Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2014. № 3 (36). С. 57–65

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1323

УДК 517.968.22

К СЛУЧАЯМ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В КВАДРАТУРАХ

И. М. Шакирова

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Россия, 420008, Казань, ул. Кремлевская, 18.

Аннотация

Рассматривается уравнение Вольтерра с двумя независимыми переменными, встречающееся в теории упругости. Целью работы является отыскание новых вариантов достаточных условий его разрешимости в явном виде. Предложен способ редукции исходного уравнения сначала к задаче Гурса для дифференциального уравнения третьего порядка, а затем к двум последовательно решаемым задачам для уравнений первого и второго порядка. Одна из них решается путем непосредственного интегрирования уравнения, а решение второй записывается через функцию Римана, для которой найдены случаи построения ее в явном виде. В терминах коэффициентов исходного уравнения получено семь вариантов условий указанного построения. Поскольку имеется 4 варианта участвующей в рассуждениях факторизации уравнения третьего порядка, в настоящей статье фактически указано 28 вариантов условий разрешимости исходного уравнения в квадратурах.

Ключевые слова: уравнение Вольтерра, условия разрешимости, решение в квадратурах, задача Гурса.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1323

Одним из традиционных направлений в математике является отыскание решений различных уравнений в явном виде. Если говорить об интегральных уравнениях, то многие результаты в указанной области отражены в справочнике [1], причём большинство из них относится к уравнениям типа Фредгольма, когда пределы содержащих искомую функцию интегралов являются постоянными. В настоящей работе рассматривается уравнение типа Вольтерра

$$u(x,y)+\int_{x_0}^{x}K_1(x,y,\xi)u(\xi,y)d\xi+\int_{y_0}^{y}K_2(x,y,\eta)u(x,\eta)d\eta+ \\ +\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}K(x,y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi d\eta=F(x,y), \quad (1)$$

где

$$(x,y)\in D=\{x_0<x<x_1,\ y_0<y<y_1\}.$$

Образец для цитирования: Шакирова И. М. К случаям разрешимости одного интегрального уравнения в квадратурах // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 3 (36). С. 57–65. doi: 10.14498/vsgtu1323.

Сведения об авторе: *Инна Маратовна Шакирова* (inna.sarvarova@yandex.ru), аспирант, каф. дифференциальных уравнений.

Аналогичные по своей структуре уравнения Фредгольма изучались, например, в [2]. Уравнения вида (1) встречаются в теории упругости [3, с. 279, формула (62.12), описывает изгиб тонкой сферической оболочки]. При непрерывных в $\overline{D}$ коэффициентах K, K_1, K_2 для (1) известна теорема существования единственного решения [3, с. 18; 4, с. 180]. Мы занимаемся здесь выделением до сих пор неизвестных частных случаев уравнения (1), в которых его решение могут быть построены в виде явных формул. Для этого предлагается развитие методики работы [5], в которой указаны некоторые простые случаи редукции (1) к задаче Гурса для уравнения вида

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f, \tag{2}$$

что на основании результатов из [6, с. 15, 16; 7] позволило сформулировать достаточные условия разрешимости исходного уравнения (1) в явном виде. В настоящей статье схема рассуждений из [5] распространяется на более сложные ситуации, когда к (2) мы приходим через факторизацию уравнения

$$v_{xxy} + Av_{xx} + Bv_{xy} + Cv_x + Dv_y + Ev = F. \tag{3}$$

Данное уравнение является обобщением известного уравнения Аллера (M. Hallaire)

$$u_x = (\alpha u_y + \beta u_{xy})_y,$$

встречающегося при моделировании процесса переноса почвенной влаги в зоне аэрации [8, 9]. С различных точек зрения (3) изучалось в [6] и [10–16]. В нужном нам аспекте (3) исследовалось в [6, с. 136]. Но об этом несколько позже.

Сейчас же предположим, что (1) имеет вид

$$u(x, y) + a_1(x, y) \int_{x_0}^{x} b_1(\xi, y)u(\xi, y)d\xi + \\ + a_2(x, y) \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} b_2(\xi, \eta)u(\xi, \eta)d\xi d\eta = f(x, y), \tag{4}$$

$$a_1(x, y)b_1(x, y)a_2(x, y)b_2(x, y) \neq 0. \tag{5}$$

Разделив (4) на a_2, продифференцировав затем полученное соотношение по y и по x и сделав замену искомой функции

$$v(x, y) = \int_{x_0}^{x} b_1(\xi, y)u(\xi, y)d\xi, \tag{6}$$

приходим к уравнению (3) с коэффициентами

$$\begin{gathered} A = -\lambda_y, \ B = a_1 b_1 - \lambda_x, \ C = a_2 b_2 + b_1 \left[a_{1y} - a_1(\ln a_2)_y\right] - \lambda_{yx} + \lambda_y \lambda_x, \\ D = a_2 b_1 \left(a_1/a_2\right)_x, \quad E = a_2 b_1 \left(a_1/a_2\right)_{yx}, \quad F = a_2 b_1 \left(f/a_2\right)_{yx}, \end{gathered} \tag{7}$$

где для некоторой компактности формул (7) введено обозначение $\lambda = \ln a_2 b_1$. Из (4) для $u(x, y_0) = \psi(x)$ имеем соотношение

$$\psi(x) + a_1(x, y_0) \int_{x_0}^{x} b_1(\xi, y_0)\psi(\xi)d\xi = f(x, y_0),$$

являющееся фактически обыкновенным линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Действительно, обозначив интеграл через $\sigma(x)$, имеем при условии $b_1(x, y_0) \neq 0$ (это верно в силу (5))

$$\sigma' + a_1 b_1 \sigma = b_1 f, \quad \sigma(x_0) = 0.$$

Решая это уравнение, например, с помощью интегрирующего множителя $\exp \int_{x_0}^{x} a_1 b_1 d\xi$, найдём

$$\sigma(x) = \int_{x_0}^{x} b_1 f \left[\exp \int_{x}^{\xi} a_1 b_1 d\xi_1\right] d\xi,$$

после чего по формуле $\psi = \sigma'/b_1$ вычислим

$$u(x, y_0) = \psi(x) = f(x, y_0) - a_1(x, y_0),$$
$$\int_{x_0}^{x} b_1(\xi, y_0) f(\xi, y_0) \left[\exp \int_{x}^{\xi} a_1(\xi_1, y_0) b_1(\xi_1, y_0) d\xi_1\right] d\xi.$$

Подставив это значение в (6) при $y = y_0$, определим $v(x, y_0) = \theta(x)$, являющееся одним из граничных значений в задаче Гурса для уравнения (3). Остальные два условия даются вытекающими из (6) формулами

$$v(x_0, y) = 0, \quad v_x(x_0, y) = b_1(x_0, y) f(x_0, y). \tag{8}$$

В [6, с. 136] предложен подход к выявлению случаев явного решения задачи Гурса для (3), основанный на факторизации оператора, стоящего в левой части этого уравнения. Например, при выполнении тождеств (6.13) из [6], имеющих в обозначениях (7) вид

$$\begin{gathered}
\lambda_{xx} - \lambda_{yx} + \lambda_y\big[a_1 b_1 - \lambda_x + \lambda_y\big] \equiv (a_1 b_1)_x - a_2 b_1 \left(a_1/a_2\right)_x, \\
\lambda_y^3 - \lambda_y^2 \lambda_x + \lambda_{yx}\big[\lambda_x - 2\lambda_y\big] + \lambda_y\big[\lambda_{xx} - a_2 b_2 - a_{1y} b_1 + a_1 b_1 (\ln a_2)_y\big] \equiv \\
\equiv a_2 b_1 \left(a_1/a_2\right)_{xy} - (a_2 b_2)_x - (a_{1y} b_1)_x + (a_1 b_1)_x (\ln a_2)_y + a_1 b_1 (\ln a_2)_{yx},
\end{gathered} \tag{9}$$

уравнение (3) можно представить в форме

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x} + A\Big)\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_1 \frac{\partial v}{\partial x} + B_1 \frac{\partial v}{\partial y} + C_1 v\Big) = F,$$

где

$$\begin{gathered}
A_1 = A = -\lambda_y, \quad B_1 = B - A = a_1 b_1 - \lambda_x + \lambda_y, \\
C_1 = C - A_x - A^2 = a_2 b_2 + b_1\big[a_{1y} - a_1 (\ln a_2)_y\big] + \lambda_y \lambda_x - \lambda_y^2.
\end{gathered} \tag{10}$$

В результате задача (3), (8) с учётом $v(x, y_0) = \theta(x)$ распадается на две последовательно решаемые задачи:

$$w_x + A w = F, \quad w(x_0, y) = \big[b_1(x_0, y) f(x_0, y)\big]_y + A(x_0, y) b(x_0, y) f(x_0, y)$$

и

$$v_{xy} + A_1 v_x + B_1 v_y + C_1 v = w, \quad v(x_0, y) = 0, \quad v(x, y_0) = \theta(x). \tag{11}$$

Первая из них очевидным образом решается путём непосредственного интегрирования уравнения, так что все сводится к задаче Гурса (11). Решение же задачи (11) записывается через функцию Римана рассматриваемого уравнения [6, формула (1.20)], причём для последней имеются [6, с. 15, 16; 17, 18] случаи её построения в явном виде. В только что указанных источниках условия, обеспечивающие эти случаи, представлены через коэффициенты уравнения (2):

1) $a_x + ab - c \equiv 0$;
2) $b_y + ab - c \equiv 0$;
3) $a_x \equiv b_y$, $c - a_x - ab \equiv \xi_0(x)\eta_0(y) \neq 0$;
4) $b_y - a_x \equiv a_x + ab - c \equiv \xi_1(x)\eta_1(y) \neq 0$;
5) $a_x - b_y \equiv b_y + ab - c \equiv \xi_2(x)\eta_2(y) \neq 0$;
6) $ma_x - b_y \equiv mb_y - a_x \equiv (m-1)(ab-c)$;
7) $\omega = \dfrac{2s'(x)t'(y)}{(2-m)[s(x)+t(y)]^2}$, $\big[s(x)+t(y)\big]s'(x)t'(y)(2-m) \neq 0$.

Здесь ξ_0, $\eta_0 \in C$; ξ_k, $\eta_k \in C^1$, $k = 1, 2$; s, t, $m \in C^2$, причём m зависит лишь от одной из переменных (x, y). В остальном перечисленные функции произвольны, а коэффициенты a, b, c имеют гладкость, обеспечивающую возможность выполнения записанных соотношений. Предполагается также, что классы гладкости задаются на замкнутых множествах определения соответствующих функций. Каждого из тождеств 1), 2) и наборов 3)–5) достаточно для получения явного вида функций Римана. Формулами же 6), 7) следует пользоваться совместно: при выполнении набора 6) функцию Римана можно построить в случаях, когда левая часть хотя бы одного из соотношений 1), 2) имеет вид ω, указанной в (7). Другими словами, мы имеем семь вариантов условий разрешимости в квадратурах задачи Гурса для уравнения (2). Для всех случаев виды функций Римана можно найти в [6,17,18]. Таким образом, общее количество вариантов указанной разрешимости равно 7. Понятно, что для записи 1)–7) в терминах коэффициентов уравнения (4) следует заменить a, b, c соответственно на A_1, B_1, C_1 с подставленными в них значениями из (10) и (7). Всё это приводит к следующим соотношениям:

$$h = \lambda_{yx} + \lambda_y a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_{1y} b_1 - a_1 b_1 (\ln a_2)_y \equiv 0; \tag{12}$$

$$k = (a_1 b_1)_y - a_2 b_2 - a_{1y} b_1 + a_1 b_1 (\ln a_2)_y - \lambda_y a_1 b_1 \equiv 0; \tag{13}$$

$$(a_1 b_1)_y + \lambda_{yy} \equiv 0, \lambda_{yx} + \lambda_y a_2 b_1 + a_2 b_2 + b_1[a_{1y} - a_1(\ln a_2)_y] \equiv \xi_0(x)\eta_0(y); \tag{14}$$

$$(a_1 b_1)_y + \lambda_{yy} \equiv h \equiv \xi_1(x)\eta_1(y) \neq 0; \tag{15}$$

$$-(a_1 b_1)_y - \lambda_{yy} \equiv k \equiv \xi_2(x)\eta_2(y) \neq 0; \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{xy}(1-m) - \lambda_{yy} - (a_1 b_1)_y \equiv m[\lambda_{yy} + (a_1 b_1)_y] + \lambda_{xy}(1-m) \equiv \\ \equiv (1-m)[\lambda_y a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_{1y} b_1 - a_1 b_1 (\ln a_2)_y]. \end{aligned} \tag{17}$$

При этом следует помнить, что мы ранее ввели обозначение $\lambda = \ln a_2 b_1$; a, h, k из (15), (16) заданы в (12), (13). Вместо 7) будем рассматривать

$$\omega_k = \frac{2s'_k(x)t'_k(y)}{(2-m)[s_k(x)+t_k(y)]^2}, \quad [s_k(x)+t_k(y)]s'_k(x)t'_k(y)(2-m) \neq 0, \tag{18}$$

причём ω_1, ω_2 нужно считать равными h или k из (12), (13) соответственно.

Из проведенных рассуждений следует

Теорема. *Пусть при наличии тождеств* (9) *и неравенства* (5):

1) *или удовлетворяется хотя бы одно из тождеств* (12), (13);
2) *или существуют такие функции* m, ξ_k, η_k, $k = 0, 1, 2$; s_k, $t_k, k = 1, 2$, *указанных выше классов, что либо выполнена хотя бы одна из трех групп соотношений* (14)–(16), *либо вместе с тождеством* (17) *имеет место представление* (18) *хотя бы для одной из двух записанных выше функций* ω_1, ω_2.

Тогда уравнение (4) *разрешимо в квадратурах.*

Отметим, что в [6] указаны ещё три варианта факторизации уравнения (3). Одна из них приводит его к виду

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_2 \frac{\partial}{\partial x} + B_2 \frac{\partial}{\partial y} + C_2\Big)\Big(\frac{\partial v}{\partial x} + Av\Big) = F,$$

где

$$A_2 = A = -\lambda_y, \qquad B_2 = B - A = a_1 b_1 - \lambda_x + \lambda_y,$$
$$C_2 = C - A_y - A^2 = a_2 b_2 + a_{1y} b_1 - a_1 b_1 (\ln a_2)_y - \lambda_{yx} + \lambda_y \lambda_x + \lambda_{yy} - \lambda_y^2.$$

Факторизация обеспечивается условиями

$$\begin{aligned}
&\lambda_{yx} + \lambda_y[a_1 b_1 + \lambda_y - \lambda_x] \equiv -a_2 b_1 \left(a_1/a_2\right)_x, \\
&\lambda_{xyy} + \lambda_{yy}[2\lambda_y + \lambda_x - a_1 b_1] + \\
&\qquad + \lambda_y[\lambda_y \lambda_x - 2\lambda_{xy} - \lambda_y^2 + a_2 b_2 + a_{1y} b_1 - a_1 b_1 (\ln a_2)_y] \equiv -a_2 b_1 \left(a_1/a_2\right)_x.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом можно использовать факторизации

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x} + B\Big)\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A\frac{\partial v}{\partial x} - [A_x + AB - C]v\Big) = F,$$
$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A\frac{\partial}{\partial x} - [B_y + AB - C]\Big)\Big(\frac{\partial v}{\partial x} + Bv\Big) = F,$$

возможность каждой из которых определяется соответственно парами тождеств

$$D \equiv 0, \quad B(A_x + AB - C) - (A_x + AB - C)_x - E \equiv 0,$$
$$B_x - D \equiv 0, \quad D_y + AD - BB_y - AB^2 - CB \equiv 0.$$

Во всех случаях одна из задач оказывается связанной с уравнением вида (2), возможности решения которой в квадратурах отыскиваются с помощью соотношений 1)–7). Таким образом, общее число вариантов разрешимости оказывается равным 28.

Обратим ещё внимание на уравнение

$$u(x,y) + a_3(x,y)\int_{y_0}^{y} b_3(x,\eta)u(x,\eta)d\eta + \\ + a_2(x,y)\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} b_2(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi d\eta = f(x,y).$$

Это тоже частный случай (1), отличающийся от (3) лишь тем, что в нём переменные (x, y) поменялись ролями. Ясно, что все проведённые для (3) рассуждения можно осуществить и здесь, что даёт ещё 28 вариантов разрешимости уравнения (1) в квадратурах. В дополнение к приведённой выше теореме можно сформулировать ещё семь её модернизаций в соответствии с только что перечисленными возможностями.

Каждый вариант сформулированной теоремы представляет собой три или четыре соотношения, связывающие четыре коэффициента a_k, b_k, $k = 1, 2$. Число этих соотношений может быть уменьшено. Покажем это на примере варианта с условиями (9), (12), содержащими три соотношения для определения четырёх коэффициентов. Перенося слагаемое $a_1 b_1 \lambda_y$ из левой части первого условия (9) в правую его часть, получим

$$\lambda_{xx} - \lambda_{yx} + \lambda_y^2 - \lambda_x \lambda_y \equiv \{b_{1x} + b_1(\ln a_2)_x - b_1[\ln(a_2 b_1)]_y\} a_1. \qquad (19)$$

Если считать a_2 и b_1 временно известными, то левая часть здесь и множитель при a_1 тоже будут известны. Если этот множитель отличен от нуля, то из (19) определится a_1, а после этого из (12) вычисляется b_2 (в силу (5)). Понятно, что a_1 и b_2 будут зависеть от a_2, b_1. Подставляя a_1, b_2 во второе соотношение (9), мы получим одно тождество, связывающее уже только a_2 и b_1. Оно и будет фактически заменять все три соотношения (9) и (12).

Аналогичные рассуждения можно построить и для других вариантов.

В заключение отметим, что вопросы, близкие к обсуждаемым в данной статье, были предметом изучения в работах А. А. Андреева и Ю. О. Яковлевой [19, 20].

ORCID
Inna Shakirova: http://orcid.org/0000-0002-3538-6236

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Полянин А. Д., Манжиров А. В. *Справочник по интегральным уравнениям.* М.: Физматлит, 2003. 608 с.
2. Забрейко П. П., Калитвин А. С., Фролова Е. В. Об интегральных уравнениях с частными интегралами в пространстве непрерывных функций // *Дифференц. уравнения*, 2002. Т. 38, № 4. С. 538–546.
3. Векуа И. Н. *Новые методы решения эллиптических уравнений.* М., Л.: ГИТТЛ, 1948. 296 с.
4. Мюнтц Г. *Интегральные уравнения.* Т. 1. М., Л.: Гостехтеориздат, 1934. 330 с.
5. Жегалов В. И. Решение уравнений Вольтерры с частными интегралами с помощью дифференциальных уравнений // *Дифференц. уравнения*, 2008. Т. 44, № 7. С. 874–882.
6. Жегалов В. И., Миронов А. Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными.* Казань: Казанское матем. об-во, 2001. 226 с.
7. Нахушев А. М. *Уравнения математической биологии.* М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
8. Hallaire M. Le potentiel efficace de l'eau dans le sol en régime de déssèchement / *L'Eau et la Production Végétale.* Paris: Institut National de la Recherche Agronomique, 1964. pp. 27–62.
9. Mounier J. Évapotranspiration potentielle et besoins en eau // *Norois*, 1965. vol. 47, no. 47. pp. 349–352. doi: 10.3406/noroi.1965.1531.
10. Colton D. Pseudoparabolic equation in one space variable // *J. Differ. Equations*, 1972. vol. 12, no. 3. pp. 559–565. doi: 10.1016/0022-0396(72)90025-3.
11. Rundell W., Stecher M. Remarks concerning the supports of solutions of pseudoparabolic equations // *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1977. vol. 63, no. 1. pp. 77–81. doi: 10.1090/s0002-9939-1977-0433037-4.
12. Rundell W. The construction of solutions to pseudoparabolic equations in noncylindrical domains // *J. Differ. Equations*, 1978. vol. 27, no. 3. pp. 394–404. doi: 10.1016/0022-0396(78)90059-1.

13. Rundell W. The Stefan Problem for a pseudo-heat equation // *Indiana Univ. Math. J.*, 1978. vol. 27. pp. 739–750.
14. Rundell W. The uniqueness class for the Cauchy problem for pseudoparabolic equations // *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1979. vol. 76, no. 2. pp. 253–257. doi: 10.1090/s0002-9939-1979-0537083-3.
15. Шханухов М. Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // *Дифференц. уравнения*, 1982. Т. 18, № 4. С. 689–699.
16. Шханухов М. Х. Об одном методе решения краевых задач для уравнений третьего порядка // *ДАН СССР*, 1982. Т. 265, № 6. С. 1327–1330.
17. Жегалов В. И. К случаям разрешимости гиперболических уравнений в терминах специальных функций / *Неклассические уравнения математической физики*. Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2002. С. 73–79.
18. Жегалов В. И., Сарварова И. М. К условиям разрешимости задачи Гурса в квадратурах // *Изв. вузов. Матем.*, 2013. № 3. С. 68–73.
19. Андреев А. А., Яковлева Ю. О. Задача Гурса для одной системы гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка с двумя независимыми переменными // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 3(24). С. 35–41. doi: 10.14498/vsgtu996.
20. Андреев А. А., Яковлева Ю. О. Характеристическая задача для одного гиперболического дифференциального уравнения третьего порядка с некратными характеристиками // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2013. Т. 13, № 1(2). С. 3–6.

Поступила в редакцию 16/VI/2014;
в окончательном варианте — 16/VII/2014;
принята в печать — 21/VIII/2014.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki. 2014. Issue 3 (36). Pp. 57–65
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci. 2014. Issue 3 (36). Pp. 57–65]

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1323

MSC: 45D05, 35G15; 35C05, 35C15

A CASES OF SOLVABILITY OF THE INTEGRAL EQUATION IN QUADRATURES

I. M. Shakirova

Kazan (Volga Region) Federal University,
18, Kremlyovskaya st., Kazan, 420008, Russian Federation.

Abstract

We consider Volterra equation with two-variable, commonly encountered in the theory of elasticity. The purpose is to find new variants of sufficient conditions for it's solvability in explicit calculation. The reduction principle of

How to cite Reference: S h a k i r o v a I. M. A cases of solvability of the integral equation in quadratures, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 3 (36), pp. 57–65. doi: 10.14498/vsgtu1323. (In Russian)
Author Details: *Inna M. Shakirova* (inna.sarvarova@yandex.ru), Postgraduate Student, Dept. of Differential Equations.

the original equation, first, to Goursat problem for differential equation of third order, and after that to two problems solving consecutively for equations of the first and second order is devised. One of these problems can be solved by direct equation integration, and the other's solution can be written through Riemann function for which variants of its explicit construction are found. Seven variants of conditions for mentioned calculation were obtained in terms of coefficients of the original equation. Considering that there are four variants of factorization of equation of third order involved into the reasoning, virtually there are 28 variants of conditions for original equation solvability in quadratures noted in this article.

Keywords: Volterra equations, solvability conditions, solution in quadratures, Goursat problem.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1323

ORCID
Inna Shakirova: http://orcid.org/0000-0002-3538-6236

REFERENCES

1. Polyanin A. D., Manzhirov A. V. *Spravochnik po integral'nym uravneniyam* [Handbook of integral equations]. Moscow, Fizmatlit, 2003, 608 pp. (In Russian)
2. Zabreiko P. P., Kalitvin A. S., Frolova E. V. On partial integral equations in the space of continuous functions, *Differ. Equations*, 2002, vol. 38, no. 4, pp. 567–576. doi: 10.1023/A:1016371902018.
3. Vekua I. N. *New Methods for Solving Elliptic Equations*, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, vol. 1. New York, Wiley, North-Holland Publishing Comp., 1967, 358+xii pp.
4. Müntz G. *Integral'nye uravneniia* [Integral Equations], vol. 1. Moscow, Gostekhteorizdat, 1934, 330 pp. (In Russian)
5. Zhegalov V. I. Solution of Volterra partial integral equations with the use of differential equations, *Differ. Equations*, 2008, vol. 44, no. 7, pp. 900–908. doi: 10.1134/S0012266108070021.
6. Zhegalov V. I., Mironov A. N. *Differentsial'nye uravneniia so starshimi chastnymi proizvodnymi* [Differential Equations with Major Partial Derivatives], Kazan, 2001, 226 pp. (In Russian)
7. Nakhushev A. M. *Uravneniya matematicheskoj biologii* [Equations of mathematical biology]. Moscow, Vysshaya Shkola, 1995, 301 pp. (In Russian)
8. Hallaire M. Le potentiel efficace de l'eau dans le sol en régime de déssèchement, *L'Eau et la Production Végétale.* Paris, Institut National de la Recherche Agronomique, 1964, pp. 27–62.
9. Mounier J. Évapotranspiration potentielle et besoins en eau, *Norois*, 1965, vol. 47, no. 47, pp. 349–352. doi: 10.3406/noroi.1965.1531.
10. Colton D. Pseudoparabolic equation in one space variable, *J. Differ. Equations*, 1972, vol. 12, no. 3, pp. 559–565. doi: 10.1016/0022-0396(72)90025-3.
11. Rundell W., Stecher M. Remarks concerning the supports of solutions of pseudoparabolic equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1977, vol. 63, no. 1, pp. 77–81. doi: 10.1090/s0002-9939-1977-0433037-4.
12. Rundell W. The construction of solutions to pseudoparabolic equations in noncylindrical domains, *J. Different. Equation*, 1978, vol. 27, no. 3, pp. 394–404. doi: 10.1016/0022-0396(78)90059-1.
13. Rundell W. The Stefan Problem for a pseudo-heat equation, *Indiana Univ. Math. J.*, 1978, vol. 27, pp. 739–750.
14. Rundell W. The uniqueness class for the Cauchy problem for pseudoparabolic equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1979, vol. 76, no. 2, pp. 253–257. doi: 10.1090/s0002-9939-1979-0537083-3.

15. Shkhanukov M. Kh. Boundary-value problems for a third-order equation occurring in the modeling of water filtration in porous media, *Differ. Equations*, 1982, vol. 18, pp. 509–517.
16. Shkhanukov M. Kh. On a method of solving boundary value problems for third order equations, *Sov. Math., Dokl.*, 1982, vol. 26, pp. 272–275.
17. Zhegalov V. I. On Solvability Cases for Hyperbolic Equations in Terms of Special Functions, *Neklassicheskie uravneniya matematicheskoi fiziki* [Nonclassical Equations of Mathematical Physics]. Novosibirsk, Mathematical Institute, Russian Academy of Science, Siberian Branch, 2002, pp. 73–79 (In Russian).
18. Zhegalov V. I., Sarvarova I. M. Solvability of the Goursat Problem in quadratures, *Russian Math.*, 2013, vol. 57, no. 3, pp. 56–59. doi: 10.3103/S1066369X13030080.
19. Andreev A. A., Yakovleva J. O. The Goursat problem for one hyperbolic system of the third order differential equations with two independent variables, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2011, no. 3(24), pp. 35–41 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu996.
20. Andreev A. A., Yakovleva J. O. The Characteristic Problem for one Hyperbolic Differentional Equation of the Third Order with Nonmultiple Characteristics, *Izv. Saratov. Univ. Mat. Mekh. Inform.*, 2013, vol. 13, no. 1(2), pp. 3–6 (In Russian).

Received 16/VI/2014;
received in revised form 16/VII/2014;
accepted 21/VIII/2014.