_0^x \frac{k(x,a)\psi(t)dt}{(x-t)^{2-a-\beta}}=f_2(x), \tag{23}$$

где

$$k(x,a)=a^*(x),\quad f_2(x)=h(x)x^{a+2\beta-2}+\frac{\gamma(x)}{k_2a_2(x)}.$$

Учитывая условия теоремы 2 и проведенные вычисления, заметим, что $f_2(x)$ представимо в виде

$$f_2(x)=x^{a+2\beta-2}(1-x)^{\beta-1}\overline{f_2}(x),$$

где $\overline{f_2}(x)\in C(\overline{I})$.

Уравнение (23) — уравнение Вольтерра второго рода. Оно имеет нетривиальное решение в классе функций, к которому принадлежит правая часть $f_2(x)$.

По найденному $\psi(x)$ определяется $\varphi(x)$ из (21) и $\nu(x)$ из (18), а следовательно, и решение задачи (1))–(3) по формуле (5). $\square$

Далее *регулярным решением* уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u(x,y)\in C(\overline{I})\cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) и такую, что $u_y(x,0)=x^{a+2\beta-2}\nu_1(x)$, а $\nu_1(x)$ — достаточное число раз дифференцируемая функция в некоторой окрестности $(0,\delta)$ точки $x=0$ и $\nu_1(0)\neq 0$.

Теорема 3. *Пусть* $b=1-\beta$, $1-\beta+k<a<2-\beta+k$, $k=1,2,\ldots$; $\tau(x)=x^{\sigma}\tau_1(x)$, $\sigma\geqslant a$, $\tau_1(x)\in C^{k+1}(\overline{I})$; $B(x)=x(1-x)^{1-\beta}b_3(x)$, $A(x)$, $b_3(x)\in C(\overline{I})$, $A(x)b_3(x)\neq 0$ $\forall x\in\overline{I}$.

Тогда задача (1)–(3) *имеет бесчисленное множество линейно независимых регулярных решений.*

Доказательство. Покажем, что теорема 3 справедлива при $k=1$.

В этом случае уравнение (7) примет вид

$$x(1-x)^{1-2\beta}b_3(x)+a_3(x)\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x \frac{t^{-\beta}\nu(t)dt}{(x-t)^{a+\beta-2}}=\gamma(x),$$

где
$$a_3(x) = \Gamma(3-a-\beta)A(x).$$

Для доказательства теоремы 3 достаточно показать, что соответствующее (24) однородное уравнение имеет нетривиальное решение.

Как и ранее, обозначая
$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{t^{-\beta}\nu(t)dt}{(x-t)^{a+\beta-2}}$$
и применяя формулу обращения интегрального уравнения Абеля, получим
$$a_3(x)\frac{d^2}{dx^2}\,\varphi(x) + x^{\beta}(1-x)^{1-2\beta}\frac{\sin(\pi[a+\beta-2])}{\pi}b_3(x)\times$$
$$\times\left[(a+\beta-2)\int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{3-a-\beta}} + \int_0^x \frac{t\varphi'(t)dt}{(x-t)^{3-a-\beta}}\right] = 0. \quad (26)$$

Из (25) легко видеть, что
$$\varphi(0)=0, \quad \varphi'(0) = B(a+\beta-1, 3-a-\beta)\nu_1(0) = c_1 \neq 0.$$

Пологая
$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) = \psi(x)$$
и интегрируя дважды, будем иметь
$$\varphi(x) = \int_0^x (x-\xi)\psi(\xi)d\xi + c_1 x, \quad c_1 = \mathrm{const}. \quad (27)$$

Пусть $a_3(x) \neq 0$. Учитывая (27), уравнению (26) можно придать вид
$$\psi(x) + \int_0^x \psi(\xi)K_1(x,\xi)d\xi = \gamma_1(x),$$
где
$$K_1(x,\xi) = \frac{\sin(\pi[a+\beta-2])}{\pi(a+\beta-2)}\,\frac{b_3(x)}{a_3(x)}x^{1+\beta}(1-x)^{1-2\beta},$$
$$\gamma_1(x) = -\frac{\sin(\pi[a+\beta-2])}{\pi}\,\frac{b_3(x)}{a_3(x)}x^{a+2\beta-1}(1-x)^{1-2\beta}.$$

Так как $2-\beta-a<0$, уравнение (28) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода с ядром $K_1(x,\xi) \in C(\overline{I}\times\overline{I})$ и непрерывной правой частью $\gamma_1(x)$.

Известно [13], что уравнение (28) имеет на $\overline{I}$ единственное непрерывное решение, которое определяется по формуле
$$\psi(x) = \gamma_1(x) + \int_0^x R(x,t)\gamma_1(t)dt,$$
где $R(x,t)$ — резольвента ядра $K_1(x,t)$.

Следовательно, при $k = 1$ решение задачи (1)–(3) не единственно.

Для доказательства существования решения задачи вернемся к уравнению (24) и, проделывая те же вычисления, получим уравнение Вольтерра второго рода

$$\psi(x) + \int_0^x \psi(\xi) K_1(x,\xi) d\xi = \gamma_1(x) + \frac{\gamma(x)}{a_3(x)}$$

с непрерывным ядром и непрерывной правой частью, которое имеет единственное непрерывное решение в классе непрерывных функций.

Применяя метод математической индукции, аналогично [9], можно доказать теорему 3, если $k - 1 < a + \beta - 1 < k$.

Принадлежность $\nu(x)$ классу $C^1(I)$ обеспечивается гладкостью известных функций. □

Нетрудно доказать справедливость следующего утверждения.

Теорема 4. *Если* $a = n+1-\beta$, $b = 1-\beta$, $n = 1, 2, \ldots$; $B(x) = (1-x)^{1-\beta} b(x)$, $A(x)$, $b(x)$, $\gamma(x) \in C(\overline{I})$, $A(x) \neq 0$ $\forall x \in \overline{I}$; $\tau(x) = x^\sigma \tau_1(x)$, $\sigma \geqslant n + 1 - \beta$, $\tau_1(x) \in C^{n+1}(\overline{I})$, *где* n — *целая часть* a, *то при* $\nu_1(0) \neq 0$ *задача* (1)–(3) *имеет более одного регулярного решения.*

Таким образом, установлены промежутки изменения порядков операторов дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана—Лиувилля, входящих в краевое условие и связанных с параметрами рассматриваемого уравнения, при которых исследуемые задачи либо однозначно разрешимы, либо доказана неединственность их решений.

ORCID
Олег Александрович Репин: http://orcid.org/0000-0003-1522-3955

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Репин О. А., Кумыкова С. К. Об одном классе нелокальных задач для гиперболического уравнения с вырождением типа и порядка / *Четвертая международная конференция «Математическая физика и ее приложения»*: материалы конф.; ред. чл.-корр. РАН И. В. Волович; д.ф.-м.н., проф. В. П. Радченко. Самара: СамГТУ, 2014. С. 299.
2. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение.* М.: Физматлит, 2003. 272 с.
3. Бицадзе А. В. *Некоторые классы уравнений в частных производных.* М.: Наука, 1981. 448 с.
4. Нахушев А. М. О некоторых новых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // *Диффер. уравн.*, 1969. Т. 5, № 1. С. 44–59.
5. Учайкин В. В. *Метод дробных производных.* Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
6. Mainardi F. Fractional Calculus / *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics* / International Centre for Mechanical Sciences, 378; eds. A. Carpinteri, F. Mainardi. Wien: Springer, 1997. pp. 291–348. doi: 10.1007/978-3-7091-2664-6_7.
7. Nigmatulin R. R. The realization of generalized transfer equation in a medium with fractal geometry // *Physica Status Solidi (B)*, 1986. vol. 133, no. 1. pp. 425–430. doi: 10.1002/pssb.2221330150.
8. Saichev A. I., Zaslavsky G. M. Fractional kinetic equations: solutions and applications // *Chaos*, 1997. vol. 7, no. 4. pp. 753–764. doi: 10.1063/1.166272.
9. Репин О. А., Кумыкова С. К. Задача с обобщенными операторами дробного интегро-дифференцирования произвольного порядка // *Изв. вузов. Матем.*, 2012. № 12. С. 59–71.

10. Бицадзе А. В. К теории уравнений смешанного типа, порядок которых вырождается вдоль линии изменения типа / *Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа*: сб. тр., посвящ. 80-летию Н. И. Мусхелишвили. М.: Наука, 1972. С. 48–52.
11. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
12. Кумыкова С. К. Об одной задаче с нелокальными краевыми условиями на характеристиках для уравнения смешанного типа // *Диффер. уравн.*, 1974. Т. 10, № 1. С. 78–88.
13. Трикоми Ф. *Интегральные уравнения*. М.: Иностр. литер., 1960. 299 с.

Поступила в редакцию 23/X/2014;
в окончательном варианте — 05/XI/2014;
принята в печать — 27/XI/2014.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.] 2014. Issue 4 (37). Pp. 22–32

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1348

MSC: 35M12

ON A CLASS OF NONLOCAL PROBLEMS FOR HYPERBOLIC EQUATIONS WITH DEGENERATION OF TYPE AND ORDER*

O. A. Repin[1,2]***, S. K. Kumykova***[3]

[1] Samara State Economic University,
141, Sovetskoy Armii st., Samara, 443090, Russian Federation.
[2] Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.
[3] Kabardino-Balkarian State University,
173, Chernyshevskogo st., Nalchik, 360004, Russian Federation.

Abstract

Nonlocal problems for the second order hyperbolic model equation were studied in the characteristic area. The type and order of equations degenerate on the same line $y = 0$. Nonlocal condition is given by means of fractional integro-differentiation of arbitrary order on the boundary. Nonlocal condition connects fractional derivatives and integrals of the desired solution. For different values of order operators of fractional integro-differentiation within the boundary condition the unique solvability of the considered problems was proved or non-uniqueness of the solution was estimated.

How to cite Reference
Repin O. A., Kumykova S. K. On a class of nonlocal problems for hyperbolic equations with degeneration of type and order, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 4 (37), pp. 22–32. doi: 10.14498/vsgtu1348. (In Russian)

Authors Details
Oleg A. Repin (Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; matstat@mail.ru; Corresponding Author), Head of Department, Dept. of Mathematical Statistics and Econometrics[1]; Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science[2]. *Svetlana K. Kumykova* (Cand. Phys. & Math. Sci.; bsk@rect.kbsu.ru), Associate Professor, Dept. of Function Theory.

*This paper is an extended version of the paper [1], presented at the Mathematical Physics and Its Applications 2014 Conference.

Keywords: nonlocal boundary value problem, fractional integro-differentiation operators, Cauchy problem, second kind Volterra integral equation, Abel integral equation.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1348

ORCID
Oleg A. Repin: http://orcid.org/0000-0003-1522-3955

REFERENCES

1. Repin O. A., Kumykova S. K. On a class of nonlocal problems for hyperbolic equations with degeneration of type and order, *The 4nd International Conference "Mathematical Physics and its Applications"*, Book of Abstracts and Conference Materials; eds. I. V. Volovich; V. P. Radchenko. Samara, Samara State Technical Univ., 2014, pp. 299 (In Russian).
2. Nakhushev A. M. *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional calculus and its applications]. Moscow, Fizmatlit, 2003, 272 pp. (In Russian)
3. Bitsadze A. V. *Some classes of partial differential equations*, Advanced Studies in Contemporary Mathematics, vol. 4. New York, Gordon & Breach Science Publ., 1988, xi+504 pp.
4. Nakhushev A. M. Certain boundary-value problems for hyperbolic equations and for equations of mixed type, *Differ. Equ.*, 1969, vol. 5, no. 1, pp. 37–57.
5. Uchaikin V. V. *Metod drobnykh proizvodnykh* [Method of Fractional Derivatives]. Ul'ianovsk, Artishok, 2008, 512 pp. (In Russian)
6. Mainardi F. Fractional Calculus, *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, International Centre for Mechanical Sciences, 378; eds. A. Carpinteri, F. Mainardi. Wien, Springer, 1997, pp. 291–348. doi: 10.1007/978-3-7091-2664-6_7.
7. Nigmatulin R. R. The realization of generalized transfer equation in a medium with fractal geometry, *Physica Status Solidi (B)*, 1986, vol. 133, no. 1, pp. 425–430. doi: 10.1002/pssb.2221330150.
8. Saichev A. I., Zaslavsky G. M. Fractional kinetic equations: solutions and applications, *Chaos*, 1997, vol. 7, no. 4, pp. 753–764. doi: 10.1063/1.166272.
9. Repin O. A., Kumykova S. K. A problem with generalized fractional integro-differentiation operators of arbitrary order, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2012, vol. 56, no. 12, pp. 50–60. doi: 10.3103/S1066369X12120067.
10. Bitsadze A. V. Theory of equations of mixed type, whose order degenerates along the line of change of type, *Mekhanika sploshnoi sredy i rodstvennye problemy analiza* [Continuous Medium Mechanics and Related Problems of Analysis]. Moscow, Nauka, 1972, pp. 47–52 (In Russian).
11. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poriadka i nekotorye ikh prilozheniia* [Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications]. Minsk, Nauka i tekhnika, 1987, 688 pp. (In Russian)
12. Kumykova S. K. A Problem with Nonlocal Boundary Conditions on the Characteristics for an Equation of Mixed Type, *Differ. Uravn.*, 1974, vol. 10, no. 1, pp. 78–88 (In Russian).
13. Tricomi F. G. *Integral equations*, Pure and Applied Mathematics, vol. 5. New York, Interscience Publ., Inc, 1957, viii+238 pp.

Received 23/X/2014;
received in revised form 05/XI/2014;
accepted 27/XI/2014.