



Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О КРУЧЕНИИ МНОГОСЛОЙНОГО ОСНОВАНИЯ С УПРУГИМИ СВЯЗЯМИ МЕЖДУ СЛОЯМИ

*Н. Н. Антоненко¹, И. Г. Величко²*¹ Запорожский национальный технический университет,
Украина, 69600, Запорожье, ул. Жуковского, 64.² Таврический государственный агротехнологический университет,
Украина, 72310, Мелитополь, пр. Б. Хмельницкого, 18.

Аннотация

Рассмотрено кручение многослойного основания с упругими связями между слоями цилиндрическим штампом с плоской подошвой. Для решения задачи использовано интегральное преобразование Ханкеля первого порядка и метод функций податливости, который ранее использовался для решения граничных задач для многослойных оснований с идеальным контактом между слоями. В каждом слое введены две вспомогательные функции, которые связаны с трансформантами касательных напряжений и перемещений точек верхней границы слоя. Компоненты напряжённо-деформированного состояния каждого слоя представлены в виде линейных комбинаций этих функций. Построены рекуррентные соотношения, которые связывают вспомогательные функции соседних слоёв основания. Введены функции податливости. Введена функция, связанная с неизвестными контактными напряжениями, относительно которой построено сингулярное интегральное уравнение задачи, ядро которого содержит интеграл Сонина—Вебера. Приближенное решение уравнения найдено методом механических квадратур. Для однослойного и двухслойного оснований проанализировано влияние коэффициентов упругих связей на распределение контактных напряжений. Выявлены следующие закономерности: наличие упругих связей между слоями основания приводит к уменьшению контактных напряжений по сравнению со случаем идеального контакта, однако этот эффект практически заметен только при относительно малой толщине верхнего слоя; уменьшение модуля сдвига хотя бы одного из слоёв двухслойного основания приводит к уменьшению контактных напряжений как при идеальном контакте, так и при наличии упругих связей между слоями основания.

© 2014 Самарский государственный технический университет.

Образец для цитирования: Антоненко Н. Н., Величко И. Г. Контактная задача о кручении многослойного основания с упругими связями между слоями // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 3 (36). С. 66–78. doi: [10.14498/vsgtu1319](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1319).

Сведения об авторах: *Нина Николаевна Антоненко* (к.ф.-м.н.; antonenkonina@i.ua; автор, ведущий переписку), старший преподаватель, каф. общей математики. *Игорь Георгиевич Величко* (к.ф.-м.н., доц.; wig64@mail.ru), доцент, каф. высшей математики и физики.

Ключевые слова: штамп, многослойное основание, упругие связи, осесимметричное кручение, функции податливости, интегральное преобразование Ханкеля.

doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1319>

Введение. Проектирование дорожных и аэродромных покрытий, слоистых полов промышленных зданий, гидротехнических сооружений, плотин, деталей машин связано с решением различных задач теории упругости для многослойных оснований, в том числе и контактных. В большинстве работ, посвященных исследованию напряжённо-деформированного состояния слоистых сред, рассматривается идеальный, или скользящий, контакт между слоями. В реальных конструкциях между слоями часто присутствует некий промежуточный слой, наличие которого необходимо учитывать при расчете напряжённо-деформированного состояния инженерных объектов. В данной статье в рамках модели деформируемого слоистого тела при наличии упругой прослойки, предложенной в [1], рассматривается контактная задача кручения многослойного основания с упругими связями между слоями. Будем говорить, что между двумя соседними слоями основания существуют упругие связи, если разности перемещений точек верхней границы нижнего слоя и нижней границы верхнего слоя пропорциональны соответствующим напряжениям в точках их общей границы. Первые работы, посвящённые контактными задачам кручения, были посвящены кручению изотропного однородного упругого полупространства [2, 3]. Существуют статьи, в которых исследовалось кручение неоднородного полупространства (трансверсально-изотропное, ортотропное, неоднородное по глубине полупространство) [4–12]. Кручению слоя посвящены работы [13, 14]. Случай кручения жёстким штампом двухслойной среды, состоящей из упругого слоя и упругого полупространства, изучен в [15]. Обзор работ до 1976 года, посвященных кручению слоистых сред, приведён в [16]. Кручение многослойного основания рассматривалось в статьях [17, 18]. Кручению упругого полупространства с многослойным покрытием периодической структуры посвящена работа [19]. В [20] рассмотрено кручение круглым штампом трансверсально-изотропного упругого полупространства с неоднородным трансверсально-изотропным покрытием. Во всех указанных выше работах предполагалось, что контакт между слоями слоистой среды полный. В [21] были предложены две упрощённые модели трёхслойных оснований с тонким средним слоем, которые можно также рассматривать как модели двухслойных оснований с неидеальной механической связью между слоями. Неидеальность математически выражалась тем, что вместо условий совпадения напряжений и перемещений на плоскости контакта слоёв ставились некоторые дифференциальные условия связи между напряжениями и перемещениями. Контактная задача кручения многослойного основания с упругими связями между слоями рассматривается впервые.

1. Постановка задачи. Под многослойным основанием будем понимать пакет упругих слоёв, лежащих на полупространстве. Контакт между слоями — упругий. Материал слоёв однородный и изотропный. Каждый слой характеризуется толщиной h и модулем сдвига μ . С основанием сцеплен штамп цилиндрической формы радиуса R с плоской подошвой. Штамп поворачивается на угол ψ относительно своей оси. Необходимо определить напряжения

и перемещения в слоях основания. Нумерацию слоёв будем проводить сверху вниз, начиная с единицы. Все величины, которые относятся к k -тому слою, будем обозначать нижним индексом k . В каждом слое введём локальную цилиндрическую систему координат с осями Oz_k , которые лежат на одной прямой и направлены вглубь слоёв (рис. 1).

Граничные условия на верхней границе основания:

$$\begin{aligned} u_{\varphi 1}(\rho, 0) &= \rho\psi, & \rho < R, \\ \tau_{\varphi 1}(\rho, 0) &= 0, & \rho > R. \end{aligned} \quad (1)$$

Условия сопряжения слоёв:

$$u_{\varphi k+1}(\rho, 0) = u_{\varphi k}(\rho, h_k) + m_k \tau_{\varphi z k}(\rho, h_k), \quad \tau_{\varphi z k+1}(\rho, 0) = \tau_{\varphi z k}(\rho, h_k),$$

где $m_k \geq 0$ — коэффициенты упругих связей. Отметим, что если $m_k = 0$, то мы получим условия сопряжения слоёв для основания с идеальным контактом между слоями. Задача об определении напряжённо-деформированного состояния изотропного слоя, который скручивается касательными усилиями, приложенными к граничным плоскостям $z = 0$ и $z = h$ и зависящими лишь от радиальной координаты ρ , сводится к решению следующего дифференциального уравнения [22]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{u}{\rho^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

где $u(\rho, z) = u_{\varphi}(\rho, z)$.

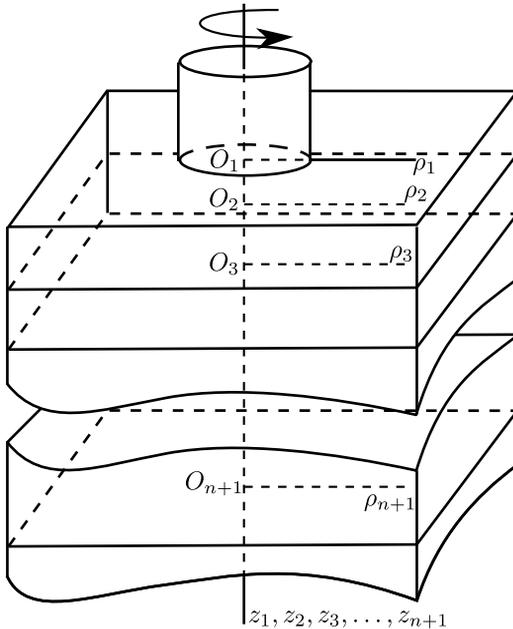


Рис. 1. Схема скручивания штампом многослойного основания и локальные цилиндрические координаты

Ненулевые компоненты напряжённо-деформированного состояния связаны с функцией $u(\rho, z)$ соотношениями

$$\tau_{\varphi\rho} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{u}{\rho} \right), \quad \tau_{\varphi z} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}.$$

2. Метод решения. Для решения задачи воспользуемся интегральным преобразованием Ханкеля первого порядка:

$$\bar{f}(p) = \int_0^{+\infty} \rho f(\rho) J_1(p\rho) d\rho, \quad f(\rho) = \int_0^{+\infty} p \bar{f}(p) J_1(p\rho) dp,$$

где p — параметр интегрального преобразования.

Рассмотрим слой с номером k . Как показано в [18], в пространстве трансформант напряжения и перемещения в слое можно представить в виде линейных комбинаций двух вспомогательных функций $\gamma_k(p)$ и $\delta_k(p)$, связанных с напряжениями и перемещениями на верхней границе слоя следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \bar{u}_k(p, z) &= \frac{1}{\mu_k} (\gamma_k \operatorname{ch} pz + \delta_k \operatorname{sh} pz), \\ \bar{\tau}_{\varphi zk}(p, z) &= p (\gamma_k \operatorname{sh} pz + \delta_k \operatorname{ch} pz), \end{aligned}$$

где

$$\gamma_k = \mu_k \bar{u}_k(p, 0), \quad \delta_k = \frac{1}{p} \bar{\tau}_{\varphi zk}(p, 0). \quad (4)$$

Таким образом, для решения задачи необходимо знать по две вспомогательные функции для каждого из слоёв основания. Следовательно, задача об определении напряжённо-деформированного состояния n -слойного основания сводится к нахождению $2n$ вспомогательных функций. Построим рекуррентные соотношения, которые связывают вспомогательные функции k -того и $k+1$ -го слоёв. Запишем условия сопряжения слоёв в пространстве трансформант Ханкеля:

$$\bar{u}_{\varphi k+1}(p, 0) = \bar{u}_{\varphi k}(p, h_k) + m_k \bar{\tau}_{\varphi zk}(p, h_k), \quad \bar{\tau}_{\varphi zk+1}(p, 0) = \bar{\tau}_{\varphi zk}(p, h_k).$$

С учётом (2)–(4) последние соотношения можно представить в виде

$$\begin{aligned} \gamma_{k+1} &= \left(\frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} C_k + \mu_{k+1} m_k p S_k \right) \gamma_k + \left(\frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} S_k + \mu_{k+1} m_k p C_k \right) \delta_k, \\ \delta_{k+1} &= S_k \gamma_k + C_k \delta_k, \end{aligned} \quad (5)$$

где $C_k = \operatorname{ch} p_k$, $S_k = \operatorname{sh} p_k$, $p_k = p h_k$.

Из граничных условий можно определить одну вспомогательную функцию δ_1 , и тогда задача сведётся к нахождению γ_1 . Остальные вспомогательные функции можно найти по рекуррентным формулам (5).

Можно доказать, что как и в случае идеального контакта слоёв основания, вспомогательные функции слоя линейно зависимы и связаны следующим соотношением [18]:

$$\gamma_k = -A_k \delta_k, \quad (6)$$

где A_k — функции податливости многослойного основания.

Построим рекуррентные соотношения, которые связывают функции податливости соседних слоёв. Вычислим γ_{k+1} двумя способами. С одной стороны,

$$\gamma_{k+1} = -A_{k+1}\delta_{k+1} = -A_{k+1}(S_k\gamma_k + C_k\delta_k) = A_{k+1}(S_kA_k - k)\delta_k. \quad (7)$$

С другой стороны,

$$\gamma_{k+1} = \left[-A_k \left(\frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} C_k + \mu_{k+1} m_k p S_k \right) + \left(\frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} S_k + \mu_{k+1} m_k p C_k \right) \right] \delta_k. \quad (8)$$

Из соотношений (7) и (8) находятся рекуррентные соотношения, которые связывают функции податливости соседних слоёв основания:

$$A_k = \frac{A_{k+1}C_k + \frac{\mu_{k+1}}{\mu_k}S_k + \mu_{k+1}m_k p C_k}{A_{k+1}S_k + \frac{\mu_{k+1}}{\mu_k}C_k + \mu_{k+1}m_k p S_k} = \frac{T_k + \frac{\mu_k}{\mu_{k+1}}A_{k+1} + \mu_k m_k p}{1 + \frac{\mu_k}{\mu_{k+1}}A_{k+1}T_k + \mu_k m_k p T_k}, \quad (9)$$

где $T_k = \text{th } p_k$.

Отметим, что при $m_k = 0$ мы получаем формулы, которые совпадают с известными для задачи о кручении многослойного основания с идеальным контактом между слоями [18]. Методом математической индукции можно доказать, что функции податливости обладают свойством

$$\lim_{p \rightarrow \infty} A_k(p) = 1. \quad (10)$$

Для начала расчёта функций податливости необходимо знать функции податливости полупространства. Если полупространство абсолютно жёсткое, то перемещения на его верхней границе отсутствуют, следовательно, $\gamma_{n+1} = 0$. Поэтому его функция податливости равна нулю — $A_{n+1} = 0$. Для определения функции податливости упругого полупространства рассмотрим слой, лежащий на абсолютно жёстком полупространстве. Устремив толщину слоя к бесконечности, получим, что функция податливости упругого полупространства $A_{n+1} = 1$. Таким образом, определив матрицы податливости по формулам (9), можно найти вспомогательные функции слоёв по формулам (5), которые с учётом соотношений (9) представляются в такой форме:

$$\delta_{k+1} = S_k\gamma_k + C_k\delta_k = (C_k - S_kA_k)\delta_k.$$

Функции γ_k находятся из соотношений (6).

3. Вывод интегрального уравнения задачи. Введём неизвестную функцию $\tau(\rho)$, связанную с напряжениями на верхней границе основания соотношением

$$\tau(\rho) = \tau_{\varphi z1}(\rho, 0), \quad \rho < R.$$

Выразим вспомогательные функции γ_1 и δ_1 через новую функцию $\tau(\rho)$:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{1}{p} \bar{\tau}_{\varphi z1}(\rho, 0) = \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} \rho \tau_{\varphi z1}(\rho, 0) J_1(p\rho) d\rho = \frac{1}{p} \int_0^R \rho \tau(\rho) J_1(p\rho) d\rho, \\ \gamma_1 &= \mu_1 \bar{u}_1(p, 0) = -A_1(p) \delta_1 = -A_1(p) \frac{1}{p} \int_0^R \rho \tau(\rho) J_1(p\rho) d\rho. \end{aligned} \quad (11)$$

Применяя к соотношениям (11) обратное преобразование Ханкеля, запишем перемещения точек верхней границы основания $u_1(\rho, 0)$:

$$\begin{aligned} \mu_1 u_1(\rho, 0) &= \mu_1 \int_0^{+\infty} p \bar{u}_1(p, 0) J_1(p\rho) dp = \\ &= - \int_0^R s \tau(s) \left(\int_0^{+\infty} A_1(p) J_1(ps) J_1(p\rho) dp \right) ds. \end{aligned}$$

Воспользовавшись свойством (10), перепишем последнее равенство в форме

$$\begin{aligned} \mu_1 u_1(\rho, 0) &= - \int_0^R s \tau(s) \left(\int_0^{+\infty} J_1(ps) J_1(p\rho) dp + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{+\infty} a_1(p) J_1(ps) J_1(p\rho) dp \right) ds, \quad (12) \end{aligned}$$

где $a_1(p) = A_1(p) - 1$.

Из соотношения (12) с учётом граничного условия (1) получаем интегральное уравнение

$$\int_0^R s \tau(s) (W_{11}^0(\rho, s) + K(\rho, s)) ds = -\mu_1 \rho \psi, \quad \rho < R,$$

где $W_{11}^0(\rho, s) = \int_0^{+\infty} J_1(ps) J_1(p\rho) dp$ — интеграл Вебера—Сони́на,

$$K(\rho, s) = \int_0^{+\infty} a_1(p) J_1(ps) J_1(p\rho) dp.$$

По аналогии с [18] неизвестные контактные напряжения будем искать в виде

$$\tau(s) = \frac{f(s)}{\sqrt{R^2 - s^2}}. \quad (13)$$

С учётом соотношения (13) интегральное уравнение задачи принимает вид

$$\int_0^R s \frac{f(s)}{\sqrt{R^2 - s^2}} (W_{11}^0(\rho, s) + K(\rho, s)) ds = -\mu_1 \rho \psi, \quad \rho < R. \quad (14)$$

Введём новые переменные $t = s/R$, $r = \rho/R$ и перепишем интегральное уравнение (14) в них:

$$\int_0^1 t \frac{g(t)}{\sqrt{1 - t^2}} (W_{11}^0(r, t) + M(r, t)) dt = -\mu_1 r \psi, \quad r < 1, \quad (15)$$

где $g(t) = f(Rt)$, $M(r, t) = K(Rr, Rt)$, $W_{11}^0(\rho, s) = W_{11}^0(r, t)/R$.

Решение полученного интегрального уравнения найдём методом механических квадратур, предложенным для уравнений с сингулярностью такого

типа в [18]. Квадратурную формулу для интеграла с ядром Сонина–Вебера будем искать в виде

$$\int_0^1 t \frac{g(t)}{\sqrt{1-t^2}} W_{11}^0(r, t) dt \approx \sum_{k=1}^n B_k(r) g(t_k), \quad (16)$$

где $B_k(r)$ — неизвестные полиномы, $g(t_k)$ — значения неизвестной функции в узлах t_k .

В последнюю формулу вместо $g(t)$ подставим выражение $tC_{2m}^{3/2}(\sqrt{1-t^2})$, $m = 0, \dots, n-1$, и потребуем, чтобы приближенное равенство выполнялось точно:

$$\int_0^1 \frac{t^2 C_{2m}^{3/2}(\sqrt{1-t^2})}{\sqrt{1-t^2}} W_{11}^0(r, t) dt = \sum_{k=1}^n B_k(r) t_k C_{2m}^{3/2}(\sqrt{1-t_k^2}).$$

Левую часть можно выразить, используя спектральные соотношения [23]:

$$\int_0^1 \frac{t^2 C_{2m}^{3/2}(\sqrt{1-t^2})}{\sqrt{1-t^2}} W_{11}^0(r, t) dt = \frac{\Gamma(m+3/2)\Gamma(m+1/2)rC_{2m}^{3/2}(\sqrt{1-r^2})}{2m!(m+1)!}.$$

С учётом этого получим

$$\sum_{k=1}^n B_k(r) a_{km} = b_m r C_{2m}^{3/2}(\sqrt{1-r^2}), \quad m = 0, \dots, n-1.$$

где

$$b_m = \frac{\Gamma(m+3/2)\Gamma(m+1/2)}{2m!(m+1)!}, \quad a_{km} = t_k C_{2m}^{3/2}(\sqrt{1-t_k^2}).$$

Задавшись узлами r_m и решая последнюю систему, можно найти значения $b_{km} = B_k(r_m)$. Узлы r_m выбираются таким образом, чтобы круг единичного радиуса разбивался на круг и $n-1$ кольцо одинаковой площади. Значения радиусов колец как раз и будут значениями узлов r_m . Второе слагаемое в уравнении (15) заменим квадратурной суммой [18]:

$$\int_0^1 t \frac{g(t)}{\sqrt{1-t^2}} M(r, t) dt = \sum_{k=1}^n L_k M(r_k, t_k) g(t_k), \quad (17)$$

где $L_k = A_k t_k / \sqrt{1+t_k}$, $t_k = 1 - \xi_k^2$, ξ_k — k -тый положительный корень функции $P_{2n}(\xi)$ — полинома Лежандра порядка $2n$; $A_k = 2W_k$, W_k — соответствующие весовые коэффициенты квадратурной формулы Гаусса для промежутка $(-1; 1)$.

Заменяя интегралы, входящие в интегральное уравнение (15), квадратурными суммами (16) и (17), получим уравнение

$$\sum_{k=1}^n u(t_k) (b_{km} + L_k M(r_m, t_k)) = -\mu_1 r_m \psi, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

Подставляя в это уравнение вместо r_m последовательно r_1, r_2, \dots, r_{n-1} , получим систему n линейных алгебраических уравнений относительно $u(t_k)$. Решая эту систему, находим приближённые значения $u(t_k)$ в узлах t_k и затем восстанавливаем искомую функцию. В данной статье расчеты проводились при $n = 6$. Значения r_m и b_{km} приведены в [таблице](#).

Значения узлов r_m и коэффициентов b_{km}

m	r_m	b_{1m}	b_{2m}	b_{3m}
1	0.408282905	0.07871769135	0.08831555335	0.1199919645
2	0.5773502692	0.1211066268	0.1406298922	0.2345741553
3	0.7071067812	0.1632872325	0.2166388620	0.3175338764
4	0.8164965809	0.2189075481	0.3290180214	0.2258865716
5	0.9128709292	0.3288871893	0.3941552124	-0.004445110887
6	1	0.5893192067	0.1202303455	0.2302120555

m	r_m	b_{4m}	b_{5m}	b_{6m}
1	0.408282905	0.2193035489	-0.0602368187	0.270190969
2	0.5773502692	0.1838930058	-0.2309637440	0.7186193170
3	0.7071067812	-0.1044529281	0.6444752628	-2.075093388
4	0.8164965809	-0.1120803940	0.5971786813	-1.917236996
5	0.9128709292	0.3552528030	-1.469141755	4.895390232
6	1	-0.4463055204	2.178142046	-7.262260271

4. Результаты численных расчётов. Численные расчёты проводились для

контактных задач о кручении штампом радиуса R следующих оснований:

- 1) упругий слой, упруго сцепленный с полупространством; упругие характеристики слоя и полупространства одинаковые ($\mu_1 = \mu_2$); результаты расчётов представлены на рис. 2;
- 2) двухслойный пакет, упруго сцепленный с полупространством; характеристики основания: $h_1 = h_2 = R, \mu_1 = \mu_3, \mu_2 = 0.1\mu_1$ (рис. 3, а);
- 3) двухслойный пакет, упруго сцепленный с полупространством; характеристики основания: $h_1 = h_2 = R, \mu_1 = \mu_3, \mu_2 = 10\mu_1$ (рис. 3, б).

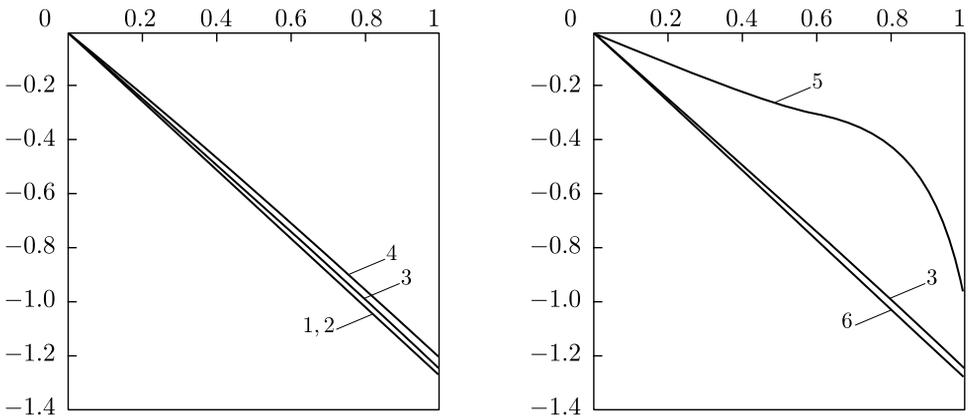


Рис. 2. Графики функции (18) для однослойного основания в зависимости от коэффициентов упругих связей: 1 - $m_1\mu_1/R = 0, h_1/R = 1$; 2 - $m_1\mu_1/R = 0.1, h_1/R = 1$; 3 - $m_1\mu_1/R = 1, h_1/R = 1$; 4 - $m_1\mu_1/R = 10, h_1/R = 1$; 5 - $m_1\mu_1/R = 1, h_1/R = 0.1$; 6 - $m_1\mu_1/R = 1, h_1/R = 10$

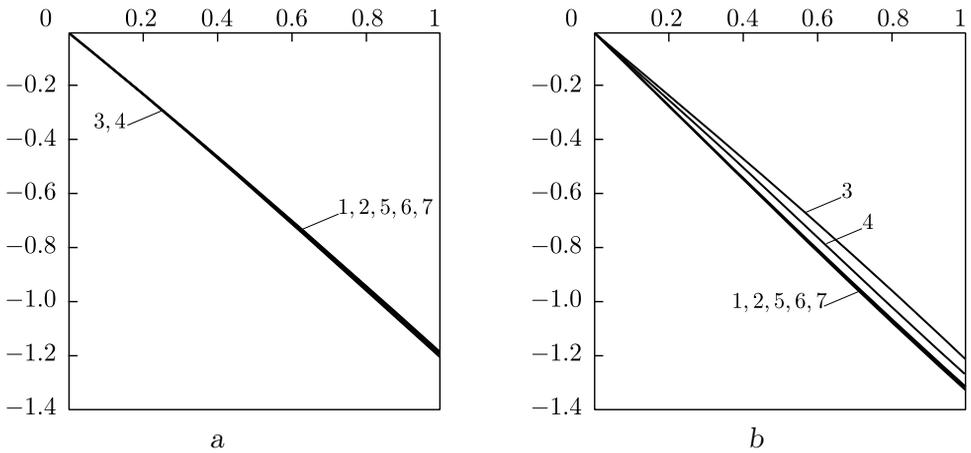


Рис. 3. Графики функции (18) для двухслойного основания в зависимости от коэффициентов упругих связей: 1 — $m_1\mu_1/R = 0$, $m_2\mu_1/R = 0$; 2 — $m_1\mu_1/R = 0.1$, $m_2\mu_1/R = 0$; 3 — $m_1\mu_1/R = 1$, $m_2\mu_1/R = 0$; 4 — $m_1\mu_1/R = 10$, $m_2\mu_1/R = 0$; 5 — $m_1\mu_1/R = 0$, $m_2\mu_1/R = 0.1$; 6 — $m_1\mu_1/R = 0$, $m_2\mu_1/R = 1$; 7 — $m_1\mu_1/R = 0$, $m_2\mu_1/R = 10$

На рис. 2 и 3 в качестве результатов расчётов приведены графики функции

$$f(\rho/R) = \frac{\tau_{\varphi z1}(\rho/R, 0)\sqrt{R^2 - \rho^2}}{\mu_1\psi R} \quad (18)$$

при соответствующих значениях параметров.

Анализ рис. 2 (графиков функции (18)) позволяет сделать такие выводы: наличие упругих связей приводит к уменьшению контактных напряжений по сравнению со случаем идеального контакта слоя и полупространства; увеличение коэффициентов упругих связей или увеличение толщины слоя — к уменьшению контактных напряжений. Из анализа графиков, приведенных на рис. 3, заключаем, что наличие упругих связей между нижним слоем двухслойного основания и полупространством менее существенно влияет на распределение контактных напряжений по сравнению с упругими связями на границе слоев. Наличие упругих связей, как и для случая однослойного основания, вызывает уменьшение контактных напряжений по сравнению со случаем идеального контакта слоев, причем влияние связей более существенно для случая, когда модуль сдвига верхнего слоя основания меньше модуля сдвига второго слоя.

Выводы. В статье предложен способ решения контактной задачи о кручении многослойного основания с упругими связями между слоями. Из результатов численного анализа следует, что в любом случае наличие упругих связей приводит к уменьшению контактных напряжений по сравнению со случаем идеального контакта. Однако этот эффект практически заметен только при относительно малой толщине верхнего слоя. В трехслойной конструкции, в которой верхний слой и полупространство имеют одинаковые модули сдвига, эффект от наличия упругих связей существенен только в том случае, когда модуль сдвига среднего слоя существенно превосходит модули сдвига внешних слоев.

ORCID

Nina Antonenko: <http://orcid.org/0000-0002-0427-6499>

Igor Velichko: <http://orcid.org/0000-0003-1249-774X>

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Jones J. P., Whitter J. S. Waves at a Flexibly Bonded Interface // *J. Appl. Mech.*, 1967. vol. 4, no. 34. pp. 905–909. doi: [10.1115/1.3607854](https://doi.org/10.1115/1.3607854).
2. Reissner E., Sagoci H. F. Forced Torsional Oscillations of an Elastic Half-Space. I // *J. Appl. Phys.*, 1944. vol. 15, no. 9. pp. 652–654. doi: [10.1063/1.1707489](https://doi.org/10.1063/1.1707489).
3. Борадачев Н. М., Борадачева Ф. Н. Кручение упругого полупространства, вызванное поворотом кольцевого штампа // *Инж. журн. МТТ*, 1966. № 1. С. 94–99.
4. Shibuya T. A Mixed Boundary Value Problem of an Elastic Half-Space under Torsion by a Flat Annular Rigid Stamp // *Bulletin of JSME*, 1976. vol. 19, no. 129. pp. 233–238. doi: [10.1299/jsme1958.19.233](https://doi.org/10.1299/jsme1958.19.233).
5. Dhawan G. K. A mixed boundary value problem of a transversely-isotropic half-space under torsion by a flat annular rigid stamp // *Acta Mechanica*, 1981. vol. 41, no. 3–4. pp. 289–297. doi: [10.1007/bf01177354](https://doi.org/10.1007/bf01177354).
6. Puro A. É. Solution of the axisymmetric problem of the torsion of an inhomogeneous layer // *Soviet Applied Mechanics*, 1982. vol. 18, no. 12. pp. 1071–1075. doi: [10.1007/bf00882216](https://doi.org/10.1007/bf00882216).
7. Selvadurai P. S., Singh B. M., Vrbik J. A Reissner–Sagoci problem for a non-homogeneous elastic solid // *Journal of Elasticity*, 1986. vol. 16, no. 4. pp. 383–391. doi: [10.1007/bf00041763](https://doi.org/10.1007/bf00041763).
8. Tie-Jun L., Yue-Sheng W. Reissner–Sagoci problem for functionally graded materials with arbitrary spatial variation of material properties // *Mechanics Research Communications*, 2009. vol. 36, no. 3. pp. 322–329. doi: [10.1016/j.mechrescom.2008.10.002](https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2008.10.002).
9. Васильев А. С., Айзикович С. М. Математическое моделирование задачи о кручении жестким круглым штампом функционально-градиентного композитного материала // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2010. № 2. С. 33–41.
10. Rahman M. The Reissner–Sagoci problem for a half-space under buried torsional forces // *Int. J. Solids Struct.*, 2000. vol. 37, no. 8. pp. 1119–1132. doi: [10.1016/s0020-7683\(98\)00277-7](https://doi.org/10.1016/s0020-7683(98)00277-7).
11. Rahimian M., Ghorbani-Tanha A. K., Eskandari-Ghadi M. The Reissner–Sagoci problem for a transversely isotropic half-space // *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 2006. vol. 30, no. 11. pp. 1063–1074. doi: [10.1002/nag.512](https://doi.org/10.1002/nag.512) ; erratum. doi: [10.1002/nag.2239](https://doi.org/10.1002/nag.2239).
12. Brzoza A., Pauk V. Torsion of rough elastic half-space by rigid punch // *Arch. Appl. Mech.*, 2008. vol. 78, no. 7. pp. 531–542. doi: [10.1007/s00419-007-0176-3](https://doi.org/10.1007/s00419-007-0176-3).
13. Наумов Ю. А., Чистяк В. И. Кручение упругого неоднородного слоя штампом / *Устойчивость и прочность элементов конструкций*. Днепропетровск: ДГУ, 1973. С. 12–21.
14. Dashchenko A. F., Kolybikhin Yu. D. Torsion of an orthotropic nonhomogeneous layer by two punches // *Soviet Applied Mechanics*, 1976. vol. 12, no. 3. pp. 269–274. doi: [10.1007/bf00884971](https://doi.org/10.1007/bf00884971).
15. Грилицкий Д. В. Кручение двухслойной упругой среды // *Прикл. механика*, 1961. Т. 7, № 1. С. 37–42.
16. *Развитие теории контактных задач в СССР* / ред. Л. А. Галин. М.: Наука, 1976. 495 с.
17. Петришин В. И. Кручение кольцевым штампом многослойного основания / *Устойчивость и прочность элементов конструкций*. Днепропетровск: ДГУ, 1988. С. 96–99.
18. Величко И. Г., Стеганцев Е. В. Контактная задача кручения многослойного основания // *Вісник Дніпропетровського державного університету*, 2004. № 2. С. 146–154.
19. Васильев А. С., Садырин Е. В., Васильева М. Е. Кручение упругого полупространства с многослойным покрытием периодической структуры // *Вестник Донского государственного технического университета*, 2013. Т. 13, № 5–6 (74). С. 6–13. doi: [10.12737/1275](https://doi.org/10.12737/1275).

20. Васильев А. С., Садырин Е. В., Федотов И. А. Контактная задача о кручении круглым штампом трансверсально-изотропного упругого полупространства с неоднородным трансверсально-изотропным покрытием // *Вестник Донского государственного технического университета*, 2013. № 1–2 (70–71). С. 25–34.
21. Александров В. М., Клиндухов В. В. Контактная задача для двухслойного основания с неидеальной механической связью между слоями // *Изв. РАН. МТТ*, 2000. № 3. С. 84–92.
22. Эйшинский А. М. *Кручение анизотропных и неоднородных тел*. Днепропетровск: Полиграфист, 1999. 389 с.
23. Попов Г. Я. *Контактные задачи для линейно-деформируемого основания*. Киев: Выща школа, 1962. 168 с.

Поступила в редакцию 24/IV/2014;
в окончательном варианте — 22/V/2014;
принята в печать — 27/VIII/2014.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki. 2014. Issue 3 (36). Pp. 66–78
J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci. 2014. Issue 3 (36). Pp. 66–78]

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print)

doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1319>

MSC: 74B05, 74K20, 74M15

CONTACT PROBLEM OF TORSION OF A MULTILAYER BASE WITH ELASTIC CONNECTIONS BETWEEN LAYERS

*N. N. Antonenko*¹, *I. G. Velichko*²

¹ Zaporizhzhya National Technical University, 64, Zhukovskogo st., Zaporizhzhya, 69600, Ukraine.

² Tavria State Agrotechnological University, 18, pr. B. Khmel'nitskii, Melitopol, 72310, Ukraine.

Abstract

Torsion of a multilayer base with elastic connections between layers by cylindrical punch with a flat sole was considered. The Hankel integral transform of the first order and the method of the compliance functions were used. Two auxiliary functions connected with transformants of tangential stresses and displacements points of the upper boundary of the layer were introduced for each layer. The components of the stress-strain state were represented as a linear combination of these functions. The recurrent formulas binding auxiliary functions of neighboring layers were built based on conditions of joint deformation of neighboring layers. The compliance functions were introduced. The recurrent formulas binding the compliance functions of neighboring layers were built. The problem was resolved into the integral equation. The kernel of the integral equation contains Sonine-Weber

© 2014 Samara State Technical University.

How to cite Reference: Antonenko N. N., Velichko I. G. Contact Problem of Torsion of a Multilayer Base with Elastic Connections between Layers, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 3 (36), pp. 66–78. doi: [10.14498/vsgtu1319](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1319). (In Russian)

Authors Details: *Nina N. Antonenko* (Cand. Phys. & Math. Sci.; antonenkonina@i.ua; Corresponding Author), Associate Professor, Dept. of General Mathematics. *Igor G. Velichko* (Cand. Phys. & Math. Sci.; wig64@mail.ru), Associate Professor, Dept. of Higher Mathematics and Physics.

integral. The approximate solution of equation was found by the method of mechanical quadratures. Mechanical effects for one-layer and two-layer bases were obtained. Elastic connections between the layers of base led to a reduction of contact stresses in comparison with the case of full contact. Decrease of the shear modulus of one of the layers of a two-layer base was reduced to decrease of the contact stresses, as in the cause of ideal contact and when elastic connections are between the layers of the base.

Keywords: punch, multilayer base, elastic connections, axisymmetric torsion, compliance functions, Hankel integral transform.

doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1319>

ORCID

Nina Antonenko: <http://orcid.org/0000-0002-0427-6499>

Igor Velichko: <http://orcid.org/0000-0003-1249-774X>

REFERENCES

1. Jones J. P., Whitter J. S. Waves at a Flexibly Bonded Interface, *J. Appl. Mech.*, 1967, vol. 4, no. 34, pp. 905–909. doi: [10.1115/1.3607854](https://doi.org/10.1115/1.3607854).
2. Reissner E., Sagoci H. F. Forced Torsional Oscillations of an Elastic Half-Space. I, *J. Appl. Phys.*, 1944, vol. 15, no. 9, pp. 652–654. doi: [10.1063/1.1707489](https://doi.org/10.1063/1.1707489).
3. Borodachev N. M. Boradacheva F. N. Torsion of an elastic half-space caused by the rotation of a ring-shaped punch, *Inzh. Zhurn. Mekh. Tverd. Tela*, 1966, no. 1, pp. 94–99 (In Russian).
4. Shibuya T. A Mixed Boundary Value Problem of an Elastic Half-Space under Torsion by a Flat Annular Rigid Stamp, *Bulletin of JSME*, 1976, vol. 19, no. 129, pp. 233–238. doi: [10.1299/jsme1958.19.233](https://doi.org/10.1299/jsme1958.19.233).
5. Dhawan G. K. A mixed boundary value problem of a transversely-isotropic half-space under torsion by a flat annular rigid stamp, *Acta Mechanica*, 1981, vol. 41, no. 3–4, pp. 289–297. doi: [10.1007/bf01177354](https://doi.org/10.1007/bf01177354).
6. Puro A. É. Solution of the axisymmetric problem of the torsion of an inhomogeneous layer, *Soviet Applied Mechanics*, 1982, vol. 18, no. 12, pp. 1071–1075. doi: [10.1007/bf00882216](https://doi.org/10.1007/bf00882216).
7. Selvadurai P. S., Singh B. M., Vrbik J. A Reissner–Sagoci problem for a non-homogeneous elastic solid, *Journal of Elasticity*, 1986, vol. 16, no. 4, pp. 383–391. doi: [10.1007/bf00041763](https://doi.org/10.1007/bf00041763).
8. Tie-Jun L., Yue-Sheng W. Reissner–Sagoci problem for functionally graded materials with arbitrary spatial variation of material properties, *Mechanics Research Communications*, 2009, vol. 36, no. 3, pp. 322–329. doi: [10.1016/j.mechrescom.2008.10.002](https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2008.10.002).
9. Vasil'ev A. S., Aizikovich S. M. Mathematical modeling of the problem of torsion of a functionally graded composite material by rigid punch, *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva*, 2010, no. 2, pp. 33–41 (In Russian).
10. Rahman M. The Reissner–Sagoci problem for a half-space under buried torsional forces, *Int. J. Solids Struct.*, 2000, vol. 37, no. 8, pp. 1119–1132. doi: [10.1016/s0020-7683\(98\)00277-7](https://doi.org/10.1016/s0020-7683(98)00277-7).
11. Rahimian M., Ghorbani-Tanha A. K., Eskandari-Ghadi M. The Reissner–Sagoci problem for a transversely isotropic half-space, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 2006, vol. 30, no. 11, pp. 1063–1074. doi: [10.1002/nag.512](https://doi.org/10.1002/nag.512) ; erratum. doi: [10.1002/nag.2239](https://doi.org/10.1002/nag.2239).
12. Brzoza A., Pauk V. Torsion of rough elastic half-space by rigid punch, *Arch. Appl. Mech.*, 2008, vol. 78, no. 7, pp. 531–542. doi: [10.1007/s00419-007-0176-3](https://doi.org/10.1007/s00419-007-0176-3).
13. Naumov Iu. A., Chistiak V. I. Torsion of an elastic inhomogeneous layer by a punch, *Ustoichivost' i prochnost' elementov konstruktsii* [Stability and strength of structural elements]. Dnepropetrovsk, Dnepropetrovsk State Univ., 1973, pp. 12–21 (In Russian).
14. Dashchenko A. F., Kolybikhin Yu. D. Torsion of an orthotropic nonhomogeneous layer by two punches, *Soviet Applied Mechanics*, 1976, vol. 12, no. 3, pp. 269–274. doi: [10.1007/bf00884971](https://doi.org/10.1007/bf00884971).

15. Grilitskii D. V. Torsion of a two-layer elastic medium, *Prikl. Mekh.*, 1961, vol. 7, no. 1, pp. 37–42 (In Russian).
16. *Razvitie teorii kontaktnykh zadach v SSSR* [Development of the Theory of Contact Problems in the USSR], eds. L. A. Galin. Moscow, Nauka, 1976, 495 pp. (In Russian)
17. Petrishin V. I. Torsion of a multilayer base by a ring-shaped punch, *Ustoichivost' i prochnost' elementov konstruktzii* [Stability and strength of structural elements]. Dnepropetrovsk, Dnepropetrovsk State Univ., 1988, pp. 96–99 (In Russian).
18. Velichko I. G., Stegantsev E. V. Contact problem on the torsion of a multilayer base, *Visnik Dnipropetrovs'ko derzhavnogo universitetu*, 2004, no. 2, pp. 146–154 (In Russian).
19. Vasil'ev A. S., Sadyrin E. V., Vasil'eva M. E. Torsion of an elastic half-space with multilayered coating of periodic structure, *Vestnik Donskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2013, vol. 13, no. 5–6 (74), pp. 6–13 (In Russian). doi: [10.12737/1275](https://doi.org/10.12737/1275).
20. Vasil'ev A. S., Sadyrin E. V., Fedotov I. A. Contact problem of the torsion of a transversely isotropic elastic half-space with an inhomogeneous transversely isotropic coating by a ring-shaped punch, *Vestnik Donskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2013, no. 1–2 (70–71), pp. 25–34 (In Russian).
21. Aleksandrov V. M., Klindukhov V. V. Contact problem for a two-layer base with non-ideal mechanical coupling between the layers, *Izv. RAN. MTT*, 2000, no. 3, pp. 84–92 (In Russian).
22. Éishinskii A. M. *Kruchenie anizotropnykh i neodnorodnykh tel* [Torsion of Anisotropic and Inhomogeneous Bodies]. Dnepropetrovsk, Poligrafist, 1999, 389 pp. (In Russian)
23. Popov G. Ya. *Kontaktnye zadachi dlia lineino-deformiruemogo osnovaniia* [Contact problems for linearly deformable base]. Kiev, Vyshcha shkola, 1962, 168 pp. (In Russian)

Received 24/IV/2014;
 received in revised form 22/V/2014;
 accepted 27/VIII/2014.