УДК 539.376

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЛЯ НЕУПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ ТЕЛА

И. Ю. Цвелодуб

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090, Россия, Новосибирск, пр-т Академика Лаврентьева, 15.

Формулируется и решается задача о формировании тела постоянными внешними силами в условиях установившейся ползучести в течение заданного времени t_* таким образом, чтобы после снятия нагрузок перемещения точек поверхности принимали заданные значения. Рассматривается случай малых деформаций. При определённых предположениях и ограничениях доказывается теорема единственности для решения данной задачи. Анализируются прикладные вопросы задачи нахождения внешних воздействий, которые необходимы для получения требуемой формы тела за заданное время в условиях реологического деформирования после снятия внешних сил (с учётом упругой разгрузки). Детально выполнен анализ тонкостенной изотропной пластины для случая плоского напряжённого состояния. Решение для перемещений ищется в виде ряда по малому параметру. Приводится модельное решение для круглой пластинки единичного радиуса под действием постоянных внешних нагрузок, которая после после ползучести и упругой разгрузки должна иметь заданное поле перемещений.

Ключевые слова: *установившаяся ползучесть, обратная краевая задача, формообразование, постоянные нагрузки, малые деформации, постулат Друккера для вязких деформаций, круглая тонкая пластина.*

1. Рассмотрим односвязное тело объема V с поверхностью S, определяющие уравнения деформирования которого имеют вид [1]

$$\varepsilon_{kl} = a_{klmn}\sigma_{mn} + \varepsilon^c_{kl}, \quad k, l = 1, 2, 3, \tag{1}$$

где ε_{kl}, $\varepsilon^c_{kl}\sigma_{kl}$, $a_{klmn} = a_{mnkl}$ — компоненты тензоров полных деформаций, деформаций ползучести, напряжений и упругих податливостей соответственно; по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 3. Компоненты ε_{kl} предполагаются малыми и выражающимися через компоненты перемещений u_{kl} известными соотношениями Коши.

Компоненты скоростей деформаций ползучести $\dot\varepsilon^c_{kl} = \eta_{kl}$ (точка обозначает дифференцирование по времени t) являются функциями напряжений

$$\eta_{kl} = \eta_{kl}\left(\sigma_{mn}\right), \quad k, l, m, n = 1, 2, 3, \tag{2}$$

причем для произвольных бесконечно малых приращений $\delta\sigma_{kl}$ и соответству-

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1320

Образец цитирования: И. Ю. Цвелодуб, “Обратная задача теории ползучести для неупрочняющегося тела” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 2 (35). С. 115–124. doi: 10.14498/vsgtu1320.

Сведения об авторе: *Игорь Юрьевич Цвелодуб* (д.ф.-м.н.), заведующий лабораторией, лаборатория статической прочности, отдел механики деформируемого твёрдого тела.

E-mail address: itsvel@hydro.nsc.ru

ющих им приращений $\delta\eta_{kl}$ имеет место неравенство

$$\delta\sigma_{kl}\delta\eta_{kl} \geqslant 0. \tag{3}$$

Соотношения (2) описывают процесс ползучести неупрочняющегося тела. Неравенство (3) выражает известный постулат Друккера для вязких деформаций. Вопросы, связанные с выяснением ограничений, накладываемых условием (3) на функции (2), достаточно подробно изложены в [2, 3]. Общие теоремы для рассматриваемых сред приведены в [1].

Сформулируем обратную задачу теории ползучести: какие внешние нагрузки $p_k = p_k(t)$, $0 \leqslant t < t_*$, (считаем, что массовые силы отсутствуют) нужно приложить к поверхности тела, находящегося при $t < 0$ в естественном недеформированном состоянии, чтобы в момент времени $t = t_*$ после снятия этих нагрузок тело приняло заданную форму, т.е. при $t = t_*$ перемещения $u_k = u_k^r$ на S, где u_k^r — заданные функции точек поверхности ($k = 1, 2, 3$).

Решение этой задачи может быть неединственным, т.е. может существовать множество путей нагружения $p_k = p_k(t)$, при которых тело деформируется из исходного состояния в заданное. В данной работе рассмотрим только один частный случай: $p_k = \text{const}$ при $0 \leqslant t < t_*$ ($k = 1, 2, 3$).

Утверждение. *Если существует решение рассматриваемой задачи для указанного случая* ($p_k = \text{const}$ *при* $0 \leqslant t < t_*$, $k = 1, 2, 3$), *то при некоторых условиях, указанных ниже, оно будет единственным.*

Доказательство. Рассмотрим процесс деформирования тела при заданных условиях: $0 \leqslant t < t_*$, $p_k = \text{const}$ на S, $k = 1, 2, 3$. Пусть существуют два решения этой задачи, разности соответствующих величин будем обозначать с помощью символа Δ. Так как $\Delta\dot{p}_k = 0$ на S, на основании уравнения виртуальных работ [4] получим

$$\int_V \Delta\dot{\sigma}_{kl}\Delta\varepsilon_{kl}dV = 0. \tag{4}$$

Поле напряжений, возникающих в теле, в любой момент времени можно представлять в виде $\sigma_{kl} = \sigma_{kl}^e + \rho_{kl}$, где σ_{kl}^e соответствует решению чисто упругой задачи с теми же внешними нагрузками на S; ρ_{kl} — компоненты остаточных напряжений, т.е. тех напряжений, которые возникли бы в теле после снятия внешних нагрузок в текущий момент времени [4]. Последние, как и их производные по t, являются самоуравновешенными при любом t, им соответствуют нулевые нагрузки на S. Кроме того, $\sigma_{kl}^e = \text{const}$, т.е. $\dot{\sigma}_{kl}^e = 0$, поскольку $p_k = \text{const}$ на S.

Интегрируя равенство (4) по t от 0 до t_*, с учётом (1), (2) и сделанных замечаний получим[1]

[1] При выводе (5) использовалась процедура интегрирования по частям, а также равенства $\dot{\sigma}_{kl}^e = 0$ и

$$\int_V a_{klmn}\Delta\sigma_{mn}^e\Delta\rho_{kl}dV = \int_V a_{klmn}\Delta\rho_{mn}\Delta\sigma_{kl}^e dV = \int_V a_{klmn}\Delta\dot{\rho}_{mn}\Delta\sigma_{kl}^e dV = 0,$$

так как поле $\Delta\varepsilon_{kl}^e = a_{klmn}\Delta\sigma_{mn}^e$ является совместным (соответствует решению упругой задачи), а поля $\Delta\rho_{kl}$, $\Delta\dot{\rho}_{kl}$ — самоуравновешенными [4].

$$\int_V \big[a_{klmn}\big(\Delta\sigma^e_{kl}\Delta\sigma^e_{mn} + \Delta\rho_{kl}\Delta\rho_{mn}\big) + \Delta\sigma_{kl}\Delta\varepsilon^c_{kl}\big]\,dV\Big|_0^{t_*} - \\ - \frac{1}{2}\int_V a_{klmn}\Delta\rho_{kl}\Delta\rho_{mn}dV\Big|_0^{t_*} - \int_0^{t_*}\int_V \Delta\sigma_{kl}\Delta\eta_{kl}dV\,dt = 0. \quad (5)$$

Ввиду того, что $\Delta\sigma^e_{kl}(0) = \Delta\sigma^e_{kl}t_*$ и $\Delta\rho_{kl}(0) = \Delta\varepsilon^c_{kl}(0) = 0$, равенство (5) примет вид

$$I_1 - I_2 = 0, \quad I_1 = \int_V \big[a_{klmn}\Delta\rho_{kl}\Delta\rho_{mn} + \Delta\sigma_{kl}\Delta\varepsilon_{kl}\big]\,dV\Big|_{t=t_*},$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_V a_{klmn}\Delta\rho_{kl}\Delta\rho_{mn}dV\Big|_{t=t_*} + \int_0^{t_*}\int_V \Delta\sigma_{kl}\Delta\eta_{kl}dV\,dt.$$

Величину I_1 можно представить в форме

$$I_1 = \int_V \Delta\varepsilon^r_{kl}\Delta\sigma_{kl}dV\Big|_{t=t_*},$$

где $\varepsilon^r_{kl} = a_{klmn}\rho_{mn} + \varepsilon_{kl}$ — поле остаточных деформаций, возникающих в теле при $t = t_*$ после снятия внешних нагрузок. В силу уравнения виртуальных работ

$$I_1 = \int_S \Delta\varepsilon^r_{kl}\Delta\sigma_{kl}dV.$$

Следовательно, и $I_2 = 0$, что возможно только в том случае, если во всем объёме тела $\Delta\rho_{kl}(t_*) = 0$ и $\Delta\sigma_{kl}\Delta\eta_{kl} = 0$ в любой момент времени t $(0 \leqslant t < t_*)$, поскольку из (3) следует аналогичное неравенство для конечных разностей [3]. Последнее равенство для сжимаемого при ползучести тела возможно только при $\Delta\sigma_{kl} = 0$, а для несжимаемого — при $\Delta\sigma_{kl} = \Delta p\delta_{kl}$, где δ_{kl} — компоненты единичного тензора [3]. Из уравнений равновесия и в силу того, что $p_k = \mathrm{const}$ на S, следует, что $\Delta p = \mathrm{const}$.

Таким образом, для несжимаемой при ползучести среды два решения рассматриваемой задачи могут отличаться только на величину произвольного постоянного гидростатического давления. Это очевидно, поскольку последнее в этом случае не влияет на процесс ползучести [3], а упругие деформации, соответствующие этой величине, вычтутся из решения при разгрузке в момент $t = t_*$. Если на части поверхности тела известны внешние нагрузки или одна из диагональных компонент тензора напряжений (как, например, в случае плоского напряженного состояния), то $\Delta p = 0$. Утверждение доказано. □

2. Рассмотрим случай плоского напряженного состояния, когда тело представляет собой изотропную тонкую пластинку и решение обратной задачи о её деформировании в заданное состояние при постоянных внешних нагрузках единственно. Считаем, что осреднённая плоскость пластинки занимает односвязную область, ограниченную замкнутым гладким контуром L. Соотношения (2) возьмём в виде общепринятых однородных функций степени n [5]. Тогда для скоростей полных деформаций в системе координат Oxy, выбранной в срединной плоскости пластинки, будем иметь

$$\dot\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\dot\sigma_x - \nu\dot\sigma_y\right) + B\sigma_i^{n-1}\frac{2\sigma_x - \sigma_y}{2},$$

$$\dot\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\dot\sigma_y - \nu\dot\sigma_x\right) + B\sigma_i^{n-1}\frac{2\sigma_y-\sigma_x}{2}, \qquad (6)$$
$$\dot\varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\dot\sigma_{xy} + B\sigma_i^{n-1}\frac{3}{2}\sigma_{xy},$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона; B, n — константы ползучести; $\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma_x\sigma_y+3\sigma_{xy}^2}$ — интенсивность напряжений. Предполагаем, что $n > 1$, тем самым обеспечивается выполнимость (3) [2,3].

Пусть после деформирования пластинки в течение времени t_* под действием постоянных внешних нагрузок и их последующего снятия при $t = t_*$ требуется получить перемещения точек границы L вида

$$u_x = c\big[x + \delta u_{x1}(x,y) + \delta^2 u_{x2}(x,y) + \ldots\big],$$
$$u_y = c\big[y + \delta u_{y1}(x,y) + \delta^2 u_{y2}(x,y) + \ldots\big], \qquad (7)$$

где c, δ — константы, $0 < \delta < 1$, т.е. u_x, u_y могут быть представлены в виде рядов по степеням малого параметра δ. Для определённости примем, что $c > 0$.

Для решения данной задачи применим метод возмущений [6]. При $\delta = 0$ условия (7) соответствуют однородному деформированному состоянию, вызванному равномерным растяжением по осям x и y. Для нахождения нулевого приближения положим $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_0 = \mathrm{const}$; $\sigma_0 > 0$ при $0 \leqslant t < t_*$. Из (6) получим, что после разгрузки при $t = t_*$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{1}{2}B\sigma_i^n t_*.$$

Легко видеть, что в силу (7) должно быть $\varepsilon_x = \varepsilon_y = c$, следовательно,

$$\sigma_0 = \left(\frac{2c}{Bt_*}\right)^{1/n}.$$

Для нахождения последующих приближений все напряжения, перемещения и деформации при $0 \leqslant t < t_*$ представим в виде рядов по степеням δ. С использованием методики [6] из (6) для скоростей полных деформаций k-того приближения нетрудно получить

$$\dot\varepsilon_{xk} = \frac{\partial \dot u_{xk}}{\partial x} = \frac{1}{E}\left(\dot\sigma_{xk} - \nu\dot\sigma_{yk}\right) + \frac{f_0}{E}\left(\sigma_{xk} - \nu_1\sigma_{yk}\right) + \eta_{x0k},$$
$$\dot\varepsilon_{yk} = \frac{\partial \dot u_{yk}}{\partial y} = \frac{1}{E}\left(\dot\sigma_{yk} - \nu\dot\sigma_{xk}\right) + \frac{f_0}{E}\left(\sigma_{yk} - \nu_1\sigma_{xk}\right) + \eta_{y0k}, \qquad (8)$$
$$\dot\varepsilon_{xyk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot u_{xk}}{\partial y} + \frac{\partial \dot u_{yk}}{\partial x}\right) = \frac{1}{E}(1+\nu)\sigma_{xyk} + \frac{f_0}{E}(1+\nu_1)\sigma_{xyk} + \eta_{xy0k},$$

где $\nu_1 = (3-n)/(3+n)$, $-1 < \nu_1 < 1/2$; $f_0 = BE\sigma_0^{n-1}(n+3)/4$; η_{x0k}, η_{y0k}, η_{xy0k} — функции координат и времени, зависящие от компонент напряжений не выше $(k-1)$ приближения. Например, для первого приближения $\eta_{x01} = \eta_{y01} = \eta_{xy01} = 0$, для второго

$$\eta_{x02} = \frac{B\sigma_0^{n-2}}{16}(n-1)\big[(n+9)\sigma_{x1}^2 + (n-3)\sigma_{y1}(\sigma_{y1}+2\sigma_{x1}) + 12\sigma_{xy1}^2\big],$$

$$\eta_{y02} = \frac{B\sigma_0^{n-2}}{16}(n-1)\big[(n+9)\sigma_{y1}^2 + (n-3)\sigma_{x1}(\sigma_{x1}+2\sigma_{y1}) + 12\sigma_{xy1}^2\big],$$

$$\eta_{xy02} = \frac{3B\sigma_0^{n-2}}{4}(n-1)\sigma_{xy1}(\sigma_{x1}+\sigma_{y1}).$$

Всюду в дальнейшем индексы k , входящие в (8), будем опускать, считая функции η_{x0}, η_{y0}, η_{xy0} известными для рассматриваемого приближения.

Для каждого приближения введём функцию напряжений $\Phi = \Phi(x, y, t)$, при этом [7]

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}. \tag{9}$$

Подставляя (8), (9) в известное уравнение совместности скоростей деформаций, получим

$$\Delta^2\dot{\Phi} + f_0\Delta^2\Phi = \dot{F}_0(x, y, t), \tag{10}$$

где Δ^2 — бигармонический оператор,

$$\dot{F}_0 = E\Big(\frac{\partial^2\eta_{xy0}}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\eta_{y0}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\eta_{x0}}{\partial y^2}\Big).$$

Интегрируя (10) как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $\Delta^2\Phi$ и учитывая, что $\Delta^2\Phi = 0$ при $t = 0$ (что соответствует упругому распределению напряжений), найдём

$$\Delta^2\Phi = e^{-f_0 t}\int_0^t \dot{F}_0 e^{f_0 t}dt. \tag{11}$$

Предположим, что функции η_{x0}, η_{y0}, η_{xy0} при любом $0 \leqslant t < t_*$ являются аналитическими в занятой пластиной области. Тогда возможен переход к комплексным переменным $z = x+iy$, $\bar{z} = x-iy$, при этом функции переменных и y аналитически продолжаются в область комплексных значений при подстановке $x = (z+\bar{z})/2$, $y = (z-\bar{z})/2i$, а z и $\bar{z}$ считаются независимыми комплексными переменными [8]. При указанной замене (11) примет вид

$$16\frac{\partial^4 U}{\partial z^2\partial\bar{z}^2} = -Ee^{-f_0 t}\int_0^t e^{f_0 t}\Big(\frac{\partial^2\dot{\varepsilon}}{\partial\bar{z}^2} + \frac{\partial^2\dot{\bar{\varepsilon}}}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2\dot{I}}{\partial z\partial\bar{z}}\Big)dt, \tag{12}$$

$$U(z,\bar{z},t) = \Phi\Big(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}, t\Big), \quad \varepsilon = \int_0^t\big(\eta_{y0} - \eta_{x0} + 2i\eta_{xy0}\big)dt,$$

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^t\big(\eta_{y0} - \eta_{x0} - 2i\eta_{xy0}\big)dt, \quad I = \int_0^t\big(\eta_{x0} + \eta_{y0}\big)dt.$$

Общее решение (12) представим в форме

$$U = U_0(z,\bar{z},t) + U_1(z,\bar{z},t) + U_2(z,\bar{z}), \tag{13}$$

где

$$U_0 = -\frac{E}{16}e^{-f_0 t}\int_0^t\big(\dot{F} + \dot{\bar{F}} + 2\dot{Q}\big)e^{f_0 t}dt, \quad F = \int_{z_0}^z\int_{z_0}^z \varepsilon dz dz,$$

$$\bar{F} = \int_{\bar{z_0}}^{\bar{z}} \int_{\bar{z_0}}^{\bar{z}} \varepsilon d\bar{z} d\bar{z}, \quad Q = \int_{\bar{z_0}}^{\bar{z}} \int_{z_0}^{z} I dz d\bar{z},$$

U_1, U_2 — бигармоничны, т.е. $U_i = \big(\bar{z}\varphi_i + z\bar{\varphi}_i + \chi_i + \bar{\chi}_i\big)/2$ $(i = 1, 2)$ [7], причём последние выбираются таким образом, что сумма $U_0 + U_1$ соответствует решению, дающему нулевые нагрузки на L в любой момент t $(0 \leqslant t < t_*)$, а U_2 — решению задачи теории упругости с искомыми граничными условиями. Отметим, что функции φ_2 и χ_2 не зависят от t, поскольку внешние нагрузки на L постоянны.

Компоненты напряжений определяются из соотношений (9), которые можно представить в виде

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}}, \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\sigma_{xy} = 4\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \tag{14}$$

Найдём общие напряжения для перемещений и их скоростей при $0 \leqslant t < t_*$. Для этого из первого уравнения (8) вычтем второе и прибавим третье, умноженное на $2i$. Это после введения комплексного перемещения $W = u_x + iu_y$ с учётом (14) даёт

$$2\frac{\partial \dot{W}}{\partial \bar{z}} = -\frac{4\,(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2 \dot{U}}{\partial \dot{z}^2} - \frac{4\,(1+\nu_1)}{E} f_0 \frac{\partial^2 \dot{U}}{\partial \dot{z}^2} - \dot{\bar{\varepsilon}},$$

отсюда

$$\dot{W} = -\frac{2\,(1+\nu)}{E}\frac{\partial \dot{U}}{\partial \bar{z}} - \frac{2\,(1+\nu_1)}{E} f_0 \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2}\int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} \dot{\bar{\varepsilon}} d\bar{z} + f_1\,(z, t)\,. \tag{15}$$

Входящую в (15) функцию $f_1 = f_1(z, t)$ определим из условия удовлетворения сумме двух уравнений (8), которое можно записать так:

$$\frac{\partial \dot{w}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{\bar{w}}}{\partial \bar{z}} = \frac{4\,(1-\nu)}{E}\frac{\partial^2 \dot{U}}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{4\,(1-\nu_1)}{E} f_0 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} + \dot{I}.$$

Подставляя в это соотношение выражение для $\dot{w}$ из (15), аналогичное представление для $\dot{\bar{w}}$ и учитывая (13), получим

$$f_1' - \frac{4}{E}(\dot{\varphi}' + f_0\varphi') = -\Big[\bar{f}_1' - \frac{4}{E}\big(\dot{\bar{\varphi}}' + f_0\bar{\varphi}'\big)\Big],$$

где $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, штрих обозначает дифференцирование по z. Последнее равенство возможно только при

$$f_1' - \frac{4}{E}\big(\dot{\varphi}' + f_0\varphi'\big) = ic_1(t),$$

где $c_1(t)$ — действительнозначащая функция. Отсюда

$$f_1(z, t) = \frac{4}{E}(\dot{\varphi} + f_0\varphi) + ic_1(t)z + c_2(t),$$

где $c_2(t)$ — комплекснозначная функция. Отбрасывая в выражении для f_1 последние два слагаемых, дающие только жёсткое смещение, с учётом (13), (15) после некоторых упрощений найдём

$$\dot{w} = \frac{2(\nu-\nu_1)}{E} f_0 \frac{\partial U_0}{\partial \bar{z}} + \frac{1+\nu}{8}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\big(\dot{F} - \varkappa\dot{\bar{F}} + 2\dot{Q}\big) + \\ + \frac{1+\nu}{E}\big(\varkappa\dot{\varphi} - z\dot{\bar{\varphi}}' - \dot{\bar{\psi}}\big) + \frac{1+\nu_1}{E} f_0\big(\varkappa_1\varphi - z\bar{\varphi}' - \bar{\psi}\big), \quad (16)$$

где

$$\psi = \psi_1 + \psi_2, \quad \psi_i = \varkappa_i', \quad i = 1, 2;$$
$$\varkappa = \frac{3-\nu}{1=\nu}, \quad \varkappa_1 = \frac{3-\nu_1}{1+\nu_1}.$$

Интегрируя (16) по времени от 0 до t и учитывая, что при $t = 0$ выполняется $F = \bar{F} = Q = 0$, после несложных выкладок получим

$$w = \frac{\nu_1 - \nu}{8} f_0 e^{-f_0 t}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\int_0^t \big(F + \bar{F} + 2Q\big)e^{f_0 t}dt + \frac{1+\nu}{8}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\big(F - \varkappa\bar{F} + 2Q\big) + \\ + \frac{1+\nu}{E}\big(\varkappa\varphi - z\bar{\varphi}' - \bar{\psi}\big) + \frac{1+\nu_1}{E} f_0 \int_0^t \big(\varkappa_1\varphi - z\bar{\varphi}' - \bar{\psi}\big)dt. \quad (17)$$

После снятия внешних нагрузок при $t = t_*$ произойдёт упругая разгрузка, поэтому выражения для остаточных напряжений и перемещений получаются из (13), (14) (17) путём вычитания членов, соответствующих функциям $\varphi = \varphi(z)$ и $\psi_2 = \psi_2(z)$. Так, для остаточных перемещений найдём

$$w^r = g(z, \bar{z}) + \frac{1+\nu_1}{E} f_0 t_* \big(\varkappa_1\varphi - z\bar{\varphi}_2' - \bar{\psi}_2\big), \quad (18)$$

где

$$g = \frac{\nu_1 - \nu}{8} f_0 e^{-f_0 t_*}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\int_0^{t_*} \big(F - \varkappa\bar{F} + 2Q\big)e^{f_0 t_*}dt + \frac{1+\nu}{8}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\big(F - \varkappa\bar{F} + 2\dot{Q}\big)\big|_{t=t_*} + \\ + \frac{1+\nu}{E}\big(\varkappa\varphi_1 - z\bar{\varphi}_1' - \bar{\varphi}_1\big)\big|_{t=t_*} + \frac{1+\nu_1}{E} f_0 \int_0^{t_*} \big(\varkappa_1\varphi_1 - z\bar{\varphi}_1' - \bar{\varphi}_1\big)dt.$$

Полученные выше общие соотношения для напряжений и перемещений определяют очевидную последовательность решения задачи о деформировании пластинки в заданное состояние. Она заключается в следующем. По известным величинам $\dot{\varepsilon}$, $\dot{\bar{\varepsilon}}$, $\dot{I}$, которые являются функциями z, $\bar{z}$ и t, находятся $\dot{F}$, $\dot{\bar{F}}$, Q, F, $\bar{F}$, Q, а следовательно, из (13) и $U_0 = U_0(z, \bar{z}, t)$. Затем на L вычисляется значение

$$f = \frac{\partial U_0}{\partial x} + i\frac{\partial U_0}{\partial y} = 2\frac{\partial U_0}{\partial \bar{z}},$$

которое компенсируется выбором функций $\varphi_1 = \varphi_1(z, t)$ и $\psi_1 = \psi_1(z, t)$ так, что суммарное решение, соответствующее $U_0 + U_1$, даёт ненулевые нагрузки на L при любом t $(0 \leqslant t < t_*)$. Подобная задача нахождения φ_1 и ψ_1 рассмотрена в [7].

После того как найдены функции $\varphi_1 = \varphi_1(z,t)$ и $\psi_1 = \psi_1(z,t)$, для определения $\varphi_2 = \varphi_2(z)$ и $\psi_2 = \psi_2(z)$ из (18) получим

$$\frac{1+\nu_1}{E} f_0 t_* \left(\varkappa_1 \varphi_2 - z\bar{\varphi}_2' - \bar{\psi}_2 \right) = w^r - g$$

на L, где правая часть этого равенства неизвестна. Эта задача также рассмотрена в [7].

Легко видеть, что если область плоскости z, занятая пластиной, конформно отображается на круг единичного радиуса плоскости ζ при помощи функции $z = \omega(\zeta)$, являющейся полиномом, то решение для любого приближения может быть получено в замкнутом виде. Соответствующие формулы для нахождения φ_i и ψ_i $(i = 1, 2)$ приведены в [7].

В качестве простейшего примера рассмотрим задачу о круглой пластинке единичного радиуса, которая деформируется под действием постоянных внешних нагрузок в течение времени t_* и которая при $t = t_*$ после снятия этих нагрузок должна иметь на границе радиальное и окружное остаточные перемещения вида

$$u_r = c + \delta\alpha\cos 3\theta, \quad u_\theta = \delta\beta\sin 3\theta,$$

где c, α, β — константы.

Используя изложенную выше методику и опуская достаточно громоздкие выкладки, для первого приближения получим

$$U_0 = \varphi_1 = \psi_1 = 0, \quad \varphi = \frac{a}{12B\sigma_0^{n-1}t_*} z^4, \quad \psi_2 = -\frac{b}{6B\sigma_0^{n-1}t_*} z^2,$$

где

$$\sigma_0 = \left(\frac{2c}{Bt_*}\right)^{1/n}, \quad a = \frac{4(\alpha+\beta)}{\varkappa_1}, \quad b = 2\left(a + \alpha - \beta\right);$$

для второго приближения —

$$U_0 = -\frac{AG(t)}{36} a^2 \left(\frac{(2n+3)\left(z^7\bar{z} + \bar{z}^7 z\right)}{14} + \frac{2n+51}{16} z^4 \bar{z}^4 \right) + \\ + \frac{AG(t)}{36} ab \left(\frac{z^6 + \bar{z}^6}{10} + 3z^3\bar{z}^3 \right) + \frac{3}{4} b^2 z^2 \bar{z}^2,$$

$$\varphi_1 = \frac{AG(t)}{18}\left[\frac{2n+3}{14} a^2 z^7 + \left(\frac{2n+51}{8} a^2 - \frac{9}{2} ab + \frac{3}{4} b^2 \right) z \right],$$

$$\psi_1 = -\frac{AG(t)}{30} abz^5, \quad G(t) = 1 - e^{-f_0 t}, \quad A = \frac{n-1}{B^2\sigma_0^{2n-1} t_*^2 (n+3)},$$

$$\varphi_2 = -\frac{A(n+3)}{36}\left[\frac{2}{7} a^2 z^7 + \left(\frac{2n+27}{2} a^2 - 12ab + 3b^2 \right) \frac{z}{2n} \right], \quad \psi_2 = \frac{A(n+3)}{45} abz^5.$$

Из вышеперечисленных формул вытекает, что для получения заданной формы пластинки к её границе следует приложить следующие постоянные усилия (с учётом двух приближений):

$$\sigma_r = \sigma_0 + \frac{2\delta}{3B\sigma_0^{n-1}t_*}\Big(\alpha - \beta + \frac{2(\alpha+\beta)}{\varkappa_1}\Big)\cos 3\theta - \\ - \frac{(n-1)\delta^2}{9B^2\sigma_0^{2n-1}t_*^2}\Big[\frac{3}{n}\Big(\frac{2(\alpha+\beta)^2}{\varkappa_1} + (\alpha-\beta)^2\Big) + \frac{8(\alpha^2-\beta^2)}{\varkappa_1}\cos 6\theta\Big],$$

$$\sigma_{r\theta} = \Big(\frac{2(\alpha+\beta)}{\varkappa_1} - \alpha + \beta\Big)\Big(\frac{2\delta}{3B\sigma_0^{n-1}t_*}\sin 3\theta - \frac{8(n-1)(\alpha+\beta)\delta^2}{9B^2\sigma_0^{2n-1}t_*^2\varkappa_1}\sin 6\theta\Big),$$

а при $t = t_*$ эти нагрузки снять.

В заключение отметим, что в случае линейной вязкоупругой среды Максвелла, т.е. при $n = 1$, задачи, аналогичные рассмотренным выше, могут быть решены без использования метода малого параметра, поскольку общие соотношения (6) между скоростями деформаций и напряжениями и линеаризованные (8) при $n = 1$, совпадают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ/ REFERENCES

1. И. Ю. Цвелодуб, “К теории нелинейной вязкоупругости” // *Изв. АН. СССР. Мех. тверд. тела*, 1982. №2. С. 70–75; I. Yu. Tsvelodub, “On the theory of nonlinear viscoelasticity”, *Mechanics of solids*, 1982, vol. 17, no. 2, pp. 59–63.
2. И. Ю. Цвелодуб, “Устойчивость в малом и её приложения к исследованию определяющих уравнений ползучести” // *Изв. АН. СССР. Мех. тверд. тела*, 1978. №2. С. 125–128. [I. Yu. Tsvelodub, “Stability in the small and its application to the study of determining creep equations”, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Tverd. Tela*, 1978, no. 2, pp. 125–128 (In Russian)].
3. И. Ю. Цвелодуб, “О построении определяющих уравнений установившейся ползучести” // *Изв. АН. СССР. Мех. тверд. тела*, 1979. №3. С. 104–110. [I. Yu. Tsvelodub, “On the construction of the governing equations of steady creep”, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Tverd. Tela*, 1979, no. 3, pp. 104–110 (In Russian)].
4. W. T. Koiter, “General theorems for elastic-plastic solids”, *Progress in Solid Mechanics*. V. 6, eds. I. N. Sneddon, R. Hill, Amsterdam, North-Holland, 1960, pp. 165–221; В. Т. Койтер, *Общие теоремы теории упруго-пластических сред*. М.: Иностр. лит., 1961. 79 с.
5. Ю. Н. Работнов, *Ползучесть элементов конструкций*. М.: Наука, 1966. 752 с. [Yu. N. Rabotnov, *Polzuchest' elementov konstruktsiy* [Creep of Structure Elements], Moscow, Nauka, 1966, 752 pp. (In Russian)]
6. Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов, *Метод возмущений в теории упругопластического тела*. М.: Наука, 1978. 208 с. [D. D. Ivlev, L. V. Ershov, *Metod vozmushcheniy v teorii uprugoplasticheskogo tela* [Perturbation Method in the Theory of an Elastic-Plastic Body], Moscow, Nauka, 1978, 208 pp. (In Russian)]
7. Н. И. Мусхелишвили, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*. М.: Наука, 1966. 707 с.; N. I. Muskhelishvili, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Netherlands, Springer, 1977, xxxi+732 pp. doi: 10.1007/978-94-017-3034-1.
8. И. Н. Векуа, *Новые методы решения эллиптических уравнений*. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. 296 с.; I. N. Vekua, *New Methods for Solving Elliptic Equations*, Amsterdam, North-Holland, 1967, xii+358 pp.

Поступила в редакцию 25/IV/2014;
в окончательном варианте — 13/V/2014;
принята в печать — 16/V/2014.

MSC: 74G75; 74C10, 74K20

CREEP THEORY INVERSE PROBLEM FOR NON-WORK-HARDENING BODY

I. Yu. Tsvelodub

M. A. Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch of RAS,
15, Lavrentyeva pr., Novosibirsk, 630090, Russian Federation.

The body formation by constant external forces in the conditions of the steady-state creep during set time problem is formulated and solved so that after removal of loadings the movements of points of a surface accepted preset values. The case of small deformations is considered. At certain assumptions and restrictions the uniqueness theorem for the solution of this task is proved. Applied questions of a problem of finding the external influences which are necessary for receiving a demanded shape of a body for set time in the conditions of rheological deformation after removal of external forces (taking into account elastic unloading) are analyzed. The analysis of a thin-walled isotropic plate for a case of a flat tension is made in details. The solution for movements is searched in the form of an expansion in small parameter. The model solution for a round plate of single radius under the influence of constant external loadings which should have the set field of movements after creep and elastic unloading is provided.

Keywords: *steady-state creep, inverse boundary problem, shaping, constant loadings, small deformations, Drukker's postulate for viscous deformations, round thin plate.*

Received 25/IV/2014;
received in revised form 13/V/2014;
accepted 16/V/2014.

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1320

Citation: I. Yu. Tsvelodub, "Creep theory inverse problem for non-work-hardening body", *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 2 (35), pp. 115–124. doi: 10.14498/vsgtu1320. (In Russian)
Author Details: *Igor Yu. Tsvelodub* (Dr. Phys. & Math. Sci.)), Head of Laboratory, Laboratory of Static Strength, Dept. of Structural Mechanics.

E-mail address: itsvel@hydro.nsc.ru