

УДК 517.956.6

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ
С ОБОБЩЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ М. САЙГО
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БИЦАДЗЕ—ЛЫКОВА*

А. В. Тарасенко, И. П. Егорова

Самарский государственный архитектурно-строительный университет,
Россия, 443001, Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

Аннотация

Для уравнения влагопереноса исследована нелокальная краевая задача в области, являющейся объединением двух характеристических треугольников. Новизна постановки задачи заключается в том, что в краевых условиях содержится обобщённый оператор дробного интегрирования в смысле М. Сайго. Единственность решения исследуемой задачи доказана с помощью принципа экстремума для гиперболических уравнений. При доказательстве широко используются свойства операторов обобщённого дробного интегрирования в смысле М. Сайго. Существование решения задачи эквивалентно сведению к вопросу разрешимости характеристического особого интегрального уравнения с ядром Коши, для которого в работе исследована гладкость правой части.

Ключевые слова: краевая задача, обобщённый оператор дробного интегрирования, интегральное уравнение с ядром Коши.

doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1363>

1. Введение. Рассмотрим уравнение гиперболического типа

$$LU = y^2 U_{xx} - U_{yy} + bU_x = 0, \quad |b| < 1, \quad (1)$$

которое принято называть уравнением Бицадзе—Лыкова или уравнением влагопереноса [2, с. 234], в области D , являющейся объединением двух характеристических треугольников $\triangle ABC_1 = D_1$ с вершинами $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C_1(1/2, -1)$ и $\triangle ABC_2 = D_2$ с вершинами A , B , $C_2(1/2, 1)$.

Введем следующие обозначения: $I \equiv AB$, $\Theta_0(x)$ и $\Theta_1(x)$ — точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x, 0) \in I$, с характеристиками AC_1 и BC_2 соответственно; $(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x)$ и $(I_{1-}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x)$ — операторы

© 2014 Самарский государственный технический университет.

Образец для цитирования

Тарасенко А. В., Егорова И. П. О разрешимости нелокальной задачи с обобщенными операторами М. Сайго для уравнения Бицадзе—Лыкова // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 4 (37). С. 33–41. doi: [10.14498/vsgtu1363](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1363).

Сведения об авторах

Анна Валерьевна Тарасенко (к.ф.-м.н., доц.; tarasenko.a.v@mail.ru); автор, ведущий переписку), доцент, каф. высшей математики.

Ирина Петровна Егорова (к.ф.-м.н., доц.; ira.egorova81@yandex.ru), доцент, каф. высшей математики.

* Настоящая статья представляет собой расширенный вариант доклада [1], сделанного авторами на Четвёртой международной конференции «Математическая физика и её приложения» (Россия, Самара, 25 августа – 1 сентября 2014).

обобщённого дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса $F(a, b; c; z)$, введённые в [3] (см. также [4, с. 326–327]) и имеющие при действительных α, β, η и $x > 0$ вид

$$(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x) = \begin{cases} \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} F\left(\alpha + \beta, -\eta; \alpha; 1 - \frac{t}{x}\right) f(t) dt, & \alpha > 0; \\ (I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{0+}^{\alpha+n, \beta-n, \eta-n} f)(x), & \alpha \leq 0, n = [-\alpha] + 1; \end{cases}$$

$$(I_{1-}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x) = \begin{cases} \frac{(1-x)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^1 (t-x)^{\alpha-1} F\left(\alpha + \beta, -\eta; \alpha; \frac{t-x}{1-x}\right) f(t) dt, & \alpha > 0; \\ (I_{1-}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{1-}^{\alpha+n, \beta-n, \eta-n} f)(x), & \alpha \leq 0, n = [-\alpha] + 1. \end{cases}$$

Если $\alpha + \beta = 0$, то операторы $(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x)$ и $(I_{1-}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x)$ сводятся к дробным интегралам $(I_{0+}^{\alpha} f)(x)$, $(I_{1-}^{\alpha} f)(x)$ и производным $(D_{0+}^{\alpha} f)(x)$, $(D_{1-}^{\alpha} f)(x)$ Римана–Лиувилля [4, с. 41–44]; $H^{\lambda}[0, 1]$ ($0 < \lambda \leq 1$) – класс функций, удовлетворяющих на отрезке $[0, 1]$ условию Гёльдера порядка λ .

Для уравнения (1) поставим и изучим следующую нелокальную задачу.

ЗАДАЧА. Найти функцию $U(x, y)$ со свойствами:

$$LU \equiv 0 \quad \text{в области} \quad D = D_1 \cup D_2; \quad (2)$$

$$U(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(\bar{D} \setminus I) \cap C^2(D \setminus I);$$

$$U(x, +0) = U(x, -0) \quad (x \in \bar{I}), \quad \lim_{y \rightarrow 0+} U_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0-} U_y(x, y), \quad x \in I; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} A_1(I_{0+}^{a, b_1, b_1 + \frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} U[\Theta_0(t)])(x) + A_2(I_{0+}^{a + \frac{1-b}{4}, b_1 + \frac{1}{2}, b_1 - \frac{1-b}{4}} U(t, -0))(x) + \\ + A_3(I_{0+}^{a + \frac{3-b}{4}, b_1, b_1 - \frac{1-b}{4}} U_y(t, -0))(x) = \varphi_1(x), \quad x \in I; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} B_1(I_{1-}^{a, b_1, b_1 + \frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} U[\Theta_1(t)])(x) + B_2(I_{1-}^{a + \frac{1-b}{4}, b_1 + \frac{1}{2}, b_1 - \frac{1-b}{4}} U(t, +0))(x) + \\ + B_3(I_{1-}^{a + \frac{3-b}{4}, b_1, b_1 - \frac{1-b}{4}} U_y(t, +0))(x) = \varphi_2(x), \quad x \in I; \end{aligned} \quad (5)$$

где $A_i, B_i, i = 1, 2, 3$ – вещественные константы, на которые ниже будут наложены условия;

$$\frac{|b| - 1}{4} < a < \frac{1 - b}{4}, \quad a + \frac{b - 1}{4} < b_1 < a + \frac{3 + b}{4}; \quad (6)$$

$\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ — известные функции, причём

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in H^\lambda[0, 1] \cap C^2(I), \quad 0 < a + \frac{b+1}{4} < \lambda \leq 1. \quad (7)$$

Отметим, что в работах [5, 6] для уравнения (1) рассматривались задачи с краевыми условиями типа (4) и (5), но в работе [5] эта задача исследована в области D_1 , а в работе [6] — в случае $A_3 = B_3 = 0$ и при других значениях параметров обобщённых операторов дробного интегро-дифференцирования.

Настоящая работа продолжает исследования для уравнения (1), представленные в [5, 6].

Будем искать решение этой задачи в классе таких функций $U(x, y)$, что

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} U_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} U_y(x, y) \in H^{\tilde{\lambda}}[0, 1], \quad \text{где } 1/2 < \tilde{\lambda} \leq 1.$$

2. Единственность решения задачи. Пусть существует решение исследуемой задачи. Введём обозначения

$$\begin{aligned} U(x, +0) &= \tau_+(x), & U(x, -0) &= \tau_-(x), \\ \lim_{y \rightarrow 0^+} U_y(x, y) &= \nu_+(x), & \lim_{y \rightarrow 0^-} U_y(x, y) &= \nu_-(x). \end{aligned}$$

Используя решение задачи Коши соответственно в областях D_1 и D_2 [7, с.268], найдём $U[\Theta_0(x)]$ и $U[\Theta_1(x)]$:

$$\begin{aligned} U[\Theta_0(x)] &= k_1(I_{0+}^{\frac{1-b}{4}, 0, \frac{b-3}{4}} \tau_-(t))x + k_2(I_{0+}^{\frac{3-b}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{b-3}{4}} \nu_-(t))x, \\ U[\Theta_1(x)] &= k_3(I_{1-}^{\frac{1+b}{4}, 0, -\frac{b+3}{4}} \tau_+(t))x - k_4(I_{1-}^{\frac{3+b}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{b+3}{4}} \nu_+(t))x, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$k_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{b+1}{4})}, \quad k_2 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\frac{b+3}{4})}, \quad k_3 = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1-b}{4})}, \quad k_4 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\frac{3-b}{4})}.$$

Подставив (8) в краевое условие (4) с учётом формул [4, с. 327]

$$\begin{aligned} (I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} \varphi)(x) &= x^{-\alpha-\beta-\eta} (I_{0+}^{\alpha, -\alpha-\eta, -\alpha-\beta} \varphi)(x), & \alpha > 0, \\ (I_{1-}^{\alpha, \beta, \eta} \varphi)(x) &= (1-x)^{-\alpha-\beta-\eta} (I_{1-}^{\alpha, -\alpha-\eta, -\alpha-\beta} \varphi)(x), & \alpha > 0, \\ (I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} I_{0+}^{\gamma, \delta, \eta-\beta-\gamma-\delta} \varphi)(x) &= (I_{0+}^{\alpha+\gamma, \beta+\delta, \eta-\gamma-\delta} \varphi)(x), & \gamma > 0, \\ (I_{1-}^{\alpha, \beta, \eta} I_{1-}^{\gamma, \delta, \eta-\beta-\gamma-\delta} \varphi)(x) &= (I_{1-}^{\alpha+\gamma, \beta+\delta, \eta-\gamma-\delta} \varphi)(x), & \gamma > 0, \end{aligned} \quad (9)$$

получим соотношение между $\tau_{\pm}(x)$ и $\nu_{\pm}(x)$, принесенное на I из областей D_1 и D_2 соответственно:

$$\begin{aligned} (A_1 k_1 + A_2) (I_{0+}^{a+\frac{1-b}{4}, b_1+\frac{1}{2}, b_1-\frac{1-b}{4}} \tau_-(t))(x) + \\ + (A_1 k_2 + A_3) (I_{0+}^{a+\frac{3-b}{4}, b_1, b_1-\frac{1-b}{4}} \nu_-(t))(x) = \varphi_1(x), \end{aligned} \quad (10)$$

$$(B_1 k_3 + B_2)(I_{1-}^{a+\frac{1+b}{4}, b_1+\frac{1}{2}, b_1-\frac{1+b}{4}} \tau_+(t))(x) - (B_1 k_4 - B_3)(I_{1-}^{a+\frac{3+b}{4}, b_1, b_1-\frac{1+b}{4}} \nu_+(t))(x) = \varphi_2(x). \quad (11)$$

Применив к обеим частям (10) оператор $(I_{0+}^{-a-\frac{3-b}{4}, -b_1, a+b_1+\frac{1}{2}})$, а к обеим частям (11) оператор $(I_{1-}^{-a-\frac{3+b}{4}, -b_1, a+b_1+\frac{1}{2}})$, и используя свойства операторов дробного интегрирования и дифференцирования [4, с. 327]

$$\begin{aligned} (I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} I_{0+}^{\gamma, \delta, \alpha+\eta} \varphi)(x) &= (I_{0+}^{\alpha+\gamma, \beta+\delta, \eta} \varphi)(x), & \gamma > 0, \\ (I_{1-}^{\alpha, \beta, \eta} I_{1-}^{\gamma, \delta, \alpha+\eta} \varphi)(x) &= (I_{1-}^{\alpha+\gamma, \beta+\delta, \eta} \varphi)(x), & \gamma > 0, \\ (I_{0+}^{\alpha, -\alpha, \eta} \varphi)(x) &= (I_{0+}^{\alpha} \varphi)(x), & \alpha > 0, \\ (I_{1-}^{\alpha, -\alpha, \eta} \varphi)(x) &= (I_{1-}^{\alpha} \varphi)(x), & \alpha > 0, \\ (I_{0+}^{-\alpha, \alpha, \eta} \varphi)(x) &= (D_{0+}^{\alpha} \varphi)(x), & \alpha > 0, \\ (I_{1-}^{-\alpha, \alpha, \eta} \varphi)(x) &= (D_{1-}^{\alpha} \varphi)(x), & \alpha > 0, \end{aligned}$$

а также полагая $\tau_+(x) = \tau_-(x) = \tau(x)$, получаем равенства

$$\begin{aligned} \nu_-(x) &= -\frac{A_1 k_1 + A_2}{A_1 k_2 + A_3} (D_{0+}^{\frac{1}{2}} \tau(t))(x) + \\ &\quad + \frac{1}{A_1 k_2 + A_3} (I_{0+}^{-a-\frac{3-b}{4}, -b_1, a+b_1+\frac{1}{2}} \varphi_1(t))(x), \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu_+(x) &= \frac{B_1 k_3 + B_2}{B_1 k_4 - B_3} (D_{1-}^{\frac{1}{2}} \tau(t))(x) - \\ &\quad - \frac{1}{B_1 k_4 - B_3} (I_{1-}^{-a-\frac{3+b}{4}, -b_1, a+b_1+\frac{1}{2}} \varphi_2(t))(x), \quad (13) \end{aligned}$$

При $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) \equiv 0$ равенства (12) и (13) примут вид

$$\begin{aligned} \nu_-(x) &= -\frac{A_1 k_1 + A_2}{A_1 k_2 + A_3} (D_{0+}^{\frac{1}{2}} \tau(t))(x), \\ \nu_+(x) &= \frac{B_1 k_3 + B_2}{B_1 k_4 - B_3} (D_{1-}^{\frac{1}{2}} \tau(t))(x). \end{aligned}$$

Потребуем теперь, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1, A_2 > 0, \\ A_1 k_2 + A_3 < 0 \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1, A_2 < 0, \\ A_1 k_2 + A_3 > 0; \end{array} \right. \quad (14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1, B_2 > 0, \\ B_3 - B_1 k_4 > 0 \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} B_1, B_2 < 0, \\ B_3 - B_1 k_4 < 0. \end{array} \right. \quad (15)$$

В силу принципа экстремума для гиперболических уравнений [9] положительный максимум (отрицательный минимум) функции $U(x, y)$ достигается в областях \overline{D}_1 и \overline{D}_2 в точке $(x_0, 0) \in I$.

Пользуясь тем, что дробные производные в точке положительного максимума строго положительны (в точке отрицательного минимума строго отрицательны) [10, с. 123], и учитывая (14), (15), получаем неравенства

$$\nu_-(x_0) > 0 \quad (\nu_-(x_0) < 0) \quad \text{и} \quad \nu_-(x_0) < 0 \quad (\nu_-(x_0) > 0).$$

Эти неравенства противоречат условию сопряжения (3). Полученное противоречие доказывает единственность решения задачи для уравнения (1), если $|b| < 1$.

3. Существование решения задачи. Подействуем на обе части равенства (10) оператором $(I_{0+}^{-a-\frac{1-b}{4}, -b_1-\frac{1}{2}, a+b_1})$, а на обе части равенства (11) — оператором $(I_{1-}^{-a-\frac{1+b}{4}, -b_1-\frac{1}{2}, a+b_1})$.

На основании двух последних формул из (9) получим

$$\tau(x) = -\frac{A_1 k_2 + A_3}{A_1 k_1 + A_2} (I_{0+}^{\frac{1}{2}} \nu_-(t))(x) + \frac{1}{A_1 k_1 + A_2} (I_{0+}^{-a-\frac{1-b}{4}, -b_1-\frac{1}{2}, a+b_1} \varphi_1(t))(x),$$

$$\tau(x) = \frac{B_1 k_4 - B_3}{B_1 k_3 + B_2} (I_{1-}^{\frac{1}{2}} \nu_+(t))(x) + \frac{1}{B_1 k_3 + B_2} (I_{1-}^{-a-\frac{1+b}{4}, -b_1-\frac{1}{2}, a+b_1} \varphi_2(t))(x),$$

откуда вытекает равенство

$$\gamma_1 (I_{0+}^{\frac{1}{2}} \nu(t))(x) + \gamma_2 (I_{1-}^{\frac{1}{2}} \nu(t))(x) = f_1(x), \quad (16)$$

где

$$\gamma_1 = -\frac{A_1 k_2 + A_3}{A_1 k_1 + A_2}, \quad \gamma_2 = \frac{B_3 - B_1 k_4}{B_1 k_3 + B_2}, \quad \nu(x) = \nu_-(x) = \nu_+(x),$$

$$f_1(x) = -\frac{1}{A_1 k_1 + A_2} (I_{0+}^{-a-\frac{1-b}{4}, -b_1-\frac{1}{2}, a+b_1} \varphi_1(t))(x) + \frac{1}{B_1 k_3 + B_2} (I_{1-}^{-a-\frac{1+b}{4}, -b_1-\frac{1}{2}, a+b_1} \varphi_2(t))(x).$$

Применяя к обеим частям (16) оператор $(D_{0+}^{\frac{1}{2}})$ и учитывая соотношения [4, с. 50–51]

$$D_{0+}^\alpha I_{0+}^\alpha f = f, \quad \alpha > 0,$$

$$D_{a+}^\alpha I_{b-}^\alpha \varphi = \cos(\pi\alpha) \varphi(x) + \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_a^b \left(\frac{\tau - a}{x - a}\right)^\alpha \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - x},$$

приходим к уравнению

$$\gamma_1 \nu(x) + \frac{\gamma_2}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\nu(t) dt}{t - x} = (D_{0+}^{\frac{1}{2}} f_1(t))(x). \quad (17)$$

Исследуем вопрос разрешимости интегрального уравнения (17). Произведем в (17) замену

$$\mu(x) = x^{\frac{1}{2}} \nu(x), \quad f(x) = x^{\frac{1}{2}} (D_{0+}^{\frac{1}{2}} f_1(t))(x),$$

получим характеристическое особое интегральное уравнение с ядром Коши [11]

$$\gamma_1 \mu(x) + \frac{\gamma_2}{\pi} \int_0^1 \frac{\mu(t) dt}{t-x} = f(x), \quad x \in I. \quad (18)$$

Для выяснения гладкости правой части $f(x)$ интегрального уравнения (18) нам потребуется две леммы из работы [12].

ЛЕММА 1. Пусть $0 < -\alpha < \lambda \leq 1$ и $\beta < \min[0, \eta + 1]$. Если $\varphi(x) \in H^\lambda[0, 1]$, то $(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} \varphi)(x), (I_{1-}^{\alpha, \beta, \eta} \varphi)(x) \in H^{\min[\alpha + \lambda, -\beta]}[0, 1]$.

ЛЕММА 2. Пусть $0 < -\alpha < \lambda \leq 1$ и $\eta > \beta - 1$. Если $\varphi(x) \in H^\lambda[0, 1]$, то $x^\beta (I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} \varphi)(x), (1-x)^\beta (I_{1-}^{\alpha, \beta, \eta} \varphi)(x) \in H^{\alpha + \lambda}[0, 1]$.

Так как

$$0 < a + \frac{b+1}{4} < \lambda \leq 1, \quad -b_1 - \frac{1}{2} < \min[0, 1 + a + b_1],$$

а $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in H^\lambda[0, 1]$, на основании леммы 1 $(I_{0+}^{-a - \frac{1-b}{4}, -b_1 - \frac{1}{2}, a+b_1} \varphi_1(t))(x), (I_{1-}^{-a - \frac{1-b}{4}, -b_1 - \frac{1}{2}, a+b_1} \varphi_2(t))(x) \in H^{\lambda_0}[0, 1]$, где

$$\lambda_0 = \min \left[\lambda - a - \frac{b+1}{4}, b_1 + \frac{1}{2} \right].$$

Следовательно, $f_1(x) \in H^{\lambda_0}[0, 1]$. В силу условий (6)

$$\lambda_0 = \lambda - a - \frac{b+1}{4}.$$

Далее, поскольку $1/2 < \lambda_0 < 1$, а

$$x^{\frac{1}{2}} (D_{0+}^{\frac{1}{2}} f_1)(x) = x^{\frac{1}{2}} (I_{0+}^{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \eta} f_1)(x),$$

используя лемму 2, имеем $f(x) = x^{\frac{1}{2}} (D_{0+}^{\frac{1}{2}} f_1)(x) \in H^{\lambda_1}[0, 1]$, где

$$\lambda_1 = \lambda - a - \frac{b-1}{4}.$$

Так как $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0$, уравнение (18) является уравнением нормального типа. Его индекс равен нулю в классе функций, которые при $x \rightarrow 0$ ограничены, а при $x \rightarrow 1$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы.

Используя известную теорию сингулярных интегральных уравнений (см., например, формулу (30.16) из [4, с. 444]), можно выписать единственное решение уравнения (10) в яном виде.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть

$$|b| < 1, \quad \frac{|b|-1}{4} < a < \frac{1-b}{4}, \quad a + \frac{b-1}{4} < b_1 < a + \frac{3+b}{4};$$

$A_i, B_i, i = 1, 2, 3$ — такие действительные константы, что выполняются условия (14), (15); функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ удовлетворяют условиям (7). Тогда задача (2)–(5) для уравнения (1) при $\nu(x) = x^{-\frac{1}{2}}\mu(x)$ имеет единственное решение.

ORCID

Анна Валерьевна Тарасенко: <http://orcid.org/0000-0002-0487-8262>

Ирина Петровна Егорова: <http://orcid.org/0000-0001-6023-1466>

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тарасенко А. В., Егорова И. П. О разрешимости нелокальной задачи с обобщенными операторами М. Сайго для уравнения Бицадзе–Лыкова / Четвертая международная конференция «Математическая физика и ее приложения»: материалы конф.; ред. чл.-корр. РАН И. В. Волович; д.ф.-м.н., проф. В. П. Радченко. Самара: СамГТУ, 2014. С. 345–346.
2. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 300 с.
3. Saigo M. A. A certain boundary value problem for the Euler–Poisson–Darboux equation // *Math. Japon.*, 1979. vol. 24, no. 4. pp. 377–385.
4. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
5. Репин О. А. Аналог задачи Нахушева для уравнения Бицадзе–Лыкова // *Диффер. уравн.*, 2002. Т. 38, № 10. С. 1412–1417.
6. Ефимова С. В., Репин О. А. Задача с нелокальными условиями на характеристиках для уравнения влагопереноса // *Диффер. уравн.*, 2004. Т. 40, № 10. С. 1419–1422.
7. Бицадзе А. В. *Некоторые классы уравнений в частных производных*. М.: Наука, 1981. 448 с.
8. Репин О. А. О разрешимости задачи с краевым условием на характеристиках для вырождающегося гиперболического уравнения // *Диффер. уравн.*, 1998. Т. 34, № 1. С. 110–113.
9. Agmon S., Nirenberg L., Protter M. N. A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type // *Comm. Pure Appl. Math.*, 1953. vol. 6, no. 4. pp. 455–470. doi: [10.1002/cpa.3160060402](https://doi.org/10.1002/cpa.3160060402).
10. Нахушев А. М. *Элементы дробного исчисления и их применение*. Нальчик: КБНЦ РАН, 2000. 299 с.
11. Гахов Ф. Д. *Краевые задачи*. М.: Наука, 1977. 640 с.
12. Saigo M. A., Kilbas A. A. Generalized fractional integrals and derivatives in Hölder spaces / *Transform Methods and Special Function*, Proc. Intern. Workshop; Sofia 12–17 August, 1994. Singapore: Science Culture Techn. Publ., 1995. pp. 282–293.

Поступила в редакцию 11/XI/2014;
в окончательном варианте — 09/XII/2014;
принята в печать — 11/XII/2014.

MSC: 35M12, 35M10

ON THE SOLVABILITY OF NONLOCAL PROBLEM WITH GENERALIZED OPERATORS M. SAIGO FOR BITSADZE–LYKOV EQUATION*

A. V. Tarasenko, I. P. Egorova

Samara State University of Architecture and Civil Engineering,
194, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443001, Russian Federation.

Abstract

A nonlocal boundary value problem for the equation of moisture transfer was studied in the field, which is the union of two characteristic triangles. The novelty of the formulation of the problem lies in the fact that the boundary conditions include operators of generalized of fractional integro-differentiation in the sense of M. Saigo. The uniqueness of the solution of the problem was proved using the extremum principle for hyperbolic equations. Properties of operators of generalized fractional integro-differentiation in the sense of M. Saigo were used in the proof. Existence of a solution is equivalent reduced to the solvability of a characteristic singular integral equation with Cauchy kernel for which the smoothness of the right-hand side was studied.

Keywords: boundary value problem, generalized operator of fractional integro-differentiation, integral equation with Cauchy kernel.

doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1363>

ORCID

Anna V. Tarasenko: <http://orcid.org/0000-0002-0487-8262>

Irina P. Egorova: <http://orcid.org/0000-0001-6023-1466>

REFERENCES

1. Tarasenko A. V., Egorova I. P. On the solvability of nonlocal problem with generalized operators M. Saigo for Bitsadze–Lykov equation, *The 4nd International Conference “Mathematical Physics and its Applications”*, Book of Abstracts and Conference Materials; eds. I. V. Volovich; V. P. Radchenko. Samara, Samara State Technical Univ., 2014, pp. 345–346 (In Russian).

© 2014 Samara State Technical University.

How to cite Reference

Tarasenko A. V., Egorova I. P. On the solvability of nonlocal problem with generalized operators M. Saigo for Bitsadze–Lykov equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 4 (37), pp. 33–41. doi: [10.14498/vsgtu1363](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1363). (In Russian)

Author Details

Anna V. Tarasenko (Cand. Phys. & Math. Sci.; tarasenko.a.v@mail.ru; ; Corresponding Author), Associate Professor, Dept. of Higher Mathematics.

Irina P. Egorova (Cand. Phys. & Math. Sci.; ira.egorova81@yandex.ru), Associate Professor, Dept. of Higher Mathematics.

*This paper is an extended version of the paper [1], presented at the Mathematical Physics and Its Applications 2014 Conference.

2. Nakhushev A. M. *Uravneniia matematicheskoi biologii* [Equations of mathematical biology]. Moscow, Vyssh. shk., 1995, 300 pp. (In Russian)
3. Saigo M. A. A certain boundary value problem for the Euler–Poisson–Darboux equation, *Math. Japon.*, 1979, vol. 24, no. 4, pp. 377–385.
4. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poriadka i nekotorye ikh prilozheniia* [Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications]. Minsk, Nauka i tekhnika, 1987, 688 pp. (In Russian)
5. Repin O. A. An analog of the Nakhushev problem for the Bitsadze–Lykov equation, *Differ. Equ.*, 2002, vol. 38, no. 10, pp. 1503–1509. doi: [10.1023/A:1022339217281](https://doi.org/10.1023/A:1022339217281).
6. Efimova S. V., Repin O. A. A problem with nonlocal conditions on characteristics for the moisture transfer equation, *Differ. Equ.*, 2004, vol. 40, no. 10, pp. 1498–1502. doi: [10.1007/s10625-005-0091-8](https://doi.org/10.1007/s10625-005-0091-8).
7. Bitsadze A. V. *Nekotorye klassy uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Some Classes of Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1981, 448 pp. (In Russian)
8. Repin O. A. Solvability of a problem with boundary conditions on characteristics for a degenerate hyperbolic equation, *Differ. Equ.*, 1998, vol. 34, no. 1, pp. 113–116.
9. Agmon S., Nirenberg L., Protter M. N. A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1953, vol. 6, no. 4, pp. 455–470. doi: [10.1002/cpa.3160060402](https://doi.org/10.1002/cpa.3160060402).
10. Nakhushev A. M. *Elementy drobnogo ischisleniia i ikh primenenie* [Elements of fractional calculus and their applications]. Nal'chik, Kabardino-Balkar Scientific Centre of RAS, 2000, 299 pp. (In Russian)
11. Gakhov F. D. *Kraevye zadachi* [Boundary value problems]. Moscow, Nauka, 1977, 640 pp. (In Russian)
12. Saigo M. A., Kilbas A. A. Generalized fractional integrals and derivatives in Hölder spaces, *Transform Methods and Special Function*, Proc. Intern. Workshop; Sofia 12–17 August, 1994. Singapore, Science Culture Techn. Publ., 1995, pp. 282–293.

Received 11/XI/2014;
received in revised form 09/XII/2014;
accepted 11/XII/2014.