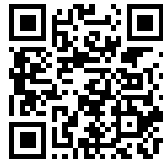


УДК 539.37:539.411.5

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПОЛИГОНАЛЬНЫХ ВНУТРЕННИХ ОПОР К КРУГЛЫМ ЖЁСТКОПЛАСТИЧЕСКИМ ПЛАСТИНАМ

*Т. П. Романова*

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
Россия, 630090, Новосибирск, ул. Институтская, 4/1.

Аннотация

Получено общее решение задачи о предельном поведении и динамическом изгибе идеальной жёсткопластической круглой пластины, шарнирно опертой по неподвижному полигональному контуру, расположенному внутри пластины. На пластину действует равномерно распределённая по поверхности кратковременная динамическая нагрузка высокой интенсивности взрывного типа. Показано, что существует несколько механизмов предельного и динамического деформирования пластин в зависимости от расположения контура опирания. Получены простые аналитические выражения для предельной нагрузки и максимального остаточного прогиба пластины. Определены оптимальное расположение опоры и количество сторон полигонального контура, при которых пластина имеет максимальную предельную нагрузку. Приведены численные примеры.

Ключевые слова: жёсткопластическая пластина, круглая пластина, внутренняя полигональная опора, взрывная нагрузка, предельная нагрузка, остаточный прогиб, оптимальное расположение опоры.

doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1312>

Введение. Изучение повреждаемости пластин, разнообразных по форме и способам закрепления и являющихся элементами многих технических конструкций, при воздействии нагрузок взрывного типа необходимо для анализа рисков и прогнозирования чрезвычайных ситуаций, а также создания таких элементов методами импульсной штамповки. Для решения указанных задач широкое распространение получила модель жёсткопластического тела [1–14]. В работе [13] на основе модели идеального жёсткопластического тела получено общее решение для произвольных криволинейных пластин, шарнирно опертых по внутреннему произвольному криволинейному гладкому контуру. В работе [3] рассмотрено оптимальное расположение дополнительной круговой опоры для шарнирно опертой, заземленной и свободной на контуре круглой пластины под действием импульса, когда все точки пластины, за исключением опорных, движутся в начальный момент времени с одинаковой скоростью. В настоящей работе проанализировано поведение круглых жёсткопластических пластин под действием равномерно распределённой динамической нагрузки взрывного типа; внешний контур пластин свободен, а опора

© 2014 Самарский государственный технический университет.

Образец для цитирования: Романова Т. П. Оптимальное расположение полигональных внутренних опор к круглым жёсткопластическим пластинам // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 3 (36). С. 94–105. doi: [10.14498/vsgtu1312](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1312).

Сведения об авторе: *Татьяна Павловна Романова* (к.ф.-м.н.; lab4nemir@gmail.com), старший научный сотрудник, лаборатория физики быстропотекающих процессов.

является правильным полигональным контуром и расположена внутри области пластины. Получены простые аналитические выражения для предельной нагрузки и максимального остаточного прогиба пластины. Определены оптимальное расположение опоры и количество сторон полигонального контура, при которых пластина имеет наименьшую повреждаемость с точки зрения максимума предельной нагрузки. Также определена оптимальная форма полигональной опоры при условии постоянства периметра контура опирания. Решения оптимизационных задач такого типа в литературе неизвестны.

1. Формулировка задачи и вывод определяющих уравнений. Рассмотрим круглую пластину из идеального жёсткопластического материала, шарнирно опертую по правильному n -угольному контуру L_1 , расположенному внутри пластины. Внешний контур пластины L_2 является свободным (рис. 1). Центры пластины и опорного многоугольника совпадают. Радиус окружности, вписанной в опорный контур, и радиус контура L_2 равны R_1 и R_2 соответственно, причём $R_1 \leq R_2 \sin \varphi$, где $\varphi = \pi(n - 2)/2n$. На пластину действует равномерно распределенная по поверхности динамическая нагрузка высокой интенсивности $P(t)$ взрывного типа, которая достигает максимального значения $P_{\max} = P(0)$ в начальный момент времени $t = 0$ и затем быстро убывает (t — текущее время). Прогибы считаются малыми.

Рассмотрим поведение пластины при нагрузках, незначительно превышающих предельные (так называемых «средних» нагрузках [1, 5, 10]). В этом случае в динамике рассматриваемой пластины из жёсткопластического материала возможны несколько схем деформирования в зависимости от количества сторон и размеров контура L_1 . При всех схемах пластина деформируется в виде совокупности n одинаковых жёстких областей, разделённых линейными пластическими шарнирами с нормальным изгибающим моментом, равным предельному значению M_0 . Обозначим область пластины внутри контура L_1 через S_1 , а остальную часть — через S_2 . Расположим декартову систему координат так, что ось Ox проходит по части опорного контура, а ось Oy — по радиусу окружности, вписанной в опорный контур (рис. 1). Скорости прогибов пластины в сечении $x = 0$ представлены на рис. 2–4. При схеме 1 (рис. 2)

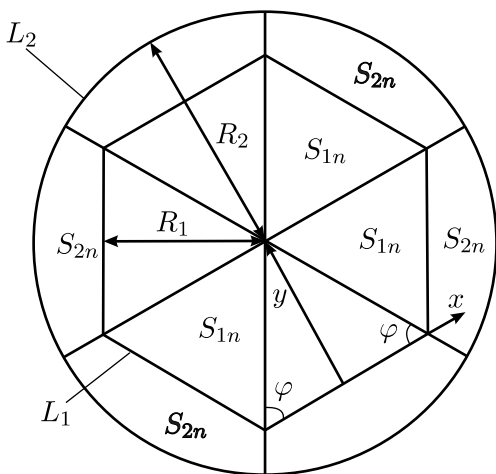


Рис. 1. [Figure 1]

каждая из n жёстких областей вращается вокруг соответствующего участка опорного контура L_1 , при этом область S_{1n} (n -ная часть области S_1) движется вниз в направлении действия нагрузки, область S_{2n} (n -ная часть области S_2) движется вверх. Схема, при которой область S_{1n} движется вверх, а область S_{2n} движется вниз, невозможна, так же как и в [13]. В схемах 2 (рис. 3) и 3 (рис. 4), как и в случае, рассмотренном в [13], на опорном контуре образуется пластический шарнир. Обе области S_{1n} и S_{2n} жёстко вращаются вниз вокруг опоры. При этом области S_{1n} и S_{2n} движутся независимо друг от друга и возможны варианты, когда одна из этих областей деформируется, а вторая остаётся жёсткой.

Рассмотрим подробно схему 1 (рис. 2). Обозначим угол поворота плоскости пластины в направлении действия нагрузки через α . Уравнение движения пластины выведем из принципа виртуальной мощности с использованием принципа Даламбера [15]:

$$K = A - N; \tag{1}$$

$$K = \iint_S \rho \ddot{u} \dot{u}^* ds, \quad A = \iint_S P(t) \dot{u}^* ds, \quad N = \sum_m \int_{l_m} M_m [\dot{\theta}^*]_m dl_m. \tag{2}$$

Здесь K , A , N — мощности инерционных, внешних и внутренних сил соот-

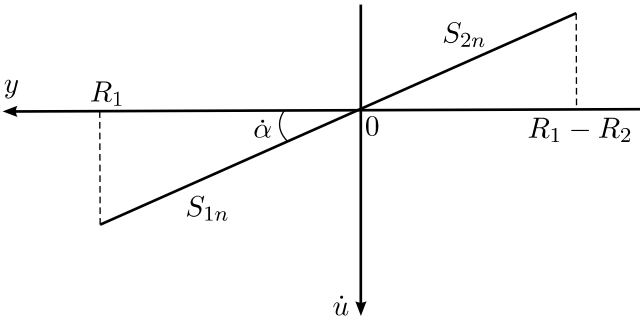


Рис. 2. [Figure 2]

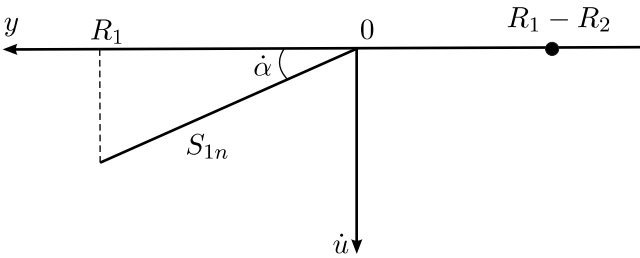


Рис. 3. [Figure 3]

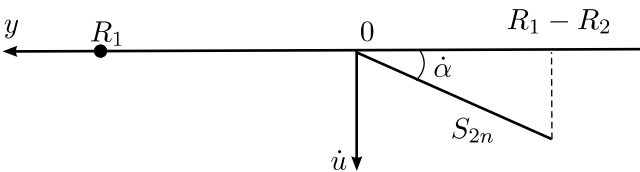


Рис. 4. [Figure 4]

ветственно; S — площадь пластины; ρ — поверхностная плотность материала пластины; u — прогиб; ds — элемент площади; l_m , m — линии разрыва угловых скоростей и их количество; M_m — изгибающий момент на l_m ; $[\theta^*]_m$ — разрыв угловой скорости на l_m ; dl_m — элемент линии l_m . Величинами с верхним индексом «*» обозначены кинематически допустимые скорости; точкой обозначена частная производная по времени t .

Скорости прогибов пластины для схемы 1 будут представлены в виде

$$\dot{u}(x, y, t) = \dot{\alpha}(t)y. \quad (3)$$

Мощности инерционных и внешних сил вычисляются следующим образом ($S_n = S_{1n} \cup S_{2n}$):

$$\begin{aligned} K &= n\rho\ddot{\alpha}\dot{\alpha}^* \iint_{S_n} y^2 ds = 2n\rho\ddot{\alpha}\dot{\alpha}^* \int_0^{R_2 \cos \varphi} \left(\int_{R_1 - \sqrt{R_2^2 - x^2}}^{-x \operatorname{tg} \varphi + R_1} y^2 dy \right) dx = \\ &= \frac{1}{12} n\rho\ddot{\alpha}\dot{\alpha}^* R_2^2 \left[(3R_2 \sin \varphi - 16R_1) R_2 \cos \varphi + 3(R_2^2 + 4R_1^2) \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right]; \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= nP(t)\dot{\alpha}^*(t) \iint_{S_n} y ds = 2nP(t)\dot{\alpha}^* \int_0^{R_2 \cos \varphi} \left(\int_{R_1 - \sqrt{R_2^2 - x^2}}^{-x \operatorname{tg} \varphi + R_1} y dy \right) dx = \\ &= \frac{1}{3} nP(t)\dot{\alpha}^*(t) R_2^2 \left[3R_1 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) - 2R_2 \cos \varphi \right]. \quad (5) \end{aligned}$$

На свободном контуре L_2 нормальный изгибающий момент M_{nn} равен нулю; на линиях, являющихся границами областей S_n , он равен M_0 . Разрыв угловой скорости на L_1 есть $[\dot{\theta}]_{L_1} = 0$. При повороте области S_n вокруг опоры на угол α угол между двумя смежными областями S_n будет равен $2\alpha \cos \varphi$ (при малых прогибах). Следовательно, разрыв угловой скорости на границах областей S_n равен $2\dot{\alpha} \cos \varphi$. Длина границы двух смежных областей S_n равна R_2 . Тогда для мощности внутренних сил (2) получаем

$$N = 2n\dot{\alpha}^* M_0 R_2 \cos \varphi. \quad (6)$$

Подставляя выражения (4)–(6) в (1), получаем уравнение движения для схемы деформирования 1:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \rho \ddot{\alpha} R_2 \left[(3R_2 \sin \varphi - 16R_1) R_2 \cos \varphi + 3(R_2^2 + 4R_1^2) \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right] &= \\ = P(t) R_2 \left[3R_1 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) - 2R_2 \cos \varphi \right] - 6M_0 \cos \varphi. \quad (7) \end{aligned}$$

Динамическое поведение по схеме 2 (рис. 3) для области S_1 , как защемленной правильной полигональной пластины, рассмотрено подробно в [5]. В этом случае, поскольку деформируется только внутренняя от опоры часть пластины, поведение и предельная нагрузка для области S_1 не зависят от величины

R_2 . Скорости прогибов пластины при схеме 2 определяются соотношениями (3) при $(x, y) \in S_1$. Выражения для мощностей (2) примут вид

$$\begin{aligned} K &= 2n\rho\ddot{\alpha}\dot{\alpha}^* \int_0^{R_1/\operatorname{tg}\varphi} \left(\int_0^{-x\operatorname{tg}\varphi+R_1} y^2 dy \right) dx = \frac{1}{6}n\rho\ddot{\alpha}\dot{\alpha}^* \frac{R_1^4}{\operatorname{tg}\varphi}, \\ A &= 2n\dot{\alpha}^* P(t) \int_0^{R_1/\operatorname{tg}\varphi} \left(\int_0^{-x\operatorname{tg}\varphi+R_1} y dy \right) dx = n\rho\dot{\alpha}^* P(t) \frac{R_1^3}{3\operatorname{tg}\varphi}, \\ N &= 4n\dot{\alpha}^* M_0 \frac{R_1}{\operatorname{tg}\varphi}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (1), получаем уравнение движения для схемы 2:

$$\frac{\rho\ddot{\alpha}R_1}{2} = P(t) - \frac{12M_0}{R_1^2}. \quad (8)$$

В случае схемы 3 (рис. 4) динамическое поведение области S_2 как круглой пластины, защемлённой по полигональному внутреннему контуру, можно получить на основе [10]. Скорости прогибов пластины для схемы 3 имеют вид

$$\dot{u}(x, y, t) = -\dot{\alpha}(t)y, \quad (x, y) \in S_2. \quad (9)$$

Выражения для мощностей (2) примут вид

$$\begin{aligned} K &= 2n\rho\ddot{\alpha}\dot{\alpha}^* \left[\int_0^{R_1/\operatorname{tg}\varphi} \left(\int_0^{\sqrt{R_2^2-x^2}-R_1} y^2 dy \right) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{R_1/\operatorname{tg}\varphi}^{R_2 \cos \varphi} \left(\int_{x\operatorname{tg}\varphi-R_1}^{\sqrt{R_2^2-x^2}-R_1} y^2 dy \right) dx \right] = \\ &= 2n\ddot{\alpha}\dot{\alpha}^* \left[(3R_2 \sin \varphi - 16R_1) R_2^3 \sin \varphi - 2R_1^4 + \right. \\ &\quad \left. + 3R_2^2 (R_2^2 + 4R_1^2) \operatorname{tg} \varphi \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right] \frac{\rho}{24 \operatorname{tg} \varphi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= 2n\dot{\alpha}^* P(t) \left[\int_0^{R_1/\operatorname{tg}\varphi} \left(\int_0^{\sqrt{R_2^2-x^2}-R_1} y dy \right) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{R_1/\operatorname{tg}\varphi}^{R_2 \cos \varphi} \left(\int_{x\operatorname{tg}\varphi-R_1}^{\sqrt{R_2^2-x^2}-R_1} y dy \right) dx \right] = \\ &= 2n\dot{\alpha}^* \left[2R_2^3 \sin \varphi + R_1^3 - 3R_1 R_2^2 \operatorname{tg} \varphi \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right] \frac{P(t)}{6 \operatorname{tg} \varphi}, \end{aligned}$$

$$N = 2n\dot{\alpha}^* M_0 R_2 \cos \varphi.$$

Подставляя последние выражения в (1), получаем уравнение деформирования пластины в случае схемы 3:

$$\begin{aligned} \rho \ddot{\alpha} \left[(3R_2 \sin \varphi - 16R_1) R_2^3 \sin \varphi - 2R_1^4 + 3R_2^2 (R_2^2 + 4R_1^2) \operatorname{tg} \varphi \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right] = \\ = 4P(t) \left[2R_2^3 \sin \varphi + R_1^3 - 3R_1 R_2^2 \operatorname{tg} \varphi \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right] - 24M_0 R_2 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (10)$$

Начальные условия имеют вид:

$$\dot{\alpha}(0) = \alpha(0) = 0. \quad (11)$$

2. Определение предельной нагрузки и схемы деформирования. Предельную нагрузку P_{0i} ($i = 1, 2, 3$) при разных схемах деформирования определяем из уравнений движения (7), (8), (10) при учете $\ddot{\alpha} = 0$:

$$P_{01} = \frac{6M_0 \cos \varphi}{R_2 [3R_1(\pi/2 - \varphi) - 2R_2 \cos \varphi]}, \quad (12)$$

$$P_{02} = \frac{12M_0}{R_1^2}, \quad (13)$$

$$P_{03} = \frac{6M_0 R_2 \sin \varphi}{2R_2^3 \sin \varphi + R_1^3 - 3R_1 R_2^2 \operatorname{tg} \varphi (\pi/2 - \varphi)}. \quad (14)$$

Предельная нагрузка для пластины определится как

$$P_0 = \min (P_{01}, P_{02}, P_{03}). \quad (15)$$

Номер i , соответствующий минимальному значению величин P_{0i} , определяет номер схемы деформирования пластины, $i = 1, 2, 3$.

3. Интегрирование уравнений движения. Для «средних» нагрузок при $P_{\max} > P_0$ движение пластины по схемам 1–3 определяется уравнениями (7), (8), (10), которые можно записать в виде

$$\ddot{\alpha}(t) = G_i [P(t) - P_{0i}], \quad (16)$$

где $i = 1, 2, 3$ — номер схемы,

$$G_1 = \frac{4 [3R_1 (\pi/2 - \varphi) - 2R_2 \cos \varphi]}{\rho [(3R_2 \sin \varphi - 16R_1) R_2 \cos \varphi + 3 (R_2^2 + 4R_1^2) (\pi/2 - \varphi)]},$$

$$G_2 = \frac{2}{\rho R_1},$$

$$G_3 = \frac{4 [2R_2^3 \sin \varphi + R_1^3 - 3R_1 R_2^2 \operatorname{tg} \varphi (\pi/2 - \varphi)]}{\rho [(3R_2 \sin \varphi - 16R_1) R_2^3 \sin \varphi - 2R_1^4 + 3R_2^2 \operatorname{tg} \varphi (R_2^2 + 4R_1^2) (\pi/2 - \varphi)]}.$$

Начальные условия имеют вид (11). В момент времени $t = T$ нагрузка снимается, и пластина движется далее по инерции.

Интегрируя уравнение (16), получаем ($0 \leq t \leq T$)

$$\dot{\alpha}(t) = G_i \left(\int_0^t P(\tau) d\tau - P_{0i} t \right), \quad \alpha(t) = G_i \left(\int_0^t \int_0^m P(\tau) d\tau dm - \frac{1}{2} P_{0i} t^2 \right). \quad (17)$$

При $T < t \leq t_f$ движение пластины происходит по инерции до остановки в момент времени t_f и описывается уравнением

$$\ddot{\alpha}(t) = -G_i P_{0i} \quad (18)$$

с начальными условиями на $\dot{\alpha}$, α в момент времени T , определяемыми из (17). Время t_f определяется из условия

$$\dot{\alpha}(t_f) = 0. \quad (19)$$

Интегрируя уравнение движения (18), получаем

$$\dot{\alpha}(t) = \dot{\alpha}(T) - G_i P_{0i}(t - T), \quad (20)$$

$$\alpha(t) = \alpha(T) + \dot{\alpha}(T)(t - T) - \frac{1}{2}G_i P_{0i}(t - T)^2. \quad (21)$$

Из уравнений (19), (20) следует

$$t_f = \frac{1}{P_{0i}} \int_0^T P(t) dt. \quad (22)$$

По правилу интегрирования по частям справедливо равенство

$$\int_0^t \int_0^t P(\tau) d\tau dt = T \int_0^T P(t) dt - \int_0^T t P(t) dt,$$

учитывая которое, из (21), (22) получаем выражение для остаточного угла поворота

$$\alpha(t_f) = G_i \left(\frac{1}{2P_{0i}} \left(\int_0^T P(t) dt \right)^2 - \int_0^T t P(t) dt \right).$$

Прогибы пластины определяются из равенств (4) для схем 1, 2 и (9) для схемы 3. Максимальный остаточный прогиб пластины вычисляется по следующей формуле:

$$w_{\max} = z_i \alpha(t_f) = z_i G_i \left(\frac{1}{2P_{0i}} \left(\int_0^T P(t) dt \right)^2 - \int_0^T t P(t) dt \right).$$

Здесь i – номер схемы; $z_1 = z_2 = R_1$, $z_3 = R_2 - R_1$.

4. Результаты численных расчётов. На рис. 5 приведены графики распределения предельной нагрузки P_0 (в безразмерном виде $P_0 R_2^2 / M_0$), полученные по формулам (12)–(15), в зависимости от расположения опорного контура (от отношения R_1 / R_2) при разном количестве сторон полигонального опорного контура.

Кривая 1 на рис. 5 изображает случай треугольного опорного контура ($n = 3$). В этом случае ($0 \leq R_1 / R_2 \leq 0.5$) пластина деформируется только по схеме 3; максимальная предельная нагрузка достигается при $R_1 / R_2 = 0.5$ и равна $P_0 = 13.755 M_0 / R_2^2$.

Ломаная линия 2 на рис. 5 изображает случай квадратного опорного контура ($n = 4$). В этом случае при $0 \leq R_1 / R_2 \leq 0.655$ реализуется схема 3,

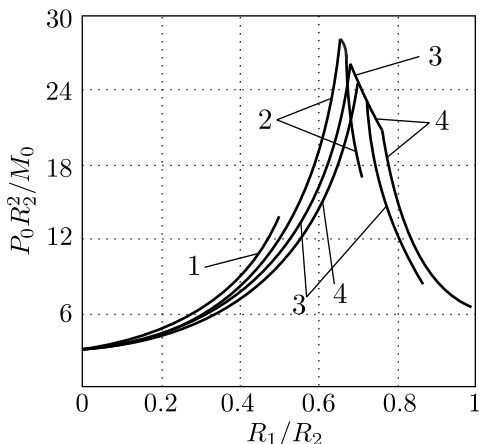


Рис. 5. [Figure 5]

при $0.655 \leq R_1/R_2 \leq 0.67$ — схема 2, а при $0.67 \leq R_1/R_2 \leq 0.707$ — схема 1; $\max P_0 = 28.1M_0/R_2^2$ достигается при $R_1/R_2 = 0.655$.

Ломаная линия 3 на рис. 5 относится к случаю $n = 6$. Для такой пластины при $0 \leq R_1/R_2 \leq 0.678$ реализуется схема 3, при $0.678 \leq R_1/R_2 \leq 0.718$ — схема 2, при $0.718 \leq R_1/R_2 \leq 0.866$ — схема 1; $\max P_0 = 26.1M_0/R_2^2$ достигается при $R_1/R_2 = 0.678$.

Ломаная линия 4 на рис. 5 изображает случай $n = 20$ (практически круговая опора). Для этого случая при $0 \leq R_1/R_2 \leq 0.697$ реализуется схема 3, при $0.697 \leq R_1/R_2 \leq 0.76$ — схема 2, при $0.76 \leq R_1/R_2 \leq 0.988$ — схема 1; $\max P_0 = 24.7M_0/R_2^2$ достигается при $R_1/R_2 = 0.697$.

Из расчётов видно, что при квадратной форме опорного контура максимальная предельная нагрузка пластины будет самой большой по сравнению с максимальными предельными нагрузками, полученными для других форм опорного контура. Следовательно, наименьшая повреждаемость будет достигать при квадратном внутреннем опорном контуре с радиусом вписанной окружности $R_1 = 0.678R_2$.

Поскольку при любом $n \geq 4$ максимальная предельная нагрузка соответствует параметру R_1 , при котором схема 2 переходит в схему 3, то, приравнявая P_{02} и P_{03} в равенствах (13), (14), получаем алгебраическое уравнение для определения оптимального значения R_1 ($\varphi = \pi(n-2)/2n$):

$$2(2R_2^3 \sin \varphi + R_1^3 - 3R_1R_2^2 \operatorname{tg} \varphi (\pi/2 - \varphi)) = R_2R_1^2 \sin \varphi.$$

При $n \rightarrow \infty$ получаем решение для круглой пластины с внутренней круглой опорой, для которой максимальная предельная нагрузка $P_0 = 24.1M_0/R_2^2$ достигается при $R_1/R_2 = 0.7$. Такое расположение опоры совпадает с оптимальным, полученным в [3] на основе точного решения с использованием условия пластичности Йогансена. При $n \rightarrow \infty$ и $R_1 = R_2$ получаем случай круглой пластины, шарнирно опёртой по контуру, которая деформируется по схеме 1. Предельная нагрузка для неё получается предельным переходом из формулы (12) и составляет $P_0 = 6M_0/R_2^2$. Эта предельная нагрузка и остаточные прогибы пластины совпадают с точным решением задачи при условии пластичности Треска [1].

В случае постоянного периметра $D = 2nR_1/\text{tg } \varphi$ опорного контура L_1 формулы (12)–(14) при обозначении $d = D/(2\pi R_2)$ принимают вид

$$P_{01} = \frac{6M_0n \cos \varphi}{R_2^2 [3\pi \text{tg } \varphi (\pi/2 - \varphi) d - 2n \cos \varphi]}, \quad (23)$$

$$P_{02} = \frac{12M_0n^2}{(\pi d R_2 \text{tg } \varphi)^2}, \quad (24)$$

$$P_{03} = \frac{6M_0 \sin \varphi}{R_2^2 [2 \sin \varphi + (d\pi \text{tg } \varphi/n)^3 - 3d\pi \text{tg}^2 \varphi (\pi/2 - \varphi)/n]}. \quad (25)$$

На рис. 6 приведены графики распределения предельной нагрузки P_0 (в безразмерном виде $P_0 R_2^2/M_0$), полученные по формулам (23)–(25), (15) в зависимости от параметра d (безразмерный периметр опорного контура L_1) при разном количестве сторон полигонального опорного контура.

Кривая 1 на рис. 6 изображает случай $n = 3$: пластина деформируется только по схеме 3; $0 \leq d \leq 0,827$; $\max P_0 = 13.755M_0/R_2^2$ достигается при $d = 0.827$.

Ломаные линии 2–4 на рис. 6 изображают случаи $n = 4$ ($\max P_0 = 28.1M_0/R_2^2$), $n = 5$ ($\max P_0 = 26.8M_0/R_2^2$), $n = 6$ ($\max P_0 = 26.1M_0/R_2^2$) соответственно.

Ломаная линия 5 на рис. 6 изображает случай круглой опоры ($n \rightarrow \infty$); при $0 \leq d \leq 0.697$ реализуется схема 3, при $0.697 \leq d \leq 0.76$ – схема 2, при $0.76 \leq d \leq 0.99$ – схема 1; $\max P_0 = 24.7M_0/R_2^2$ достигается при $d = 0.697$.

Из рис. 6 видно, что при заданном периметре опирания D треугольная форма контура опоры является самой нежелательной. При $0 \leq d \leq 0.697$ и $d = 1$ оптимальной является круглая опора; при $0.748 \leq d \leq 0.764$ – шестиугольная опора, при $0.764 \leq d \leq 0.81$ – пятиугольная, при $0.81 \leq d \leq 0.9$ – квадратная.

Оптимальное количество сторон при $0.9 < d < 1$ определим так. Из нера-

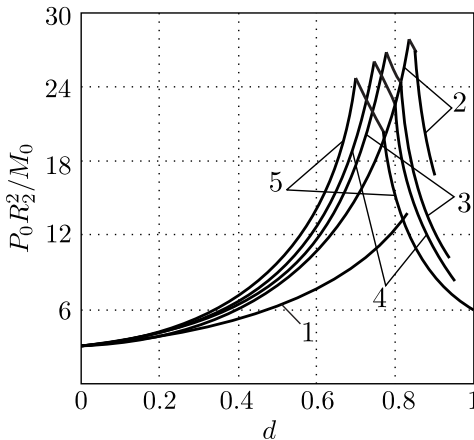


Рис. 6. [Figure 6]

венства $R_1 \leq R_2 \sin \varphi$ и выражения $\varphi = \pi(n - 2)/2n$ следует

$$d \leq \frac{n}{\pi} \cos \frac{\pi(n - 2)}{2n}. \quad (26)$$

Тогда максимальное целое значение n , удовлетворяющее неравенству (26), будет оптимальным количеством сторон при $0.9 < d < 1$.

Таким образом, изменяя количество сторон и расположение опорного полигонального контура внутри области пластины, можно найти такую опору, при которой пластина будет наиболее прочной.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 14-01-00102-а).

ORCID

Tatiana Romanova: <http://orcid.org/0000-0002-8563-1076>

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Hopkins H. G., Prager W. On the dynamics of plastic circular plates // *Z. Angew. Math. Phys.*, 1954. vol. 5, no. 4. pp. 317–330. doi: [10.1007/BF01587827](https://doi.org/10.1007/BF01587827).
2. Jones N. A literature review of the dynamic plastic response of structures // *The Shock and Vibration Digest*, 1975. vol. 7, no. 8. pp. 89–105. doi: [10.1177/058310247500700809](https://doi.org/10.1177/058310247500700809).
3. Оленев Г. М. Оптимальное расположение дополнительных опор к жёсткопластическим круглым пластинкам в случае импульсного нагружения // *Уч. зап. Тартуского гос. ун-та*, 1983. Т. 659. С. 30–41.
4. Комаров К. Л., Немировский Ю. В. *Динамика жёсткопластических элементов конструкций*. Новосибирск: Наука, 1984. 234 с.
5. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамический изгиб пластических полигональных плит // *ПМТФ*, 1988. №4. С. 149–156.
6. Reid S. R., Harrigan J. J. Transient effects in the quasi-static and dynamic internal inversion and nosing of metal tubes // *International Journal of Mechanical Sciences*, 1998. vol. 40, no. 2–3. pp. 263–280. doi: [10.1016/S0020-7403\(97\)00054-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(97)00054-4).
7. Velasco J. I., Martínez A. B., Arencón D., Rodríguez-Pérez M. A., De Saja J. A. Application of instrumented falling dart impact to the mechanical characterization of thermoplastic foams // *Journal of Materials Science*, 1999. vol. 34, no. 3. pp. 431–438. doi: [10.1023/A:1004565822502](https://doi.org/10.1023/A:1004565822502).
8. Jones N., Jones C. Inelastic failure of fully clamped beams and circular plates under impact loading // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2. vol. 216. pp. 133–150. doi: [10.1243/0954406021525070](https://doi.org/10.1243/0954406021525070).
9. Casapulla C., Maione A. Structural response to transverse impact loading. Some orders of magnitude // *Advances in Earthquake Engineering*, 2003. vol. 13. pp. 131–140.
10. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Моделирование динамического поведения двусвязной жесткопластической криволинейной пластины, закрепленной по внутреннему контуру / *Труды пятой Всероссийской научной конференции с международным участием* (29–31 мая 2008 г.). Часть 1: Математические модели механики, прочности и надёжности элементов конструкций / Матем. моделирование и краев. задачи. Самара: СамГТУ, 2008. С. 197–207, <http://mi.mathnet.ru/mmkz1021>.
11. Romanova T., Nemirovsky Yu. Dynamic rigid-plastic deformation of arbitrarily shaped plates // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2008. vol. 3, no. 2. pp. 313–334. doi: [10.2140/jomms.2008.3.313](https://doi.org/10.2140/jomms.2008.3.313).
12. Jones N. Impact loading of ductile rectangular plates // *Thin-Walled Structures*, 2012. vol. 50, no. 1. pp. 68–75. doi: [10.1016/j.tws.2011.09.006](https://doi.org/10.1016/j.tws.2011.09.006).
13. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Моделирование предельного и динамического поведения жёсткопластической пластины произвольной формы с внутренней криволинейной опорой // *Вестн. Чувашского гос. педагог. ун-та. Сер. Механика предельного состояния*, 2013. №3(17). С. 89–96, <http://predel.chgpu.edu.ru/predel/17/index.pdf>.

14. Chen F. L., Yu T. X. Membrane factor method for large deflection response of beams and plates to intense dynamic loading // *WIT Transactions on the Built Environment*, 2014. vol. 141. pp. 59–71. doi: [10.2495/SUSI140061](https://doi.org/10.2495/SUSI140061).
15. Ерхов М. И. *Теория идеально пластических тел и конструкций*. М.: Наука, 1978. 352 с.

Поступила в редакцию 22/IV/2014;
в окончательном варианте — 18/VIII/2014;
принята в печать — 27/VIII/2014.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki. 2014. Issue 3 (36). Pp. 94–105
J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci. 2014. Issue 3 (36). Pp. 94–105]

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1312>

MSC: 74P99, 74K20, 74C99

THE OPTIMAL LOCATION OF THE POLYGONAL INTERNAL SUPPORTS TO THE CIRCULAR RIGID-PLASTIC PLATES

T. P. Romanova

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics,
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
4/1, Institutskaya st., Novosibirsk, 630090, Russian Federation.

Abstract

The general solution of a problem of the limit behavior and dynamic bend is obtained for the perfect rigid-plastic circular plates, hinge supported on immobile polygonal contour, located inside the plate. The plate is subjected to short-term dynamic load of explosive type with high intensity, uniformly distributed over the surface. It is shown that there are several mechanisms of limit and dynamic deformation of plates depending on the location of the support contour. The simple analytic expressions are obtained for the limit load and maximum final deflection of plates. The optimal location of support and the number of sides of the polygonal contour are determined, at which the plate has maximum limit load. Numerical examples are given.

Keywords: rigid-plastic plate, circular plate, internal polygonal support, explosive load, limit load, final deflection, optimal location of support.

doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1312>

Acknowledgments. This work was supported by Russian Foundation for Basic Research (Project No. 14-01-00102-a).

ORCID

Tatiana Romanova: <http://orcid.org/0000-0002-8563-1076>

© 2014 Samara State Technical University.

How to cite Reference: Romanova T. P. The Optimal Location of the Polygonal Internal Supports to the Circular Rigid-Plastic Plates, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 3(36), pp. 94–105. doi: [10.14498/vsgtu1312](https://doi.org/10.14498/vsgtu1312). (In Russian)

Author Details: *Tatiana P. Romanova* (Cand. Phys. & Math. Sci.; lab4nemir@gmail.com), Senior Researcher, Lab. of the Physics of Fast Processes.

REFERENCES

1. Hopkins H. G., Prager W. On the dynamics of plastic circular plates, *Z. Angew. Math. Phys.*, 1954, vol. 5, no. 4, pp. 317–330. doi: [10.1007/BF01587827](https://doi.org/10.1007/BF01587827).
2. Jones N. A literature review of the dynamic plastic response of structures, *The Shock and Vibration Digest*, 1975, vol. 7, no. 8, pp. 89–105. doi: [10.1177/058310247500700809](https://doi.org/10.1177/058310247500700809).
3. Olenev G. M. Optimal location of additional supports to rigid-plastic circular plates in case of impulse loading, *Uch. Zap. Tartu. Gos. Univ.*, 1983, vol. 659, pp. 30–41 (In Russian).
4. Komarov K. L., Nemirovskii Yu. V. *Dinamika zhestkoplasticheskikh elementov konstrukttsii* [Dynamics of rigidly plastic elements of structures]. Novosibirsk, Nauka, 1984, 234 pp. (In Russian)
5. Nemirovskii Yu. V., Romanova T. P. Dynamic bending of polygonal plastic slabs, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1988, vol. 29, no. 4, pp. 591–597. doi: [10.1007/BF00852503](https://doi.org/10.1007/BF00852503).
6. Reid S. R., Harrigan J. J. Transient effects in the quasi-static and dynamic internal inversion and nosing of metal tubes, *International Journal of Mechanical Sciences*, 1998, vol. 40, no. 2–3, pp. 263–280. doi: [10.1016/S0020-7403\(97\)00054-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(97)00054-4).
7. Velasco J. I., Martínez A. B., Arencón D., Rodríguez-Pérez M. A., De Saja J. A. Application of instrumented falling dart impact to the mechanical characterization of thermoplastic foams, *Journal of Materials Science*, 1999, vol. 34, no. 3, pp. 431–438. doi: [10.1023/A:1004565822502](https://doi.org/10.1023/A:1004565822502).
8. Jones N., Jones C. Inelastic failure of fully clamped beams and circular plates under impact loading, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2, vol. 216, pp. 133–150. doi: [10.1243/0954406021525070](https://doi.org/10.1243/0954406021525070).
9. Casapulla C., Maione A. Structural response to transverse impact loading. Some orders of magnitude, *Advances in Earthquake Engineering*, 2003, vol. 13, pp. 131–140.
10. Nemirovskii Yu. V., Romanova T. P. Modeling of dynamic behaviour of doubly connected rigid-plastic curved plates supported on the internal contour, *Proceedings of the Fifth All-Russian Scientific Conference with international participation (29–31 May 2008)*. Part 1, Matem. Mod. Kraev. Zadachi. Samara, Samara State Technical Univ., 2008, pp. 197–207 (In Russian), <http://mi.mathnet.ru/eng/mmkz1021>.
11. Romanova T., Nemirovsky Yu. Dynamic rigid-plastic deformation of arbitrarily shaped plates, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2008, vol. 3, no. 2, pp. 313–334. doi: [10.2140/jomms.2008.3.313](https://doi.org/10.2140/jomms.2008.3.313).
12. Jones N. Impact loading of ductile rectangular plates, *Thin-Walled Structures*, 2012, vol. 50, no. 1, pp. 68–75. doi: [10.1016/j.tws.2011.09.006](https://doi.org/10.1016/j.tws.2011.09.006).
13. Nemirovskii Yu. V., Romanova T. P. Modelling of limit and dynamic behaviour of the rigid-plastic plate of any form with the internal curvilinear support, *Vestn. Chuvashskogo gos. pedagog. un-ta. Ser. Mekhanika predel'nogo sostoianiiia*, 2013, no. 3(17), pp. 89–96 (In Russian), <http://predel.chgpu.edu.ru/predel/17/index.pdf>.
14. Chen F. L., Yu T. X. Membrane factor method for large deflection response of beams and plates to intense dynamic loading, *WIT Transactions on the Built Environment*, 2014, vol. 141, pp. 59–71. doi: [10.2495/SUSI140061](https://doi.org/10.2495/SUSI140061).
15. Erkhov M. I. *Teoriia ideal'no plasticheskikh tel i konstrukttsii* [Theory of ideal plastic solids and structures]. Moscow, Nauka, 1978, 352 pp. (In Russian)

Received 22/IV/2014;
 received in revised form 18/VIII/2014;
 accepted 27/VIII/2014.