УДК 539.311

ПРОДОЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕБРИСТОЙ ОБОЛОЧКИ В РАЗНОМОДУЛЬНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

А. Ю. Кораблев, ***Е. И. Михайловский***,
Е. В. Тулубенская, ***Н. А. Беляева***

Сыктывкарский государственный университет,
Россия, 167000, Сыктывкар, Октябрьский проспект, 55.

Рассматривается задача об устойчивости продольно сжимаемой шарнирно опёртой цилиндрической оболочки, подкреплённой стрингерами и расположенной на границе двух упругих сред различной жёсткости. Вывод уравнений производился при следующих допущениях: применяется упрощённая теория Доннела—Власова, деформация осесимметрична, стрингеры изгибаются в нормальной плоскости как гибкие стержни, на оболочку действует лишь нормальная нагрузка. Решение задачи ищется с помощью комбинированного алгоритма перебора вариантов. Суть метода заключается в последовательном применении алгоритмов полного и локального перебора вариантов. Алгоритм полного перебора вариантов предназначен для построения качественно адекватной формы, после чего для уточнения значения критической силы применяется локальный метод перебора вблизи корней приближения к искомой собственной форме. В результате проведенного численного эксперимента выяснено, что при увеличении количества стрингеров прочность оболочки повышается. Полученные результаты согласуются с результатами, полученными к настоящему времени в других работах.

Ключевые слова: *устойчивость, шарнирно-опёртая цилиндрическая оболочка, комбинированный алгоритм перебора вариантов.*

Введение. В работе [1] описана так называемая деформационная теория ребристых оболочек, главная особенность которой заключается в том, что в ней впервые наряду с реактивной силой учтён реактивный момент от ребра жёсткости. Названная теория подробно изложена в монографии [2]. В частности, уравнения статики конструктивно ортотропной цилиндрической оболочки, получаемые путём «размазывания» регулярной системы стрингеров,

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1278

Образец цитирования: А. Ю. Кораблев, Е. И. Михайловский, Е. В. Тулубенская, Н. А. Беляева, “Продольная устойчивость ребристой оболочки в разномодульной упругой среде” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 2 (35). С. 89–95. doi: 10.14498/vsgtu1278.

Сведения об авторах: *Кораблев Анатолий Юрьевич*, аспирант, каф. математического моделирования и кибернетики. *Евгений Ильич Михайловский* (12.07.1937–11.07.2013) (д.ф.-м.н., проф.). *Елена Владимировна Тулубенская* (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. математического моделирования и кибернетики. *Надежда Александровна Беляева* (д.ф.-м.н., проф.), профессор, каф. математического моделирования и кибернетики.

E-mail addresses: astroori@mail.ru (A.Yu. Korablev, *Corresponding author*), vetamile@rambler.ru (E.V. Tulubenskaya), belyayevana@mail.ru (N.A. Belyaeva)

имеют вид

$$c_0\mathbf{L}u = -R^2 q + \frac{1}{l}\begin{bmatrix} -C_t\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial\xi^2} \\ \dfrac{K_\nu}{R^2}\dfrac{\partial^4 w}{\partial\xi^4} + \dfrac{K_t}{R^2}\dfrac{\partial^4 w}{\partial\xi^2\partial\varphi^2} - \dfrac{K_t}{R^2}\dfrac{\partial^3 u_2}{\partial\xi^2\partial\varphi} \\ \dfrac{K_n}{R^2}\dfrac{\partial^4 u_2}{\partial\xi^4}\end{bmatrix}. \tag{1}$$

Здесь первая строка уравнения представляет собой матричную запись уравнений статики цилиндрической оболочки в смещениях; K_ν, K_n — жёсткости стрингера при изгибе соответственно в нормальной плоскости и из этой плоскости; K_t — жёсткость при кручении; C_t — жёсткость стрингера при растяжении (сжатии); q_1, q_2, q_n — нагрузка; l — расстояние между соседними стрингерами по дуге поперечного сечения; $\xi = x/R$; $\varphi = y/R$; R — радиус оболочки.

Будем рассматривать оболочку, расположенную на границе двух винклеровских сред различной жёсткости. Примем следующие допущения:

i) для расчёта оболочек без рёбер допустимо использовать упрощённую теорию Доннела—Власова [3, табл. 13.2, форм. (13.18c)];

ii) конструктивно ортотропная оболочка испытывает осесимметричную деформацию, т. е. $\partial f/\partial\varphi = 0$ для любой функции f;

iii) стрингеры изгибаются в нормальной плоскости как гибкие стержни, т. е.

$$C_t\frac{\partial^2 u_1}{\partial\xi^2} = \frac{K_n}{R^2}\frac{\partial^4 u_2}{\partial\xi^4} = 0;$$

iv) на оболочку действует лишь нормальная нагрузка, т. е. $q_1 = q_2 = 0$.

Тогда уравнению (1) можно придать вид

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ w\end{bmatrix} = \frac{R^2}{c_0}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_n\end{bmatrix}, \quad c_0 = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \tag{2}$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \dfrac{d^2()}{d\xi^2} & 0 & -\nu\dfrac{d()}{d\xi} \\ 0 & \dfrac{1-\nu}{2}\dfrac{d^2()}{d\xi^2} & 0 \\ -\nu\dfrac{d()}{d\xi} & 0 & a_{33}\end{bmatrix}, \quad a_{33} = \left(\frac{1}{12}\frac{h^2}{R^2} + \frac{(1-\nu^2)J}{lhR^2}\right)\frac{d^4()}{d\xi^4} + I,$$

I — тождественный оператор, J — момент инерции поперечного сечения стержня, h — толщина неподкреплённой оболочки, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона материала ребристой оболочки.

Для получения из системы (2) соответствующего уравнения относительно функции прогиба воспользуемся операторным методом [4].

«Детерминант» матрицы $\mathbf{A}$ имеет вид

$$\det\mathbf{A} = \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{h^2}{12R^2} + \frac{(1-\nu^2)J}{lhR^2}\right)\frac{d^8()}{d\xi^8} + \frac{1-\nu}{2}(1-\nu^2)\frac{d^4()}{d\xi^4}.$$

Заменяя в матрице $\mathbf{A}$ последний столбец правой частью уравнения (2) и вычисляя «детерминант» так составленной матрицы, получим

$$\det \mathbf{A}_w = \frac{1-\nu}{2}\frac{R^2}{c_0}\frac{d^4 q_n}{d\xi^4}.$$

Применяя формально правило Крамера, можно записать $w = \det \mathbf{A}_w / \det \mathbf{A}$ или $(\det \mathbf{A})w = \det \mathbf{A}_w$. Последнее равенство после элементарных преобразований представляет искомое уравнение в виде

$$\Big(1 + \frac{EJ}{ld_0}\Big)\frac{d^4 w}{d\xi^4} + 4b^4 w = \frac{R^4}{d_0} q_n, \tag{3}$$

где

$$4b^4 = 12(1-\nu^2)\frac{R^2}{h^2}, \quad d_0 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Представим нормальную нагрузку в виде суммы

$$q_n = q_n' + q_n''. \tag{4}$$

В условиях наличия внутри и вне оболочки винклеровых сред различной жёсткости c_1, c_2 соответственно, следуя [5], можно записать $q_n' = -c_1 w_+ - c_2 w_-$. Кроме этого, при рассмотрении продольной устойчивости цилиндрической оболочки от действия сжимающих усилий T_0 следует положить [3]

$$q_n'' = -\frac{T_0}{R^2}\frac{d^2 w}{d\xi^2}.$$

Выполним замену

$$\tilde{\xi} = \frac{\pi R}{L}\xi = \frac{\pi R}{L}\frac{x}{R} = \frac{\pi x}{L} \in [0, \pi],$$

где L — длина оболочки, и подставим соотношения (4) в уравнение (3), сохранив за новой переменной $\tilde{\xi}$ прежнее обозначение ξ, окончательно получим

$$(1+\alpha)\frac{d^4 w}{d\xi^4} + 4\beta^4 w + \lambda\frac{d^2 w}{d\xi^2} + k_1 w_+ + k_2 w_- = 0. \tag{5}$$

Здесь

$$\alpha = \frac{EJ}{ld_0},\ \lambda = \frac{T_0 L^2}{\pi^2 d_0},\ 4\beta^4 = \frac{12(1-\nu^2)L^4}{\pi^4 R^2 h^2},\ d_0 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},\ k_i = \frac{c_i L^4}{\pi^4 d_0}, \tag{6}$$

где T_0 — сжимающие усилия. Обратим внимание, что параметр λ зависит от сжимающих усилий T_0.

1. Постановка задачи. Рассмотрим дифференциальное уравнение (5):

$$(1+\alpha)w^{IV} + 4\beta^4 w + k_1 w_+ + k_2 w_- = -\lambda w'' \tag{7}$$

и найдём минимальное значение λ, соответствующее минимальной нагрузке, при котором краевая задача с граничными условиями шарнирного опирания

$$w(0) = w(\pi) = 0; \quad w''(0) = w''(\pi) = 0$$

имеет нетривиальное решение.

Проинтегрируем по частям функционал, образованный уравнением (7), умноженный на $w(\xi)$. Имеем

$$(1+\alpha)\int_0^\pi w''^2 d\xi + 4\beta^4 \int_0^\pi w^2 d\xi + k_1 \int_0^\pi {w_+}^2 d\xi + k_2 \int_0^\pi {w_-}^2 d\xi = \\ = \lambda \int_0^\pi w'^2 d\xi. \quad (8)$$

Заменим формулу (8) приближённой с использованием дискретного представления функции w, задаваемой её значениями на равномерной сетке, т. е. $w_i = w(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Аппроксимируем производные конечно-разностными схемами

$$w_i' = \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}; \quad w_i'' = \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2}.$$

Интегралы будем вычислять по квадратурной формуле трапеций:

$$\int_0^\pi f(\xi)d\xi = \frac{\pi}{n}\left(\frac{f(\xi_0)}{2} + f(\xi_1) + f(\xi_2) + ... + f(\xi_{n-1}) + \frac{f(\xi_n)}{2}\right).$$

Значения срезок функции в узлах сетки представляем формулами

$$w_+(\xi_i) = b_i w_i, \quad w_-(\xi_i) = (1 - b_i) w_i, \quad b_i = \begin{cases} 1, & w_i > 0, \\ 0, & w_i \leqslant 0. \end{cases}$$

Граничные условия шарнирного опирания аппроксимируем формулами

$$w_{-1} = w_{n+1} = 0, \quad w_0 = w_1/2, \quad w_n = w_{n-1}/2.$$

После преобразования уравнение (7) примет вид

$$A\tilde{w} + C\tilde{w} = \lambda Q\tilde{w}.$$

Таким образом, необходимое условие минимума функционала имеет вид

$$A\tilde{w} + C\tilde{w} - \lambda Q\tilde{w} = 0,$$

где матрицы A, Q — пятидиагональные:

$$A = \frac{1+\alpha}{h^3}\begin{bmatrix} 3.25 & -3.5 & 1 & & & & \\ -3.5 & 6 & -4 & 1 & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & . & . & . & . & . & \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & 1 & -4 & 6 & -3.5 \\ & & & & 1 & -3.5 & 3.25 \end{bmatrix};$$

$$Q = \frac{1}{4h}\begin{bmatrix} 2.75 & -0.5 & -1 & & & & \\ -0.5 & 2 & 0 & -1 & & & \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & & \\ & . & . & . & . & . & \\ & & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ & & & -1 & 0 & 2 & -0.5 \\ & & & & -1 & -0.5 & 2.75 \end{bmatrix};$$

$$C = \operatorname{diag}\left[k_1 b_i + k_2(1-b_i) + 4\beta^4\right] h.$$

2. Комбинированный алгоритм. Для решения задачи будем использовать комбинированный алгоритм, который включает в себя применение на первой стадии алгоритма полного перебора вариантов (ППВ), а на последующих — локального перебора вариантов (ЛПВ) [6].

Для построения части собственного спектра уравнения применяется алгоритм ППВ форм изгиба, который заключается в следующем:

i) перебираются все 2^{m-1} возможных представления вектора формы

$$b = [b_1, b_2, \ldots, b_{m-1}]^\top;$$

ii) для каждого варианта вектора формы решается задача на собственные значения;

iii) запоминается собственная пара (число и форма), для которой форма изгиба согласуется с выбранным вектором формы.

В процессе применения алгоритма ППВ получаем качественно адекватную форму, то есть собственную форму, имеющую устойчивый с ростом m вид графика.

После этого будем применять алгоритм ЛПВ, используя в качестве приближения полученную качественно адекватную форму:

j) последовательно удваиваем число узлов сетки путём деления интервалов пополам;

jj) осуществляем перебор вариантов лишь вблизи корней последнего приближения к искомой собственной форме;

jjj) процесс продолжается до тех пор, пока соответствующее собственное значение не стабилизируется с требуемой точностью.

Проблема нахождения собственных пар для каждого вектора формы решалась с использованием QR-алгоритма, описанного в [8].

Исходная задача

$$A\tilde{w} + C\tilde{w} - \lambda Q\tilde{w} = 0$$

приводится к виду

$$Q^{-1}(A + C)\tilde{w} = \lambda\tilde{w}.$$

Введём следующее обозначение $\tilde{A} = Q^{-1}(A + C)$. Здесь $\tilde{A}$ — симметричная положительно определённая матрица, значит, она имеет вещественные собственные числа.

В соответствии с теоремами 3.2.20 и 3.2.46 из [7] реализуется следующий итерационный процесс:

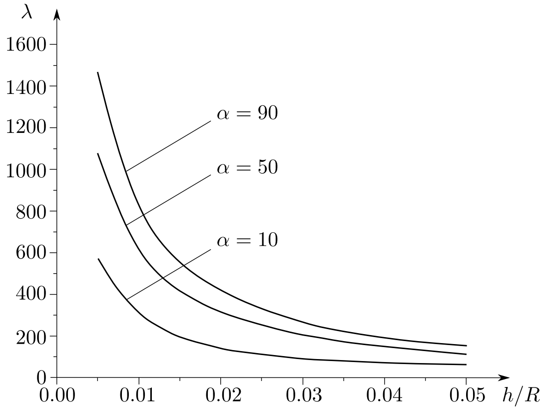
$$1)\ \tilde{A}^0 = \tilde{A}; \quad 2)\ Q^{(k)}R^{(k)} = \tilde{A}^{(k-1)}\tilde{A}^{(k)} = R^{(k)}Q^{(k)}.$$

Все полученные матрицы $Q^{(i)}$ перемножаются. В результате столбцы полученной матрицы будут представлять собой собственные векторы, а на диагонали последней матрицы $\tilde{A}^{(k)}$ будут находиться собственные числа.

Таким образом с использованием QR-алгоритма на каждом шаге комбинированного алгоритма возможно эффективное отыскание собственных пар.

3. Численное решение. Применим комбинированный «ППВ+ЛПВ»-алгоритм (ППВ при $n = 6$, ЛПВ при $n = 24$) при $k_1 = 16$ и $k_2 = 18$. Значения параметра α будем изменять в пределах от 0 до 90. Зафиксируем значение параметра $4\beta^4 = 43.68$ и согласно формуле (6) получим следующие значения.

α	0	10	30	50	70	90
λ	17.5	61.7	91.9	112.1	132.3	152.5



Из полученных значений видно, что при увеличении параметра α ($\alpha = 0$ — оболочка, не подкреплённая стрингерами) прочность оболочки повышается, т. к. увеличивается значение λ, а значит, и значение первой критической силы.

Фиксируя значения L и ν, получаем зависимость λ от h/R и α. На рисунке приведены графики зависимости λ от h/R при $\alpha = 10$, 50 и 90 ($L = 200$ см, $\nu = 0.3$).

Заключение. В результате проведённого численного эксперимента видно, что при увеличении параметра α и при уменьшении h/R значение λ увеличивается, в результате чего повышается прочность оболочки. Полученные результаты согласуются с результатами, полученными в статье [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ/ REFERENCES

1. Е. И. Михайловский, *Математические модели механики упругих тел.* Сыктывкар: Сыктывкарск. ун-т, 2007. 516 с. [E. I. Mikhailovsky, *Matematicheskiye modeli mekhaniki uprugikh tel* [Mathematical models of elastic bodies], Syktyvkar, Syktyvkar Univ. Press, 2007, 516 pp. (In Russian)]
2. В. В. Новожилов, К. Ф. Черных, Е. И. Михайловский, *Линейная теория тонких оболочек.* Л.: Политехника, 1991. 656 с. [V. V. Novozhilov, K. F. Chernykh, E. I. Mikhailovsky, *Lineynaya teoriya tonkikh obolochek* [Linear Theory of Thin Shells], Leningrad, Politekhnika, 1991, 656 pp. (In Russian)]
3. А. С. Вольмир, *Устойчивость деформируемых систем.* М.: Наука, 1969. 984 с. [A. S. Vol'mir, *Ustoychivost' deformiruyemykh sistem* [Stability of Deformable Systems], Moscow, Nauka, 1969, 984 pp. (In Russian)]
4. А. П. Филин, *Элементы теории оболочек.* Л.: Стройиздат, 1989. 384 с. [A. P. Filin, *Elementy teorii obolochek* [Elements of Shells Theory], Leningrad, Stroyizdat, 1989, 384 pp. (In Russian)]
5. Е. И. Михайловский, *Элементы конструктивно-нелинейной механики.* Сыктывкар: Сыктывкарск. ун-т, 2011. 201 с. [E. I. Mikhailovsky, *Elementy konstruktivno-nelineynoy mekhaniki* [Elements of constructive nonlinear mechanics], Syktyvkar, Syktyvkar Univ. Press, 2011, 201 pp. (In Russian)]

6. Е. И. Михайловский, Е. В. Тулубенская, “Алгоритм локального перебора вариантов в одной существенно нелинейной спектральной задаче” // *ПММ*, 2010. Т. 74, №2. С. 299–310; Ye. I. Mikhailovskii, Yu. V. Tulubenskaya, “An algorithm for the local exhaustive search for alternatives in an essentially non-linear eigenvalue problem”, *J. Appl. Math. Mech.*, 2010, vol. 74, no. 2, pp. 214–222 doi: 10.1016/j.jappmathmech.2010.05.012.
7. D. S. Watkins, *Fundamentals of matrix computations*, New York, John Wiley & Sons, 2002, xiii+620 pp. doi: 10.1002/0471249718.
8. M. Panju, “Iterative Methods for Computing Eigenvalues and Eigenvector”, *The Waterloo Mathematics Review*, 2011, vol. 1, pp. 9–19, arXiv: 1105.1185 [math.NA].

Поступила в редакцию 26/XI/2013;
в окончательном варианте — 24/XII/2013;
принята в печать — 19/III/2014.

MSC: 74B20; 74K25, 74K05

A LONGITUDINAL STABILITY OF A RIBBED COVER IN A MULTIMODULUS ELASTIC MEDIUM

A. Yu. Korablev, E. I. Mikhailovsky, E. V. Tulubenskaya, N. A. Belyaeva

Syktyvkar State University,
55, Oktyabr'skiy pr., Syktyvkar, 167001, Russian Federation.

The stability of a longitudinal compressed hinge-supported cylindrical cover stiffened by stringers and located on the border of two Winkler's ambiences is considered. The derivation of the equations was carried out under the assumptions: using a simplified theory of Donnell–Vlasov, axisymmetric deformation of a cover, only normal load acts on the shell. The problem is solved using a combined exhaustive search algorithm. This method includes full and local search of variants to search a form deflection and a critical force. Full search of variants is required to construct a form deflection of a shell. Local search of variants is necessary to clarify a critical force. As a result of numerical experiments we found out that increasing the number of stringers reinforces the shell. These results are consistent with the results obtained in the other works.

Keywords: *stability, hinge-supported cylindrical cover, combined exhaustive search algorithm.*

Received 26/XI/2013;
received in revised form 24/XII/2013;
accepted 19/III/2014.

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1278

Citation: A. Yu. Korablev, E. I. Mikhailovsky, E. V. Tulubenskaya, N. A. Belyaeva, “A Longitudinal Stability of a Ribbed Cover in a Multimodulus Elastic Medium”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 2 (35), pp. 89–95. doi: 10.14498/vsgtu1278. (In Russian)

Author Details: *Anatoly Yu. Korablev*, Postgraduate Student, Dept. of Mathematical Modeling and Cybernetics. *Eugeny I. Mikhailovsky* (12.07.1937–11.07.2013) (Dr. Phys. & Math. Sci.). *Elena V. Tulubenskaya* (Cand. Phys. & Math. Sci.), Associate Professor, Dept. of Mathematical Modeling and Cybernetics. *Nadezhda A. Belyaeva* (Dr. Phys. & Math. Sci.), Professor, Dept. of Mathematical Modeling and Cybernetics.

E-mail addresses: astroori@mail.ru (A.Yu. Korablev, *Corresponding author*), vetamile@rambler.ru (E.V. Tulubenskaya), belyayevana@mail.ru (N.A. Belyaeva)