

УДК 519.63

## О ТОЧНОСТИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

*Н. И. Сидняев, Н. М. Гордеева*

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,  
Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5/1.

*Проводится исследование разностных схем по времени, порядок точности которых может быть произвольно высоким. Представлены разностные схемы по времени для решения уравнений Навье–Стокса, где использована техника разложений в ряды для поиска особенностей решений уравнений Эйлера. Эти методы обобщены в данной статье на случай схем любого порядка и применения к решению уравнения Бюргерса и уравнений Навье–Стокса в случае несжимаемой жидкости. Исследуется влияние порядка схемы на точность вычислений. Сначала метод прилагается к контрольному примеру, связанному с уравнением Бюргерса, а затем рассматривается задача нахождения трехмерного течения несжимаемой жидкости посредством решения уравнений Навье–Стокса. Показано, что конечноразностная схема, используемая для вычисления производных по времени, является основным источником отклонений приближенного решения от точного решения.*

**Ключевые слова:** уравнения Навье–Стокса, уравнение Бюргерса, разностная схема, аппроксимация, устойчивость, погрешность.

1°. Любое численно полученное решение, даже точное аналитическое решение уравнения в частных производных, зависит от ошибок округления, связанных с конечным числом знаков, используемых при арифметических операциях на ЭВМ. Погрешность может оказать существенное влияние на решение конечно-разностных уравнений, так как получение этого решения обычно связано с выполнением большого числа однотипных арифметических операций [1]. В ряде случаев погрешность округления пропорциональна числу узлов разностной сетки, поэтому измельчение сетки, снижая погрешность аппроксимации, может увеличивать погрешность округления. Следовательно, погрешность полученного на ЭВМ решения уравнения в частных производных равна сумме погрешностей аппроксимации и округления. Точность численного решения уравнения в частных производных определяется погрешностью аппроксимации не только самого уравнения, но и граничных условий. Согласованной будет разностная схема, аппроксимирующая уравне-

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1233>

© 2014 Самарский государственный технический университет.

**Образец цитирования:** Н. И. Сидняев, Н. М. Гордеева, “О точности разностной схемы для уравнений Навье–Стокса” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 1 (34). С. 156–167. doi: [10.14498/vsgtu1233](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1233).

**Сведения об авторах:** *Николай Иванович Сидняев* (д.т.н., проф.), заведующий кафедрой, каф. Высшая математика. *Надежда Михайловна Гордеева*, ассистент, каф. Высшая математика.

**E-mail addresses:** [sydnyaev@bmstu.ru](mailto:sydnyaev@bmstu.ru) (N.I. Sidnyaev),  
[nmgordeeva@bmstu.ru](mailto:nmgordeeva@bmstu.ru) (N.M. Gordeeva, *Corresponding author*)

ние в частных производных [2]. Условием согласованности разностной схемы является стремление к нулю погрешности аппроксимации при измельчении сетки. Это условие, безусловно, выполняется, если погрешность аппроксимации убывает при измельчении сетки. Для анализа устойчивости конечно-разностной схемы применяют, например, метод Фурье [1, 2]. В этом методе решение модельного уравнения представляется рядом Фурье с конечным числом членов и устойчивость (или неустойчивость) определяется тем, что каждое отдельное колебание затухает (или нарастает). Погрешность округления не будет возрастать на каждом шаге по времени, если коэффициент перехода не превосходит единицы. Выражение для коэффициента перехода можно получить при помощи подстановки разложения погрешности в ряд Фурье в конечно-разностное уравнение.

В данной статье проводится исследование по времени разностных схем, порядок точности которых может быть произвольно высоким. В работах [1, 2] представлены псевдоспектральные схемы по времени для решения уравнений Навье–Стокса, где использована техника разложений в ряды для поиска особенностей решений уравнений Эйлера [3]. Эти методы обобщены в данной статье на случай схем любого порядка и применения к решению уравнения Бюргерса и уравнений Навье–Стокса [4] в случае несжимаемой жидкости. Предварительно рассмотрим приложение излагаемого метода к уравнению Бюргерса [5, 6], которое является частным случаем уравнений Навье–Стокса в одномерном случае [7, 8].

2°. Рассмотрим случай, когда задана скорость течения жидкости  $u$  и её кинематическая вязкость  $\tilde{\nu}$ . Уравнение Бюргерса [9–13] в общем виде записывается так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \tilde{\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Будем искать решение  $u(x, t)$  уравнения (1) с начальным условием

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0; 1],$$

которое является периодическим с периодом 1 по переменной  $x$  в любой момент времени  $t$  [12, 13]:

$$u(x, t) = u(x + 1, t). \quad (2)$$

Для решения этой задачи посредством разностной схемы третьего порядка по времени применим следующий метод: если известно решение  $u(x, t)$  в точке  $(x, t)$ , то для получения решения в точке  $(x, t + \Delta t)$  используется аппроксимация третьего порядка, определяемая отрезком ряда Тейлора:

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)\Delta t + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)\frac{(\Delta t)^2}{2} + \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x, t)\frac{(\Delta t)^3}{6}. \quad (3)$$

Частные производные, входящие в формулу (3), вычисляются дифференцированием по времени уравнения (1):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right); \\ \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} &= -u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) - 2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right).\end{aligned}$$

В конце концов,  $u(x, t + \Delta t)$  можно выразить как функцию от  $\Delta t$ ,  $u(x, t)$ ,  $(\partial u / \partial t)(x, t)$ ,  $(\partial^2 u / \partial t^2)(x, t)$ ,  $(\partial^3 u / \partial t^3)(x, t)$ . Эти производные вычисляются псевдоспектральным методом. Далее изложим обобщение метода [5, 15, 16] на случай схемы произвольно высокого порядка по времени и представим применяемую пространственную схему.

Пусть  $u(x, t)$  известно при любом  $x$ . Тогда аппроксимация порядка  $n$  величины  $u(x, t + \Delta t)$  даётся отрезком ряда Тейлора:

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)\Delta t + \dots + \frac{\partial^n u}{\partial t^n}(x, t) \frac{(\Delta t)^n}{n!}.$$

Любую производную  $(\partial^l u / \partial t^l)$  можно получить, дифференцируя  $(l - 1)$  раз по времени исходное уравнение (1):

$$\frac{\partial^l u}{\partial t^l} = - \frac{\partial^{l-1}}{\partial t^{l-1}} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \tilde{v} \frac{\partial^{l-1}}{\partial t^{l-1}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right). \quad (4)$$

Если предположить решение  $u(x, t)$  достаточно регулярным, то можно поменять порядок дифференцирования по  $x$  и  $t$ . Используя формулу Лейбница, формулу (4) можно записать в виде

$$\frac{\partial^l u}{\partial t^l} = - \sum_{i=0}^{l-1} C_{l-1}^i \frac{\partial^i u}{\partial t^i} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^{l-1-i} u}{\partial t^{l-1-i}} \right) + \tilde{v} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^{l-1} u}{\partial t^{l-1}} \right), \quad (5)$$

откуда

$$\begin{aligned}u(x, t + \Delta t) &= u(x, t) + \\ &+ \sum_{l=1}^n \left[ - \sum_{i=0}^{l-1} C_{l-1}^i \frac{\partial^i u}{\partial t^i} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^{l-1-i} u}{\partial t^{l-1-i}} \right) + \tilde{v} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^{l-1} u}{\partial t^{l-1}} \right) \right] \frac{(\Delta t)^l}{l!}.\end{aligned} \quad (6)$$

Искомое решение  $u(x, t)$  удовлетворяет (2), что позволяет в любой момент  $t$  разложить его в ряд Фурье:

$$u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(t) e^{j2\pi kx},$$

где

$$j^2 = -1, \quad a_k(t) = \int_0^1 u(x, t) e^{-j2\pi kx} dx.$$

Аппроксимация функции  $u(x, t)$  определяется методом дискретизации, или псевдоспектральным методом. Точки дискретизации  $x_i$  определяются

следующим образом:  $x_i = i/N$ ,  $0 \leq i < N$ , где  $N$  — число точек дискретизации. Таким образом, используется следующая аппроксимация  $u^*(x, t)$  функции  $u(x, t)$ :

$$u^*(x, t) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} a_k(t) e^{j2\pi kx},$$

где коэффициенты  $a_k(t)$  — решения системы уравнений

$$\sum_{k=-N/2}^{N/2-1} a_k(t) e^{j2\pi kx_i} = u(x_i, t), \quad 0 \leq i < N,$$

так как для точек дискретизации выполняется соотношение  $u^*(x_i, t) = u(x_i, t)$ ,  $0 \leq i < N$ .

Переход от  $\{u(x_i, t), 0 \leq i < N\}$  к  $\{a_k(t), -N/2 \leq k < N/2 - 1\}$  осуществляется с помощью быстрого преобразования Фурье. Все производные по  $x$  вычисляются в пространстве коэффициентов Фурье. Все произведения функций вычисляются в физическом пространстве  $x$ . Рассмотрим способ вычисления  $\partial u / \partial x$  в точке дискретизации  $x_i$ . Формальная производная функции  $u^*$  имеет вид

$$\frac{\partial(u^*)}{\partial x}(x_i, t) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} j2\pi k a_k(t) e^{j2\pi kx_i}.$$

Поскольку в точках дискретизации

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^* = \frac{\partial(u^*)}{\partial x}$$

по определению, то

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^*(x_i, t) = \frac{\partial(u^*)}{\partial x}(x_i, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} j2\pi k a_k(t) e^{j2\pi kx_i}.$$

Формула (5) позволяет разработать рекуррентный по  $l$  алгоритм вычисления производных  $\partial^l u / \partial t^l$ . Так, например, на  $l$ -том шаге известны  $\partial^i u / \partial t^i$  и  $(\partial^i u) / (\partial x \partial t^{i-1})$ ,  $1 \leq i \leq l-1$ , поэтому в правой части формулы (5) неизвестны только две производные:

$$\frac{\partial^l u}{\partial x \partial t^{l-1}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^{l+1} u}{\partial x^2 \partial t^{l-1}}.$$

Метод [5, 16–18] позволяет получить эти производные посредством двух последовательных дифференцирований по  $x$  величины  $\partial^{l-1} u / \partial t^{l-1}$ , получаемой на  $(l-1)$ -м шаге. После этого величина  $\partial^l u / \partial t^l$  вычисляется как сумма произведений известных величин. Рекуррентный алгоритм позволяет получить всю совокупность производных  $\partial^l u / \partial t^l$  при  $l$ , меньших или равных  $n$ . После этого по формуле (6) получаем  $u(x, t + \Delta t)$  и т.д.

Описанный процесс позволяет вычислить  $u(x, t + \Delta t)$  с помощью разностной схемы порядка  $n$ , при этом требуется  $n$  прямых и  $2n$  обратных преобразований Фурье и используется  $2n + 1$  массив длины  $N$ .

Исследование устойчивости осуществлялось для уравнения Бюргера, линеаризованного в окрестности постоянной скорости  $U$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} - \tilde{\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Пусть  $u(x, t)$  определена следующим образом:

$$u(x, t) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} a_k(t) e^{j2\pi kx}.$$

Сначала вычисляем производные по времени  $\partial^l u / \partial t^l$  методом [5, 12, 13, 19, 20]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^l u}{\partial t^l}(x, t) &= \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} a_k(t) [-j2\pi kU - \tilde{\nu}4\pi^2 k^2]^l e^{j2\pi kx} = \\ &= \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} a_k(t) \left[ \sum_{l=0}^n (-j2\pi kU - \tilde{\nu}4\pi^2 k^2)^l \frac{(\Delta t)^l}{l!} \right] e^{j2\pi kx}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$a_k(t + \Delta t) = a_k(t) \left[ \sum_{l=0}^n (-j2\pi kU \Delta t - \tilde{\nu}4\pi^2 k^2 \Delta t)^l \frac{1}{l!} \right].$$

Разностная схема будет устойчивой в смысле Фурье, если

$$\left| \frac{a_k(t + \Delta t)}{a_k(t)} \right| \leq 1 \quad \forall k, \quad -\frac{N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2} - 1.$$

Положим  $a = \tilde{\nu}4\pi^2 k^2 \Delta t$ ,  $b = 2\pi kU \Delta t$ , тогда схема будет устойчивой, если

$$g_n(a, b) = \left| \sum_{l=0}^n (-jb - a)^l \frac{1}{l!} \right| \leq 1 \quad \forall k, \quad -\frac{N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2} - 1.$$

Заметим, что  $g_n(a, b)$  — отрезок длины  $n$  ряда Тейлора функции  $e^{-jb-a}$  и  $|e^{-jb-a}| = e^{-a} \leq 1$ , поскольку в данном случае  $a \geq 0$ . Более того, при заданных  $a$  и  $b$  величина  $g_n(a, b) - e^{-a}$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .

**3°.** Перейдём к трёхмерной модели. Уравнения Навье—Стокса, определяющие поведение несжимаемой жидкости, в безразмерных переменных записываются следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \tilde{\nu} \Delta u + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} - \tilde{v} \Delta v + \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} - \tilde{v} \Delta w + \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (10)$$

Здесь  $p$  — давление;  $u, v, w$  — компоненты скорости  $\vec{U}$ ;  $\tilde{v} = \text{Re}^{-1}$ , где  $\text{Re}$  — число Рейнольдса. Начальное условие  $\vec{U}(x, y, z, 0)$  задано на  $[0, 1]^3$  и предполагается периодическим с периодом 1 по переменным  $x, y, z$ .

Здесь, как и при решении уравнения Бюргера, аппроксимация величины  $\vec{U}(\vec{x}, t + \Delta t)$ , где  $\vec{x} = (x, y, z)$ , порядка  $n$  записывается в виде отрезка ряда Тейлора

$$\vec{U}(\vec{x}, t + \Delta t) = \vec{U}(\vec{x}, t) + \frac{\partial \vec{U}}{\partial t}(\vec{x}, t) \Delta t + \dots + \frac{\partial^n \vec{U}}{\partial t^n}(\vec{x}, t) \frac{(\Delta t)^n}{n!}.$$

Основное отличие от предыдущей задачи состоит в том, что уравнения (7)–(9) связаны между собой посредством входящего в них давления и уравнения (10).

Предполагая известными величины  $\partial^i \vec{U} / \partial t^i$  и  $\partial^i \vec{U} / \partial x \partial t^{i-1}$ ,  $\partial^i \vec{U} / \partial y \partial t^{i-1}$ ,  $\partial^i \vec{U} / \partial z \partial t^{i-1}$ ,  $1 \leq i \leq l-1$ , рассмотрим вычисление  $\partial^l \vec{U} / \partial t^l$ .

Продифференцируем систему уравнений (7)–(10)  $(l-1)$  раз по времени:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^l u}{\partial t^l} + A - \tilde{v} \frac{\partial^{l-1}}{\partial t^{l-1}}(\Delta u) + \frac{\partial^{l-1}}{\partial t^{l-1}} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^l v}{\partial t^l} + B - \tilde{v} \frac{\partial^{l-1}}{\partial t^{l-1}}(\Delta v) + \frac{\partial^{l-1}}{\partial t^{l-1}} \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^l w}{\partial t^l} + C - \tilde{v} \frac{\partial^{l-1}}{\partial t^{l-1}}(\Delta w) + \frac{\partial^{l-1}}{\partial t^{l-1}} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^{l-1}}{\partial t^{l-1}} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^{l-1}}{\partial t^{l-1}} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial^{l-1}}{\partial t^{l-1}} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial^{l-1}}{\partial t^{l-1}} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ B &= \frac{\partial^{l-1}}{\partial t^{l-1}} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ C &= \frac{\partial^{l-1}}{\partial t^{l-1}} \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Пользуясь формулой Лейбница и предполагая функции  $u, v, w$  достаточно регулярными, чтобы поменять порядок дифференцирования по пространству

и времени, систему уравнений (12) можно записать так:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=0}^{l-1} C_{l-1}^i \left[ \frac{\partial^i u}{\partial t^i} \frac{\partial^{l-i} u}{\partial x \partial t^{l-1-i}} + \frac{\partial^i v}{\partial t^i} \frac{\partial^{l-i} u}{\partial y \partial t^{l-1-i}} + \frac{\partial^i w}{\partial t^i} \frac{\partial^{l-i} u}{\partial z \partial t^{l-1-i}} \right], \\ B &= \sum_{i=0}^{l-1} C_{l-1}^i \left[ \frac{\partial^i u}{\partial t^i} \frac{\partial^{l-i} v}{\partial x \partial t^{l-1-i}} + \frac{\partial^i v}{\partial t^i} \frac{\partial^{l-i} v}{\partial y \partial t^{l-1-i}} + \frac{\partial^i w}{\partial t^i} \frac{\partial^{l-i} v}{\partial z \partial t^{l-1-i}} \right], \\ C &= \sum_{i=0}^{l-1} C_{l-1}^i \left[ \frac{\partial^i u}{\partial t^i} \frac{\partial^{l-i} w}{\partial x \partial t^{l-1-i}} + \frac{\partial^i v}{\partial t^i} \frac{\partial^{l-i} w}{\partial y \partial t^{l-1-i}} + \frac{\partial^i w}{\partial t^i} \frac{\partial^{l-i} w}{\partial z \partial t^{l-1-i}} \right]. \end{aligned}$$

Векторная запись системы (11) имеет вид

$$\frac{\partial^l \vec{U}}{\partial t^l} + \vec{\Phi} - \tilde{v} \Delta \frac{\partial^{l-1} \vec{U}}{\partial t^{l-1}} + \text{grad} \frac{\partial^{l-1} p}{\partial t^{l-1}} = 0, \quad \text{div} \frac{\partial^{l-1} \vec{U}}{\partial t^{l-1}} = 0, \quad (13)$$

где  $\vec{\Phi} = (A, B, C)$ .

Применяя к уравнению (13) операцию дивергенции, получаем уравнение Пуассона для  $\partial^{l-1} p / \partial t^{l-1}$ :

$$\Delta \frac{\partial^{l-1} p}{\partial t^{l-1}} = -\text{div} \vec{\Phi} - \text{div} \frac{\partial^l \vec{U}}{\partial t^l} + \tilde{v} \Delta \text{div} \frac{\partial^{l-1} \vec{U}}{\partial t^{l-1}}. \quad (14)$$

Дифференцируем второе уравнение (13) по  $t$ , получаем

$$\text{div} \frac{\partial^l \vec{U}}{\partial t^l} = 0. \quad (15)$$

Из уравнений (13) и (15) следует, что уравнение (14) можно записать в виде

$$\Delta \frac{\partial^{l-1} p}{\partial t^{l-1}} = -\text{div} \vec{\Phi}. \quad (16)$$

Уравнение Пуассона (16) решается спектральным методом [18–20]. После этого достаточно найти  $\text{grad}(\partial^{l-1} p / \partial t^{l-1})$ , чтобы из первого уравнения (13) получить  $\partial^l \vec{U} / \partial t^l$ . Следует ещё раз отметить, что решение рассматриваемой задачи периодически в направлениях  $x, y, z$  с периодом 1.

Таким образом, в любой момент времени  $t$  можно разложить  $\vec{U}(\vec{x}, t)$  и  $p(\vec{x}, t)$  в ряды Фурье:

$$\begin{aligned} \vec{U}(\vec{x}, t) &= \sum_{k_x=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_y=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_z=-\infty}^{+\infty} \vec{a}_{\vec{k}}(t) e^{j2\pi \vec{k} \vec{x}}, \\ p(\vec{x}, t) &= \sum_{k_x=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_y=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_z=-\infty}^{+\infty} \vec{b}_{\vec{k}}(t) e^{j2\pi \vec{k} \vec{x}}, \end{aligned}$$

$$\vec{k} = (k_x, k_y, k_z), \quad \vec{x} = (x, y, z), \quad j^2 = -1, \quad \vec{k} \vec{x} = k_x x + k_y y + k_z z.$$

Пусть  $\Omega$  — множество точек дискретизации:

$$\Omega = \Omega_x \times \Omega_y \times \Omega_z,$$

$$\Omega_x = \{i/N_x, 0 \leq i < N_x\}, \quad \Omega_y = \{i/N_y, 0 \leq i < N_y\}, \quad \Omega_z = \{i/N_z, 0 \leq i < N_z\}.$$

Следует отметить, что в процессе решения использовалось допущение, что уравнение  $\operatorname{div} \vec{U} = 0$  остаётся справедливым на  $\Omega$  в каждый момент времени  $t$ . В рассмотренных ниже случаях при небольшом числе шагов по времени величина  $\|\operatorname{div} \vec{U}\|/\|\vec{U}\|$  остаётся меньшей  $10^{-8}$ .

С целью исследования устойчивости разностных схем для уравнений Навье–Стокса рассматривались уравнения, линеаризованные в окрестности постоянной скорости  $\vec{U}_0 = (u_0, v_0, w_0)$ . Предполагалось, что  $\vec{U}(\vec{x}, t)$  и  $p(\vec{x}, t)$  определены следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{U}(\vec{x}, t) &= \sum_{k_x=-N_x/2}^{N_x/2-1} \sum_{k_y=-N_y/2}^{N_y/2-1} \sum_{k_z=-N_z/2}^{N_z/2-1} \hat{\vec{U}}_{\vec{k}}(t) e^{j2\pi \vec{k} \cdot \vec{x}}, \\ p(\vec{x}, t) &= \sum_{k_x=-N_x/2}^{N_x/2-1} \sum_{k_y=-N_y/2}^{N_y/2-1} \sum_{k_z=-N_z/2}^{N_z/2-1} \hat{p}_{\vec{k}}(t) e^{j2\pi \vec{k} \cdot \vec{x}}, \\ \hat{\vec{U}}_{\vec{k}}(t) &= (\hat{u}_{\vec{k}}(t), \hat{v}_{\vec{k}}(t), \hat{w}_{\vec{k}}(t)). \end{aligned}$$

Чтобы  $\vec{U}$  и  $p$  были решениями линеаризованных уравнений, необходимо, чтобы коэффициенты  $\hat{\vec{U}}_{\vec{k}}(t)$  и  $\hat{p}_{\vec{k}}(t)$  удовлетворяли соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}_{\vec{k}}}{\partial t} + j2\pi k_x \hat{p}_{\vec{k}} + \hat{u}_{\vec{k}} [j2\pi(k_x u_0 + k_y v_0 + k_z w_0) + \tilde{v}4\pi^2 k^2] &= 0, \\ \frac{\partial \hat{v}_{\vec{k}}}{\partial t} + j2\pi k_y \hat{p}_{\vec{k}} + \hat{v}_{\vec{k}} [j2\pi(k_x u_0 + k_y v_0 + k_z w_0) + \tilde{v}4\pi^2 k^2] &= 0, \\ \frac{\partial \hat{w}_{\vec{k}}}{\partial t} + j2\pi k_z \hat{p}_{\vec{k}} + \hat{w}_{\vec{k}} [j2\pi(k_x u_0 + k_y v_0 + k_z w_0) + \tilde{v}4\pi^2 k^2] &= 0, \\ k_x \hat{u}_{\vec{k}} + k_y \hat{v}_{\vec{k}} + k_z \hat{w}_{\vec{k}} &= 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Из уравнений (17) следует, что

$$2\pi k^2 \hat{p}_{\vec{k}} = j \left( k_x \frac{\partial \hat{u}_{\vec{k}}}{\partial t} + k_y \frac{\partial \hat{v}_{\vec{k}}}{\partial t} + k_z \frac{\partial \hat{w}_{\vec{k}}}{\partial t} \right).$$

Но метод, изложенный в [5, 6], предполагает, что  $\partial \vec{U} / \partial t$  удовлетворяет уравнению несжимаемости:

$$\operatorname{div} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = 0, \quad k_x \frac{\partial \hat{u}_{\vec{k}}}{\partial t} + k_y \frac{\partial \hat{v}_{\vec{k}}}{\partial t} + k_z \frac{\partial \hat{w}_{\vec{k}}}{\partial t} = 0.$$

Давление  $p$  удовлетворяет уравнению  $\Delta p = 0$  при условиях периодичности. Получаем, что давление постоянно и не входит в дальнейшие вычисления. Поэтому уравнения (17) разделяются, и исследование устойчивости

сводится к исследованию устойчивости следующего уравнения:

$$\frac{\partial \hat{u}_{\vec{k}}}{\partial t} + \hat{u}_{\vec{k}} \left[ j2\pi(\vec{k}\vec{U}_0) + \tilde{v}4\pi^2 k^2 \right] = 0.$$

Согласно разностной схеме, описанной в [2,7,8],  $u(\vec{x}, t + \Delta t)$  определяется коэффициентами  $\hat{u}_{\vec{k}}(t + \Delta t)$  отрезка ряда Фурье, удовлетворяющими соотношению

$$\hat{u}_{\vec{k}}(t + \Delta t) = \hat{u}_{\vec{k}}(t) \sum_{l=1}^n \left[ -j2\pi(\vec{k}\vec{U}_0)\Delta t - \tilde{v}4\pi^2 k^2 \Delta t \right]^l \frac{1}{l!}.$$

Поэтому вновь воспользуемся функциями  $g_n$ , определёнными в [12–14]. Схема устойчива, если

$$g_n(\tilde{v}4\pi^2 k^2 \Delta t, 2\pi(k_x u_0 + k_y v_0 + k_z w_0)\Delta t) \leq 1 \quad \forall \vec{k}, \\ -N_x/2 \leq k_x \leq N_x/2 - 1, \quad -N_y/2 \leq k_y \leq N_y/2 - 1, \quad -N_z/2 \leq k_z \leq N_z/2 - 1.$$

4°. Рассматривалось решение уравнения (1) с начальным условием

$$u(x, 0) = -\sin(2\pi x) \tag{18}$$

и условием (2) при  $\tilde{v} = (2\pi)^{-1}$ , которое имеет следующий аналитический вид:

$$u(x, t) = \frac{4 \sum_{p=1}^{+\infty} p a_p e^{-2\pi p^2 t} \sin(2\pi p x)}{a_0 + 2 \sum_{p=1}^{+\infty} a_p e^{-2\pi p^2 t} \cos(2\pi p x)}, \quad a_p = (-1)^p I_p(1/2),$$

где  $I_p$  — модифицированная функция Бесселя первого рода.

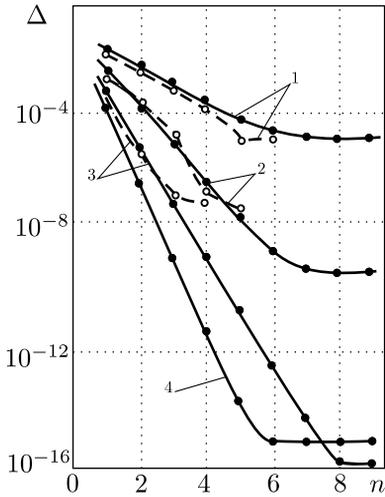
Значения отклонений расчетного  $u_{\text{calc}}$  от точного  $u_{\text{exact}}$  вычислялись в норме  $l_2$  для  $N$ -мерного пространства в момент времени  $t = 0.02$  для различных значений порядка разностной схемы  $n$ :

$$\Delta = \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (u_{\text{exact}}(i/N, 0.02) - u_{\text{calc}}(i/N, 0.02))^2 \right]^{1/2}. \tag{19}$$

Результаты вычисления  $\Delta$  для решения, полученного по разностной схеме, представлены на рисунке сплошными линиями. На этом же рисунке приведены результаты (штриховые линии), полученные в программной среде Maple 6. Отсутствие некоторых значений  $\Delta$ , вычисленных в Maple 6, объясняется тем, что либо вычисления длятся очень долго, либо данный алгоритм в Maple 6 расходится.

В случае  $N = 8$  ошибка  $\Delta$  убывает при росте порядка схемы от 1 до 4 и остается постоянной для порядков, больших 4. Таким образом, при  $N = 8$  нельзя надеяться получить хорошую точность схем. В случае  $N = 16$  то же явление имеет место при порядке схем более семи. При  $N = 32$  и  $N = 64$  имеем очень хорошую точность.

Проведенные вычисления показали, что в рассмотренных случаях точность вычислений заметно возрастала при возрастании порядка разностной



Кривые отклонения (19) для уравнения (1) с начальным условием (18) и условием (2) при  $t = 0.02$ : 1 —  $N = 8$ ,  $\Delta t = 2 \cdot 10^{-2}$ ; 2 —  $N = 16$ ,  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$ ; 3 —  $N = 32$ ,  $\Delta t = 1,25 \cdot 10^{-3}$ ; 4 —  $N = 64$ ,  $\Delta t = 3,125 \cdot 10^{-4}$ ; сплошные линии — вычисление по разностной схеме; штриховые линии — вычисленные в программной среде Maple 6

Deflection curves (19) for equation (1) with initial condition (18) and condition (2) when  $t = 0.02$  for  $N = 8$ ,  $\Delta t = 2 \cdot 10^{-2}$  (curves number 1);  $N = 16$ ,  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$  (curves number 2);  $N = 32$ ,  $\Delta t = 1,25 \cdot 10^{-3}$  (curves number 3);  $N = 64$ ,  $\Delta t = 3,125 \cdot 10^{-4}$  (curve number 4). Solid curves are obtained by the difference calculating scheme. Dashed curves are obtained in Maple 6.

схемы по времени. Однако при этом не учитывались издержки, связанные со временем использования центрального процессора для расчетов. Показано, что алгоритмы быстрого преобразования Фурье позволяют создавать спектральные и псевдоспектральные методы аппроксимации в пространстве. Полученные методы могут использоваться в конечно-разностных схемах, которые имеют высокий порядок аппроксимации в пространстве, но сравнительно низкий порядок точности по времени. Показано, что решение уравнений в частных производных псевдоспектральным методом позволяет получить весьма высокую точность при вычислении пространственных производных. Результаты работы показывают, что конечно-разностная схема, используемая для вычисления производных по времени, является основным источником отклонений приближенного решения от точного решения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. Л. Г. Лойцянский, *Механика жидкости и газа*, М.: Наука, 1970. 904 с.; L. G. Loitsyansky, *Fluid and Gas Mechanics*, Moscow, Nauka, 1970, 904 pp. (In Russian)
2. В. Я. Нейланд, В. В. Боголепов, Г. Н. Дудин, И. И. Липатов, *Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа*, М.: Физматлит, 2003. 456 с.; V. Ya. Neiland, V. V. Bogolepov, G. N. Dudin, I. I. Lipatov, *Asymptotic Theory of Supersonic Viscous Gas Flows*, Oxford, The Netherlands, Elsevier, 2008, xxv+536 pp.
3. В. В. Боголепов, “Исследование малых пространственных возмущений ламинарного пограничного слоя” // *ПМТФ*, 1987. № 5. С. 12–32; V. V. Bogolepov, “Small perturbations of a laminar boundary layer”, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1987, vol. 28, no. 5, pp. 706–716. doi: [10.1007/BF00912023](https://doi.org/10.1007/BF00912023).
4. В. А. Башкин, Г. Н. Дудин, *Пространственные гиперзвуковые течения вязкого газа*, М.: Наука, 2000. 288 с. [V. A. Bashkin, G. N. Dudin, *3-Dimensional Hypersonic Viscous Flow*, Moscow, Fizmatlit, 2000, 288 pp. (In Russian)]
5. J. Gazdag, “Numerical convective schemes based on accurate computation of space derivatives”, *J. Comput. Phys.*, 1973, vol. 13, no. 1, pp. 100–113. doi: [10.1016/0021-9991\(73\)90128-9](https://doi.org/10.1016/0021-9991(73)90128-9).
6. J. Gazdag, “Time-differencing schemes and transform methods”, *J. Comput. Phys.*, 1976, vol. 20, no. 2, pp. 196–207. doi: [10.1016/0021-9991\(76\)90064-4](https://doi.org/10.1016/0021-9991(76)90064-4).

7. Н. И. Сидняев, “Метод расчета нестационарного обтекания тела вращения с поверхностным массообменом в рамках параболизированных уравнений Навье–Стокса” // *Матем. моделирование*, 2004. Т. 16, № 5. С. 55–65. [N. I. Sidnyaev, “Calculation method of unstable external flow past rotation body with surface injection in three dimensional parabolized Navier–Stokes code”, *Matem. Mod.*, 2004, vol. 16, no. 5, pp. 55–65. (In Russian)].
8. Н. И. Сидняев, Д. А. Сиротовский, “О точности разностных схем для уравнений Бюргера и Навье–Стокса” / *Необратимые процессы в природе и технике. Тезисы докладов Третьей Всероссийской конференции*, М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005. 132–133 с. [N. I. Sidnyaev, D. A. Sirovovskiy, “On the accuracy of difference schemes for Burgers and Navier–Stokes equations”, *Neobratimyye protsessy v prirode i tekhnike* [Irreversible Processes in Nature and Technology. 3rd All-Russ. Conf. Abstr.], Moscow, Bauman MSTU Publ., 2005, 132–133. pp. (In Russian)]
9. Y. Morchoisne, “Résolution des équations de Navier–Stokes par une méthode pseudo-spectrale en espace-temps”, *Rech. Aérop.*, 1979, vol. 5, pp. 293–306. (In French).
10. Ph. Roy, “Résolution des équations de Navier–Stokes par un schema de haute précision en espace et en temps”, *Rech. Aérop.*, 1980, vol. 6, pp. 373–385. (In French).
11. Я. И. Белопольская, “Обобщенные решения систем нелинейных параболических уравнений и метод исчезающей вязкости” / *Вероятность и статистика. 7* / Зап. научн. сем. ПОМИ, Т. 311, СПб.: ПОМИ, 2004. С. 7–39; Ya. I. Belopolskaya, “Generalized Solutions of Nonlinear Parabolic Systems and the Vanishing Viscosity Method”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2006, vol. 133, no. 3, pp. 1207–1223. doi: [10.1007/s10958-006-0031-z](https://doi.org/10.1007/s10958-006-0031-z).
12. L. Bertini, N. Cancrini, G. Jona-Lasinio, “The stochastic Burgers Equation”, *Comm. Math. Phys.*, 1994, vol. 165, no. 2, pp. 211–232. doi: [10.1007/BF02099769](https://doi.org/10.1007/BF02099769).
13. I. M. Davies, A. Truman, H. Zhao, “Stochastic heat and Burgers equations and their singularities. I. Geometrical properties”, *J. Math. Phys.*, 2002, vol. 43, no. 6, pp. 3293–3328. doi: [10.1063/1.1471925](https://doi.org/10.1063/1.1471925).
14. O. O. Obrezkov, “The Proof of the Feynman–Kac Formula for Heat Equation on a Compact Riemannian Manifold”, *Infin. Dimens. Anal. Quantum. Probab. Relat. Top.*, 2003, vol. 6, no. 2, pp. 311–320. doi: [10.1142/S0219025703001109](https://doi.org/10.1142/S0219025703001109).
15. O. G. Smolyanov, H. von Weizsäcker, “Smooth probability measures and associated differential operators”, *Infin. Dimens. Anal. Quantum. Probab. Relat. Top.*, 1999, vol. 2, no. 1, pp. 51–78. doi: [10.1142/s0219025799000047](https://doi.org/10.1142/s0219025799000047).
16. O. G. Smolyanov, H. von Weizsäcker, O. Wittich, “Brownian motion on a manifold as a limit of stepwise conditioned standard Brownian motions”, *Canadian Mathematical Society, Conference Proceedings*. V. 29, ed. J. Jost, 2000, pp. 589–602.
17. О. Г. Смолянов, Х. фон Вайцзеккер, О. Виттих, “Поверхностные меры и начально-краевые задачи, порождаемые диффузиями со сносом” // *Докл. РАН*, 2007. Т. 415, № 6. С. 737–741; O. G. Smolyanov, H. von Weizsäcker, O. Wittich, “Surface Measures and Initial Boundary Value Problems Generated by Diffusions with Drift”, *Doklady Mathematics*, 2007, vol. 76, no. 1, pp. 606–610. doi: [10.1134/s1064562407040321](https://doi.org/10.1134/s1064562407040321).
18. A. Truman, H. Z. Zhao, “On stochastic diffusion equations and stochastic Burgers’ equations”, *J. Math. Phys.*, 1996, vol. 37, no. 1, pp. 283–307. doi: [10.1063/1.531391](https://doi.org/10.1063/1.531391).
19. H. J. Wospakrik, F. P. Zen, *Inhomogeneous Burgers Equation and the Feynman–Kac Path Integral*, 1998, 12 pp., arXiv: [solv-int/9812014](https://arxiv.org/abs/solv-int/9812014)
20. S. E. Matskevich, “Burgers equation and Kolmogorov–Petrovsky–Piskunov equation on manifolds”, *Infin. Dimens. Anal. Quantum. Probab. Relat. Top.*, 2011, vol. 14, no. 2, pp. 199–208. doi: [10.1142/S0219025711004341](https://doi.org/10.1142/S0219025711004341).

Поступила в редакцию 28/VI/2013;  
в окончательном варианте — 17/II/2014;  
принята в печать — 19/II/2014.

MSC: 65M06, 76D05; 65M12, 65Z05

## ON THE ACCURACY OF DIFFERENCE SCHEME FOR NAVIER–STOKES EQUATIONS

*N. I. Sidnyaev, N. M. Gordeeva*

N. E. Bauman Moscow State Technical University,  
5/1, 2-ya Baumanskaya st., Moscow, 105005, Russian Federation.

*The article presents a study of difference schemes in time, which accuracy can be arbitrarily high. We present difference schemes in time for solving the Navier–Stokes equations, where series expansions are used to find the singularities of solutions of the Euler equations. These methods are generalized in this article for the arbitrary order schemes and for solving the Burgers equation and the Navier–Stokes equations for an incompressible fluid. The impact of the scheme on the calculation accuracy is examined. First, the method is applied to the test case associated with the Burgers equation, and then the problem of three-dimensional incompressible flow finding by solving the Navier–Stokes equations is considered. It is shown that the finite-difference scheme used to calculate the time derivatives is the main source of deviations of the approximate solution from the exact solution.*

**Keywords:** *Navier–Stokes equations, Burgers equation, difference scheme, approximation, stability, accuracy.*

Received 28/VI/2013;  
received in revised form 17/II/2014;  
accepted 19/II/2014.

---

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1233>  
© 2014 Samara State Technical University.

**Citation:** N. I. Sidnyaev, N. M. Gordeeva, “On the Accuracy of Difference Scheme for Navier–Stokes Equations”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 1 (34), pp. 156–167. doi: [10.14498/vsgtu1233](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1233). (In Russian)

**Authors Details:** *Nikolay I. Sidnyaev* (Dr. Techn. Sci.), Head of Department, Dept. of Higher Mathematics. *Nadezhda M. Gordeeva*, Assistant, Dept. of Higher Mathematics.

**E-mail addresses:** [sidnyaev@bmstu.ru](mailto:sidnyaev@bmstu.ru) (N.I. Sidnyaev),  
[nmgordeeva@bmstu.ru](mailto:nmgordeeva@bmstu.ru) (N.M. Gordeeva, *Corresponding author*)