

УДК 539.376

## ПРИБЛИЖЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРУБЫ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ВНЕШНИМ КОНТУРОМ В УСЛОВИЯХ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

*А. Д. Москалик*Самарский государственный технический университет,  
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

### Аннотация

Рассмотрена краевая задача установившейся ползучести для толсто-стенной трубы с внешним эллиптическим контуром, находящейся под внутренним давлением. Приближенное аналитическое решение данной задачи строится для плоского деформированного состояния методом малого параметра до второго приближения включительно. Используется гипотеза несжимаемости материала для деформаций ползучести. В качестве малого параметра используется величина сжатия эллипса для внешнего контура трубы. Анализ аналитического решения выполнен в зависимости от параметра нелинейности установившейся ползучести и параметра сжатия эллипса — отношения разности большой и малой полуоси эллипса к большой полуоси, являющейся внешним радиусом невозмущенной толстостенной трубы. Показано, что при возрастании величины сжатия эллипса до 0.1 внешнего радиуса трубы тангенциальные напряжения в опасном сечении при  $\theta = \pi/2$  возрастают в 1.7–1.8 раза. Приводятся результаты расчетов в табличной и графической форме.

**Ключевые слова:** эллиптический внешний контур трубы, установившаяся ползучесть, приближенное аналитическое решение, метод малого параметра, первое и второе приближения.

doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1365>

**Введение.** Разработка аналитических методов решения краевых задач ползучести для элементов конструкций с возмущенными границами вследствие физической нелинейности определяющих реологических соотношений представляет трудноразрешимую проблему. Один из подходов состоит в линеаризации граничных условий и реологических соотношений на основе метода малого параметра. Постановка задачи установившейся ползучести с возмущенными границами методом малого параметра приведена в монографии Л. М. Качанова [1], где, в частности, для несоосной трубы построено решение

© 2014 Самарский государственный технический университет.

### Образец для цитирования

Москалик А. Д. Приближенное аналитическое решение задачи для трубы с эллиптическим внешним контуром в условиях установившейся ползучести // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 4 (37). С. 65–84. doi: [10.14498/vsgtu1365](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1365).

### Сведения об авторе

*Анна Давидовна Москалик* ([annmoskalik1@gmail.com](mailto:annmoskalik1@gmail.com)), аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

в первом приближении. Имеются попытки решения задачи с возмущенными границами в работах [2–4].

Однако, что касается внешних краевых задач реологии (с возмущенными границами), здесь следует отметить ряд работ по устойчивости однородного растяжения полосы или цилиндра из вязкого материала, чувствительного к скорости деформирования, по отношению к малым возмущениям регулярной или произвольной формы свободных границ, решенных методом малого параметра [5–8]. С другой стороны, развиваются методы решения краевых задач с возмущенным по пространственным переменным полем реологических характеристик (внутренние краевые задачи). Так, в работах [9–12] методом малого параметра построены аналитические решения для полей напряжений и скоростей деформаций вплоть до третьего приближения в стохастической краевой задаче установившейся ползучести толстостенной трубы под действием внутреннего давления, а в работах [13,14] приведены решения аналогичной задачи ползучести для растягиваемой плоскости.

Детально метод возмущений (малого параметра) для упругопластических тел изложен в монографии [15] и систематически развивался научной школой Д. Д. Ивлева в работах его учеников [16–19 и др.] на случай различных условий пластичности, составных упругопластических тел, различных типов концентраторов и т. д. Так, эллиптическая форма отверстия в тонкой пластине рассмотрена в работе [20], упругопластическое состояние пространства, ослабленного цилиндрической полостью, под действием давления, продольных и сдвиговых усилий — в диссертации [21]. Для эллиптической упругопластической трубы построено первое приближение методом малого параметра в монографии [22]. Следует отметить, что все подобные задачи решались в упругопластической области.

Постановка задач для ползучести имеется в крайне ограниченном числе работ. Целью данной работы является построение приближенного аналитического решения задачи об установившейся ползучести толстостенной трубы с эллиптическим внешним контуром, находящейся под внутренним давлением, методом малого параметра с учетом первого и второго приближений.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается толстостенная труба под действием внутреннего давления  $q$  с внутренним контуром в виде окружности радиуса  $r = h$ , внешним эллиптическим контуром с большой полуосью  $r = a$  и малой полуосью  $r = b$ .

В качестве малого параметра принимается величина сжатия эллипса

$$\delta = (a - b)/a = 1 - \sqrt{1 - e^2}, \quad (1)$$

где  $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$  — эксцентриситет эллипса (см. рис. 1). При получении приближенного аналитического решения предполагается, что упругие деформации малы по сравнению с деформациями ползучести и ими можно пренебречь. С физической точки зрения это означает, что рассматриваются установившиеся поля скоростей деформаций ползучести и напряжений, т.е. деформацией ползучести, накопленной на первой стадии и вызванной перераспределением напряжений от упругого состояния до состояния установившейся ползучести, пренебрегаем.

Разложение тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ , тензора скоростей деформаций ползучести  $\dot{\epsilon}_{ij}$  и вектора скоростей перемещений  $\dot{u}_i$  по малому параметру до

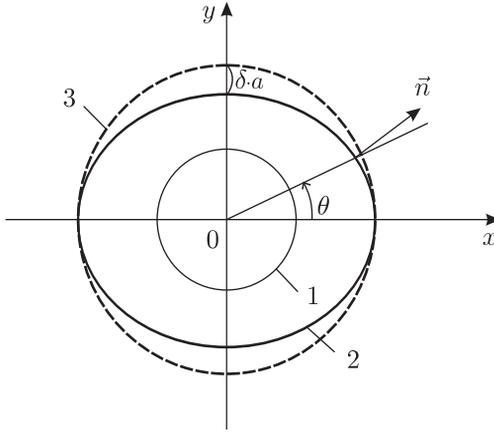


Рис. 1. Схема трубы с возмущенной внешней границей: 1 — внутренний контур трубы  $r = h$ ; 2 — внешний эллиптический контур трубы; 3 — внешний контур трубы  $r = a$  для осесимметричного случая

[Figure 1. The scheme of a tube with perturbed outer boundary: 1 — the inner contour of the tube  $r = h$ ; 2 — the outer elliptic contour of the tube; 3 — the outer contour of the tube  $r = b$  for axisymmetric case;  $\delta$  is the small parameter]

членов второго порядка имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(0)} + \delta\sigma_{ij}^{(1)} + \delta^2\sigma_{ij}^{(2)} + O(\delta^3), \\ \dot{\varepsilon}_{ij} &= \dot{\varepsilon}_{ij}^0 + \delta\dot{\varepsilon}_{ij}^{(1)} + \delta^2\dot{\varepsilon}_{ij}^{(2)} + O(\delta^3), \\ \dot{u}_i &= \dot{u}_i^0 + \delta\dot{u}_i^{(1)} + \delta^2\dot{u}_i^{(2)} + O(\delta^3),\end{aligned}$$

где индексы 0, 1 и 2 соответствуют нулевому, первому и второму приближениям.

Уравнение эллиптического внешнего контура трубы в полярных координатах имеет вид (если принять центр эллипса за полюс):

$$r = b/\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta}.$$

Выражая эксцентриситет в последнем соотношении через сжатие  $\delta$  с использованием формулы (1), имеем

$$r = a(1 - \delta)/\sqrt{1 + (\delta^2 - 2\delta) \cos^2 \theta}.$$

Раскладывая полученное выражение для  $r$  в степенной ряд по параметру  $\delta$  и ограничиваясь членами второго порядка включительно, получаем

$$r = a + \frac{a}{2}(\cos 2\theta - 1)\delta + \frac{3a}{16}(\cos 4\theta - 1)\delta^2. \quad (2)$$

Задача решается в условиях плоского деформированного состояния, т. е. когда

$$\dot{\varepsilon}_{zz} = 0.$$

Предполагается несжимаемость материала для скоростей деформаций на стадии установившейся ползучести, что находит экспериментальное подтверждение [23, 24]:

$$\dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = 0. \quad (3)$$

Постановка задачи включает в себя уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = -r \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} - 2\sigma_{r\theta}, \quad (5)$$

которые линейны относительно компонент напряжений и, следовательно, выполняются для каждого приближения.

Аналогично, для каждого приближения выполняются уравнения совместности деформаций:

$$\dot{\varepsilon}_{rr} = \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial r}, \quad \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\dot{u}_r}{r}, \quad \dot{\varepsilon}_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{u}_\theta}{\partial r} - \frac{\dot{u}_\theta}{r} \right). \quad (6)$$

В качестве определяющих соотношений используются соотношения теории установившейся ползучести со степенным законом:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2} A \sigma_e^{n-1} S_{ij}, \quad (7)$$

где  $n$ ,  $A$  — постоянные характеристики материала,  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk} \delta_{ij} / 3$  — девиатор напряжений,  $\sigma_e$  — интенсивность напряжений для случая плоской деформации

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (4\sigma_{r\theta})^2 \right]^{1/2}.$$

Разложение  $\sigma_e$  по малому параметру  $\delta$  позволяет определить  $\sigma_e^{n-1}$ , представленное в виде степенного ряда по  $\delta$  до членов второго порядка включительно:

$$\begin{aligned} \sigma_e^{n-1} = & \left( \frac{\sqrt{3} |\Delta\sigma^{(0)}|}{2} \right)^{n-1} \left[ 1 + \delta \frac{(n-1)\Delta\sigma^{(1)}}{|\Delta\sigma^{(0)}|} + \right. \\ & \left. + \delta^2 \frac{n-1}{2} \left( \frac{(n-2)[\Delta\sigma^{(1)}]^2 + 2\Delta\sigma^{(2)}\Delta\sigma^{(0)} + 4[\sigma_{r\theta}^{(1)}]^2}{[\Delta\sigma^{(0)}]^2} \right) \right], \quad (8) \end{aligned}$$

где для удобства записи введены обозначения:

$$\Delta\sigma^{(k)} = \sigma_{rr}^{(k)} - \sigma_{\theta\theta}^{(k)},$$

$k = 0, 1, 2$  — номера приближений.

Формула (8) используется в определяющих соотношениях (7) с учетом разложения по степеням малого параметра  $\delta$  до членов второго порядка включительно:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{rr} = & \dot{\varepsilon}_{rr}^0 + \delta \dot{\varepsilon}_{rr}^{(1)} + \delta^2 \dot{\varepsilon}_{rr}^{(2)} = \\ = & \frac{1}{4} L r^s \left[ \Delta\sigma^{(0)} + \delta n \Delta\sigma^{(1)} + \delta^2 \left( n \Delta\sigma^{(2)} + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n[\Delta\sigma^{(1)}]^2 + 4[\sigma_{r\theta}^{(1)}]^2}{\Delta\sigma^{(0)}} \right) \right], \quad (9) \end{aligned}$$

$$\dot{\varepsilon}_{r\theta} = \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(0)} + \delta \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(1)} + \delta^2 \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(2)} = Lr^s \left[ \delta \sigma_{r\theta}^{(1)} + \delta^2 \left( \sigma_{r\theta}^{(2)} + \frac{(n-1)\Delta\sigma^{(1)}\sigma_{r\theta}^{(1)}}{\Delta\sigma^{(0)}} \right) \right]. \quad (10)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$Q = \frac{q}{(a/h)^p - 1}, \quad p = \frac{2}{n}, \quad L = 3A \left( \frac{\sqrt{3}}{n} a^p Q \right)^{n-1}, \quad s = p - 2.$$

Решение для нулевого приближения входит в соотношения (9), (10) и представляет собой решение для соосной толстостенной трубы под внутренним давлением, которое, согласно [24], имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(0)}(r) &= Q \left[ 1 - \left( \frac{a}{r} \right)^p \right], \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)}(r) &= Q \left[ 1 - (1-p) \left( \frac{a}{r} \right)^p \right], \\ \sigma_{zz}^{(0)}(r) &= Q \left[ 1 - (1+p) \left( \frac{a}{r} \right)^p \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

При этом  $\sigma_{r\theta}^{(0)} = 0$  ввиду симметричности задачи для нулевого приближения.

Поскольку граница при  $r = h$  не возмущена и задано давление  $q$ , линейризованное граничное условие на внутреннем радиусе трубы для последующих (после нулевого) приближений представимо в виде

$$\sigma_{rr}^{(k)}|_{r=h} = 0, \quad \sigma_{r\theta}^{(k)}|_{r=h} = 0, \quad (12)$$

$k = 1, 2$  — номера приближений.

Линейризованное граничное условие для первого приближения при  $r = a$ , согласно [15], зависит от нулевого приближения (11):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(1)}|_{r=a} &= -\frac{d\sigma_{rr}^{(0)}}{dr} \cdot \frac{a}{2} (\cos 2\theta - 1) = \frac{Qp}{2} - \frac{Qp}{2} \cos 2\theta, \\ \sigma_{r\theta}^{(1)}|_{r=a} &= \Delta\sigma^{(0)} \sin 2\theta = -Qp \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнения (3)–(6), (9), (10) с граничными условиями (12), (13) образуют краевую задачу для нахождения первого приближения в напряжениях и дальнейшего полного построения решения поставленной краевой задачи с учетом первого приближения.

**2. Первое приближение метода малого параметра.** С учетом вида уравнения внешнего контура (2) и вида граничных условий (13), вводится предположение, что скорость радиальных перемещений  $\dot{u}_r^{(1)}$  является суммой двух составляющих, одна из которых зависит от радиуса  $r$  и угла  $\theta$ , а вторая — только от радиуса  $r$ ; скорость тангенциальных перемещений  $\dot{u}_\theta^{(1)}$  зависит и от радиуса  $r$ , и от угла  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \dot{u}_r^{(1)}(r, \theta) &= \widetilde{\dot{u}}_r^R(r, \theta) + \widetilde{\dot{u}}_r^\psi(r) = \dot{u}_r^R(r) \cos 2\theta + \dot{u}_r^\psi(r), \\ \dot{u}_\theta^{(1)}(r, \theta) &= \widetilde{\dot{u}}_\theta^R(r, \theta) = \dot{u}_\theta^R(r) \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\dot{u}_r^R = \dot{u}_r^R(r)$ ,  $\dot{u}_r^\psi = \dot{u}_r^\psi(r)$ ,  $\dot{u}_\theta^R = \dot{u}_\theta^R(r)$  — неизвестные подлежащие определению функции.

Представление для скоростей перемещений (14) с учетом условий совместности (6) позволяет выполнить условие несжимаемости материала (3) тождественно. Для этого необходимо потребовать выполнения следующих равенств:

$$\frac{d\dot{u}_r^R}{dr} + \frac{2}{r}\dot{u}_\theta^R + \frac{\dot{u}_r^R}{r} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{d\dot{u}_r^\psi}{dr} + \frac{\dot{u}_r^\psi}{r} = 0. \quad (16)$$

Уравнение (15) тождественно выполняется путем введения функции скоростей перемещений  $\zeta(r, \theta) = R(r) \sin 2\theta$  такой, что

$$\widetilde{\dot{u}_r^R} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta}, \quad \widetilde{\dot{u}_\theta^R} = \frac{\partial \zeta}{\partial r}. \quad (17)$$

Уравнение (16) позволяет определить составляющую скоростей перемещений, независящую от угла  $\theta$ :

$$\dot{u}_r^\psi = \frac{C}{r}$$

и, следовательно,

$$\dot{\varepsilon}_{rr}^\psi = -\frac{C}{r^2}. \quad (18)$$

Использование представления (17) в выражении (14) позволяет из соотношений (6) получить скорости деформаций ползучести:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{rr}^{(1)} &= -\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^{(1)} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta \partial r} + \frac{du_r^\psi}{dr}, \\ \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right]. \end{aligned}$$

Так как  $\zeta(r, \theta) = R(r) \sin 2\theta$ , выражения для скоростей деформаций ползучести примут вид

$$\dot{\varepsilon}_{rr}^{(1)} = -\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^{(2)} = [-2R'r^{-1} + 2Rr^{-2}] \cos 2\theta + \frac{du_r^\psi}{dr}, \quad (19)$$

$$\dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(1)} = \frac{1}{2} [R'' - R'r^{-1} + 4Rr^{-2}] \sin 2\theta. \quad (20)$$

Здесь и далее «штрих» означает дифференцирование по  $r$ .

Полученные формулы для скоростей деформаций (19), (20) используются в соотношениях (9), (10):

$$\Delta\sigma^{(1)} = \left[ \frac{4p}{L} (-R'r^{-p+1} + Rr^{-p}) \right] \cos 2\theta - \frac{2pC}{L} r^{-p} = \Delta\sigma^R \cos 2\theta + \Delta\sigma^\psi, \quad (21)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(1)} = \frac{1}{2L} [R''r^{-p+2} - R'r^{-p+1} + 4Rr^{-p}] \sin 2\theta = \sigma_{r\theta}^R \sin 2\theta. \quad (22)$$

При составлении основного уравнения для нахождения функции  $R(r)$  необходимо предварительно найти смешанную производную второго порядка по  $\theta$  и  $r$  от обеих частей равенства (21):

$$\frac{\partial^2 \Delta \sigma^{(1)}}{\partial r \partial \theta} = -2 \frac{\partial \Delta \sigma^R}{\partial r} \sin 2\theta,$$

и, применяя обозначения, введенные в (21), (22), определить производную по  $\theta$  от обеих частей уравнения равновесия (4) для первого приближения:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{rr}^{(1)}}{\partial r \partial \theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^{(1)}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta \sigma^{(1)}}{\partial \theta} = \frac{4}{r} \sigma_{r\theta}^R \sin 2\theta + \frac{2}{r} \Delta \sigma^R \sin 2\theta,$$

а также определить производную по  $r$  от обеих частей уравнения равновесия (5) для первого приближения:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{(1)}}{\partial \theta \partial r} = -r \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^{(1)}}{\partial r^2} - 3 \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(1)}}{\partial r} = -r \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^R}{\partial r^2} \sin 2\theta - 3 \frac{\partial \sigma_{r\theta}^R}{\partial r} \sin 2\theta.$$

Разность продифференцированных уравнений равновесия представляет собой соотношение, тождественно равное продифференцированному соотношению (21). Приравнявая эти соотношения и сокращая на  $\sin 2\theta$ , приходим к уравнению

$$r \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^R}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial \sigma_{r\theta}^R}{\partial r} + 2 \frac{\partial \Delta \sigma^R}{\partial r} + 4 \frac{\sigma_{r\theta}^R}{r} + 2 \frac{\Delta \sigma^R}{r} = 0. \quad (23)$$

Опираясь в уравнении (23) на обозначения, введенные в (21), (22), получаем линейное однородное дифференциальное уравнение четвертого порядка для нахождения функции  $R(r)$ :

$$R^{(4)} + (6 - 2p)R'''r^{-1} + (p^2 - 20p + 11)R''r^{-2} + (15p^2 - 20p + 5)R'r^{-3} + (16 - 12p^2 + 8p)Rr^{-4} = 0. \quad (24)$$

Использование степенного представления  $R(r) = r^\nu$  позволяет получить характеристическое уравнение для нахождения собственных значений  $\nu$ :

$$\nu^4 - 2p\nu^3 + (p^2 - 14p + 4)\nu^2 + (14p^2 - 4p)\nu + (16 - 12p^2 + 8p) = 0,$$

решением которого являются корни

$$\nu_{1,2,3,4} = \frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 + 28p - 8 \pm 4\sqrt{61p^2 - 36p - 12}}}{2}.$$

Уравнение имеет комплексные корни при

$$61p^2 - 36p - 12 < 0,$$

что выполняется при показателе нелинейности  $n = 2/p > 2.42$ . Следовательно, собственные значения при  $n > 2.42$  представимы в виде

$$\nu_{1,2,3,4} = \frac{p}{2} \pm \frac{l}{2} \pm iy.$$

Здесь  $l = l(p)$  и  $y = y(p)$  — известные значения для конкретного материала. Воспользуемся тригонометрическим представлением полученного решения согласно [25]:

$$R(r) = C_{11}r^{(p+l)/2} \cos(y \ln r) + C_{12}r^{(p+l)/2} \sin(y \ln r) + C_{13}r^{(p-l)/2} \cos(y \ln r) + C_{14}r^{(p-l)/2} \sin(y \ln r), \quad (25)$$

где  $C_{11} \div C_{14}$  — константы интегрирования.

Подставляя решения для функции  $R(r)$  (25) и для скорости деформаций ползучести  $\dot{\varepsilon}_{rr}^{\psi}$  (18) с учетом (9) в уравнения равновесия (4), (5) и обозначая

$$\frac{d\sigma_{rr}^R}{dr} = \frac{1}{L} [-R''r^{-p+1} + (4p+1)R'r^{-p} - (4p+4)Rr^{-p-1}], \quad \frac{d\sigma_{rr}^{\psi}}{dr} = \frac{2p}{L}Cr^{-p-1},$$

получаем

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^{(1)}}{\partial r} = \frac{d\sigma_{rr}^R}{dr} \cos 2\theta + \frac{d\sigma_{rr}^{\psi}}{dr}.$$

Интегрируя по  $r$ , приходим к выражению для радиальной составляющей тензора напряжений

$$\sigma_{rr}^{(1)} = (\sigma_{rr}^R + K^R) \cos 2\theta + (\sigma_{rr}^{\psi} + K^{\psi}),$$

где  $K^R$  и  $K^{\psi}$  — константы интегрирования.

Составляющая тензора напряжений  $\sigma_{r\theta}^{(1)}$  определяется по формуле (22).

Подставляя полученное решение для  $\sigma_{rr}^{(1)}$  и  $\sigma_{r\theta}^{(1)}$  в граничные условия (12), (13), определяем константы интегрирования  $C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C, K^R, K^{\psi}$ . Поскольку уравнение для нахождения  $\sigma_{rr}^{(1)}$  распадается на два уравнения по признаку наличия зависимости от угла  $\theta$ , получаем шесть уравнений и семь неизвестных констант интегрирования, что позволяет без нарушения общности решения положить  $K^R = 0$ . В итоге формула для радиальных напряжений имеет вид

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{rr}^R \cos 2\theta + \sigma_{rr}^{\Psi}, \quad (26)$$

где введено обозначение  $\sigma_{rr}^{\Psi} = \sigma_{rr}^{\psi} + K^{\psi}$ .

Использование полученного решения (26) позволяет определить напряжения и скорости деформаций ползучести в трубе с учетом первого приближения.

**3. Второе приближение метода малого параметра.** Линеаризованное граничное условие для второго приближения при  $r = a$  согласно [15] зависит от нулевого и первого приближений:

$$\sigma_{r\theta}^{(2)} \Big|_{r=a} = \left[ \frac{1}{2} \Delta \sigma^{(0)} + \frac{1}{2} \Delta \sigma^R + \frac{a}{4} \frac{d}{dr} (\Delta \sigma^{(0)} - \sigma_{r\theta}^R) \right]_{r=a} \sin 4\theta + \left[ \frac{1}{2} \Delta \sigma^{(0)} + \Delta \sigma^{\Psi} - \frac{a}{2} \frac{d}{dr} (\Delta \sigma^{(0)} - \sigma_{r\theta}^R) \right]_{r=a} \sin 2\theta,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(2)} \Big|_{r=a} = & \left[ \sigma_{r\theta}^R - \frac{a d\sigma_{rr}^R}{4 dr} - \frac{a^2 d^2\sigma_{rr}^{(0)}}{16 dr^2} - \frac{3a d\sigma_{rr}^{(0)}}{16 dr} - \frac{1}{2}\Delta\sigma^{(0)} \right]_{r=a} \cos 4\theta + \\ & + \left[ \frac{a d\sigma_{rr}^R}{2 dr} + \frac{a^2 d^2\sigma_{rr}^{(0)}}{4 dr^2} - \frac{a d\sigma_{rr}^\Psi}{2 dr} \right]_{r=a} \cos 2\theta + \\ & + \left[ \frac{a d\sigma_{rr}^\Psi}{2 dr} + \frac{3a d\sigma_{rr}^{(0)}}{16 dr} + \frac{1}{2}\Delta\sigma^{(0)} - \frac{a d\sigma_{rr}^R}{4 dr} - \frac{3a^2 d^2\sigma_{rr}^{(0)}}{16 dr^2} \right]_{r=a}. \end{aligned} \quad (27)$$

Приравнивая в соотношениях (9), (10) члены  $\delta^2$ , приходим к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma^{(2)} = & \frac{2p}{Lr^s} \dot{\varepsilon}_{rr}^{(2)} - \frac{1}{\Delta\sigma^{(0)}} \left[ \frac{n-1}{2} \Delta\sigma^{(1)2} + s\sigma_{r\theta}^{(1)2} \right] = \\ = & \frac{2p}{Lr^s} \dot{\varepsilon}_{rr}^{(2)} + A_4(r) \cos 4\theta + A_2(r) \cos 2\theta + A_0(r), \end{aligned}$$

$$\sigma_{r\theta}^{(2)} = \frac{1}{Lr^s} \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(2)} - \frac{(n-1)\Delta\sigma^{(1)}\sigma_{r\theta}^{(1)}}{\Delta\sigma^{(0)}} = \frac{1}{Lr^s} \dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(2)} + B_4(r) \sin 4\theta + B_2(r) \sin 2\theta.$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_4(r) = & \frac{s}{2\Delta\sigma^{(0)}} \left( \frac{[\Delta\sigma^R]^2}{2p} + [\sigma_{r\theta}^R]^2 \right), & A_2(r) = & \frac{s}{p\Delta\sigma^{(0)}} \Delta\sigma^R \Delta\sigma^\Psi, \\ A_0(r) = & \frac{s}{2\Delta\sigma^{(0)}} \left( \frac{[\Delta\sigma^R]^2}{2p} + \frac{[\Delta\sigma^\Psi]^2}{p} - [\sigma_{r\theta}^R]^2 \right), & B_4(r) = & \frac{s}{2p\Delta\sigma^{(0)}} \Delta\sigma^R \sigma_{r\theta}^R, \\ B_2(r) = & \frac{s}{p\Delta\sigma^{(0)}} \Delta\sigma^R \Delta\sigma^\Psi \end{aligned}$$

— функции, зависящие от нулевого и первого приближений.

С учетом вида уравнения внешнего контура (2) и вида граничных условий (27) вводится предположение, что радиальные напряжения состоят из суммы трех слагаемых, каждое из которых зависит от радиуса  $r$ , причем первое зависит также от угла  $4\theta$ , второе слагаемое зависит от  $2\theta$ , третье — не зависит от угла; касательные напряжения помимо зависимости от  $r$  зависят от величины  $4\theta$  и  $2\theta$ . Следовательно, можно сделать предположение, что скорость радиальных перемещений  $\dot{u}_r^{(2)}$  является суммой трех составляющих, одно из которых зависит от радиуса  $r$  и угла  $4\theta$ , а второе — от радиуса  $r$  и угла  $2\theta$ , третье — только от радиуса  $r$ ; скорость тангенциальных перемещений  $\dot{u}_\theta^{(2)}$  является суммой двух составляющих, одно из которых зависит от радиуса  $r$  и угла  $4\theta$ , а второе — от радиуса  $r$  и угла  $2\theta$ :

$$\begin{aligned} \dot{u}_r^{(2)}(r, \theta) = & \widetilde{\dot{u}_r^V}(r, \theta) + \widetilde{\dot{u}_r^W}(r, \theta) + \widetilde{\dot{u}_r^U}(r) = \dot{u}_r^V(r) \cos 4\theta + \dot{u}_r^W(r) \cos 2\theta + \dot{u}_r^U(r), \\ \dot{u}_\theta^{(2)}(r, \theta) = & \dot{u}_\theta^V(r, \theta) + \dot{u}_\theta^W(r, \theta) = \dot{u}_\theta^V(r) \sin 4\theta + \dot{u}_\theta^W(r) \sin 2\theta, \end{aligned}$$

где  $\dot{u}_r^V = \dot{u}_r^V(r)$ ,  $\dot{u}_r^W = \dot{u}_r^W(r)$ ,  $\dot{u}_r^U = \dot{u}_r^U(r)$ ,  $\dot{u}_\theta^V = \dot{u}_\theta^V(r)$ ,  $\dot{u}_\theta^W = \dot{u}_\theta^W(r)$  — неизвестные подлежащие определению функции.

Использование такого разложения в выражениях для скоростей деформаций ползучести (6) позволяет тождественно выполнить условие несжимаемости при соблюдении равенств

$$\frac{d\dot{u}_r^V}{dr} + \frac{4}{r}\dot{u}_\theta^V + \frac{\dot{u}_r^V}{r} = 0, \quad (28)$$

$$\frac{d\dot{u}_r^W}{dr} + \frac{2}{r}\dot{u}_\theta^W + \frac{\dot{u}_r^W}{r} = 0, \quad (29)$$

$$\frac{d\dot{u}_r^U}{dr} + \frac{\dot{u}_r^U}{r} = 0. \quad (30)$$

Соотношение (28) выполняется при использовании функции скоростей перемещений

$$\xi^V(r, \theta) = V(r) \sin 4\theta$$

такой, что

$$\widetilde{\dot{u}_r^V} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \xi^V}{\partial \theta} = -\frac{4}{r} V \cos 4\theta, \quad \widetilde{\dot{u}_\theta^V} = \frac{\partial \xi^V}{\partial r} = V' \sin 4\theta.$$

Условие (29) полностью совпадает с условием (15), применяемым в первом приближении, путем введения функции

$$\xi^W(r, \theta) = W(r) \sin 2\theta$$

такой, что

$$\widetilde{\dot{u}_r^W} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \xi^W}{\partial \theta} = -\frac{2}{r} W \cos 2\theta, \quad \widetilde{\dot{u}_\theta^W} = \frac{\partial \xi^W}{\partial r} = W' \sin 2\theta.$$

Условие (30) выполняется при

$$\dot{u}_r^U = \frac{K^U}{r}, \quad \dot{\varepsilon}_{rr}^U = -\frac{K^U}{r^2}, \quad (31)$$

где  $K^U$  — константа интегрирования.

Подставляя  $\widetilde{\dot{u}_\theta^V}$ ,  $\widetilde{\dot{u}_\theta^W}$ ,  $\dot{u}_r^U$  в условия совместности деформаций, а затем в соотношения (9), (10), аналогично случаю первого приближения имеем

$$\begin{aligned} \Delta\sigma^{(2)} &= \left[ \frac{8p}{L} (-V'r^{-p+1} + Vr^{-p}) + A_4(r) \right] \cos 4\theta + \\ &+ \left[ \frac{4p}{L} (-W'r^{-p+1} + Wr^{-p}) + A_2(r) \right] \cos 2\theta + \left[ -\frac{2pK}{L} r^{-p} + A_0(r) \right] = \\ &= \Delta\sigma^V \cos 4\theta + \Delta\sigma^W \cos 2\theta + \Delta\sigma^U, \quad (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}^{(2)} &= \frac{1}{2L} \left[ V''r^{-p+2} - V'r^{-p+1} + 16Vr^{-p} + B_4(r) \right] \sin 4\theta + \\ &+ \frac{1}{2L} \left[ W''r^{-p+2} - W'r^{-p+1} + 4Wr^{-p} + B_2(r) \right] \sin 2\theta = \\ &= \sigma_{r\theta}^V \sin 4\theta + \sigma_{r\theta}^W \sin 2\theta. \quad (33) \end{aligned}$$

Подставляя (32), (33) в уравнения равновесия и выполняя преобразования, аналогичные проведенным в первом приближении, приходим к основному уравнению для нахождения функций  $V(r)$  и  $W(r)$ :

$$\left[ r \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^V}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial \sigma_{r\theta}^V}{\partial r} + 4 \frac{\partial \Delta \sigma^V}{\partial r} + 16 \frac{\sigma_{r\theta}^V}{r} + 4 \frac{\Delta \sigma^V}{r} \right] \sin 4\theta +$$

$$+ \left[ r \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^W}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial \sigma_{r\theta}^W}{\partial r} + 2 \frac{\partial \Delta \sigma^W}{\partial r} + 4 \frac{\sigma_{r\theta}^W}{r} + 2 \frac{\Delta \sigma^W}{r} \right] \sin 2\theta = 0.$$

Данное уравнение должно выполняться при любых значениях угла  $\theta$ . Следовательно,

$$r \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^V}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial \sigma_{r\theta}^V}{\partial r} + 4 \frac{\partial \Delta \sigma^V}{\partial r} + 16 \frac{\sigma_{r\theta}^V}{r} + 4 \frac{\Delta \sigma^V}{r} = 0, \quad (34)$$

$$r \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^W}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial \sigma_{r\theta}^W}{\partial r} + 2 \frac{\partial \Delta \sigma^W}{\partial r} + 4 \frac{\sigma_{r\theta}^W}{r} + 2 \frac{\Delta \sigma^W}{r} = 0. \quad (35)$$

С использованием обозначений, введенных в (32), (33), дифференциальное уравнение (34) принимает вид

$$V^{(4)} + (6 - 2p)V'''r^{-1} + (p^2 - 68p + 35)V''r^{-2} +$$

$$+ (63p^2 - 92p + 29)V'r^{-3} + (256 - 48p^2 + 17p)Vr^{-4} = -2Lr^{p-3}Y(r), \quad (36)$$

где

$$Y(r) = r \frac{d^2 B_4}{dr^2} + 3 \frac{dB_4}{dr} + 16 \frac{B_4}{r} + 4 \frac{dA_4}{dr} + 4 \frac{A_4}{r}.$$

Использование степенного представления  $V(r) = r^\mu$  позволяет получить характеристическое уравнение для нахождения собственных значений  $\mu$ :

$$\mu^4 - 2p\mu^3 + (p^2 - 62p + 28)\mu^2 + (62p^2 - 28p)\mu + (256 - 48p^2 + 17p) = 0,$$

решением которого являются корни

$$\mu_{1,2,3,4} = \frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 + 124p - 56 \pm 4\sqrt{1009p^2 - 885p - 60}}}{2}.$$

Уравнение имеет комплексные корни при

$$1009p^2 - 885p - 60 < 0,$$

что выполняется при показателе нелинейности  $n = 2/p > 2.13$ . Следовательно, собственные значения при  $n > 2.13$  представимы в виде

$$\mu_{1,2,3,4} = \frac{p}{2} \pm \frac{m}{2} \pm it.$$

Здесь  $m = m(p)$  и  $t = t(p)$  — известные значения для конкретного материала. Воспользуемся тригонометрическим представлением полученного решения согласно [25]:

$$V(r) = V_1 r^{(p+m)/2} \cos(t \ln r) + V_2 r^{(p+m)/2} \sin(t \ln r) + \\ + V_3 r^{(p-m)/2} \cos(t \ln r) + V_4 r^{(p-m)/2} \sin(t \ln r),$$

где  $V_1 \div V_4$  — константы интегрирования однородного дифференциального уравнения.

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения находится по методу неопределенных коэффициентов. В итоге полное решение неоднородного уравнения (36) представимо в виде

$$V(r) = [V_1(r) + v_1] r^{(p+m)/2} \cos(t \ln r) + [V_2(r) + v_2] r^{(p+m)/2} \sin(t \ln r) + \\ + [V_3(r) + v_3] r^{(p-m)/2} \cos(t \ln r) + [V_4(r) + v_4] r^{(p-m)/2} \sin(t \ln r), \quad (37)$$

где  $v_1 \div v_4$  — константы интегрирования неоднородного дифференциального уравнения.

Подставляя в уравнение (35) обозначения, введенные в (32), (33) получаем неоднородное дифференциальное уравнение

$$W^{(4)} + (6 - 2p)W'''r^{-1} + (p^2 - 20p + 11)W''r^{-2} + \\ + (15p^2 - 20p + 5)W'r^{-3} + (16 - 12p^2 + 8p)Wr^{-4} = -2Lr^{p-3}F(r), \quad (38)$$

где

$$F(r) = r \frac{d^2 B_2}{dr^2} + 3 \frac{dB_2}{dr} + 2 \frac{dA_2}{dr} + 4 \frac{B_2}{r} + 2 \frac{A_2}{r}.$$

Вид однородного уравнения, соответствующего (38), полностью совпадает с однородным уравнением (24), что позволяет сразу выписать решение однородного уравнения

$$W(r) = W_1 r^{(p+l)/2} \cos(y \ln r) + W_2 r^{(p+l)/2} \sin(y \ln r) + \\ + W_3 r^{(p-l)/2} \cos(y \ln r) + W_4 r^{(p-l)/2} \sin(y \ln r),$$

где  $l = l(p)$  и  $y = y(p)$  — определены в первом приближении,  $W_1 \div W_4$  — константы интегрирования однородного дифференциального уравнения.

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения (38) находится по методу неопределенных коэффициентов. В итоге полное решение неоднородного уравнения представимо в виде

$$W(r) = [W_1(r) + w_1] r^{(p+l)/2} \cos(y \ln r) + [W_2(r) + w_2] r^{(p+l)/2} \sin(y \ln r) + \\ + [W_3(r) + w_3] r^{(p-l)/2} \cos(y \ln r) + [W_4(r) + w_4] r^{(p-l)/2} \sin(y \ln r), \quad (39)$$

где  $w_1 \div w_4$  — константы интегрирования неоднородного дифференциального уравнения.

Воспользуемся полученными решениями для функций  $V(r)$  из равенства (37), для функции  $W(r)$  из равенства (39) и для скорости деформаций ползучести  $\dot{\varepsilon}_{rr}^{\psi}$  из соотношения (31) в выражениях для напряжений (32) и (33).

Затем подставляем полученные соотношения в уравнение равновесия (4) и группируем члены, содержащие одинаковые функции угла  $\theta$ :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^{(2)}}{\partial r} = \frac{d\sigma_{rr}^V}{dr} \cos 4\theta + \frac{d\sigma_{rr}^W}{dr} \cos 2\theta + \frac{d\sigma_{rr}^U}{dr}.$$

Интегрируя по  $r$ , приходим к выражению для радиальной составляющей тензора напряжений

$$\sigma_{rr}^{(2)} = (\sigma_{rr}^V + K^V) \cos 4\theta + (\sigma_{rr}^W + K^W) \cos 2\theta + (\sigma_{rr}^U + K^U),$$

где  $K^V$ ,  $K^W$  и  $K^U$  — константы интегрирования.

Составляющая тензора напряжений  $\sigma_{r\theta}^{(2)}$  определяется по формуле (33). Анализ собственных значений характеристических уравнений для первого и второго приближений показывает, что найденное решение применимо при параметре нелинейности материала  $n > 2.42$ .

Использование первого и второго приближений метода малого параметра позволяет определить напряжения и скорости деформаций ползучести в трубе с внешним эллиптическим контуром при величине сжатия  $\delta = (a - b)/a$ , принимаемого в качестве малого параметра, что соответствует малой величине эксцентриситета.

Необходимость построения третьего приближения требует дополнительных исследований.

**4. Анализ приближенного аналитического решения.** В качестве модельного примера рассмотрена труба с внутренним радиусом  $h = 0.115$  м, внешней большой полуосью эллипса  $a = 0.15$  м под действием внутреннего давления  $q = 22.07$  МПа. В качестве примеров материалов рассмотрены углеродистая сталь [26] и жаропрочный сплав ХН73МБТЮ (ЭИ698) [27] с реологическими характеристиками:

$$\begin{aligned} \text{углеродистая сталь:} \quad n = 3.03, \quad A = 9.04 \cdot 10^{-9}; \\ \text{ХН73МБТЮ (ЭИ698):} \quad n = 10.96, \quad A = 4.57 \cdot 10^{-33}. \end{aligned}$$

В таблице приведены значения  $\sigma_{\theta\theta}^* = \sigma_{\theta\theta}^{(0+1)}/\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$  — при учете первого приближения на внешней границе трубы при  $\tilde{r} = a/h + \delta \cdot a(\cos 2\theta - 1)/2h$ ;  $\sigma_{\theta\theta}^{**} = \sigma_{\theta\theta}^{(0+1+2)}/\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$  — при учете второго приближения на внешней границе трубы при  $\tilde{r} = a/h + \delta \cdot a(\cos 2\theta - 1)/2h + \delta^2 \cdot 3a(\cos 4\theta - 1)/16h$ , вычисленные с шагом 0.01 для величины сжатия  $\delta$  при  $\theta = \pi/2$  для углеродистой стали [26]

**Значения тангенциального напряжения для трубы с эллиптическим внешним контуром [Values of tangential stresses for the tube with elliptic outer contour]**

$\delta, \%$	0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
Углеродистая сталь [Carbon Steel]											
$\sigma_{\theta\theta}^*$	1.0	1.06	1.12	1.18	1.24	1.30	1.35	1.41	1.46	1.51	1.56
$\sigma_{\theta\theta}^{**}$	1.0	1.07	1.13	1.21	1.29	1.37	1.45	1.54	1.63	1.72	1.82
ХН73МБТЮ (ЭИ698) [KH73MBTYU (ÉI698) Alloy]											
$\sigma_{\theta\theta}^*$	1.0	1.06	1.12	1.18	1.24	1.30	1.36	1.42	1.48	1.54	1.60
$\sigma_{\theta\theta}^{**}$	1.0	1.06	1.13	1.20	1.27	1.34	1.42	1.49	1.57	1.64	1.71

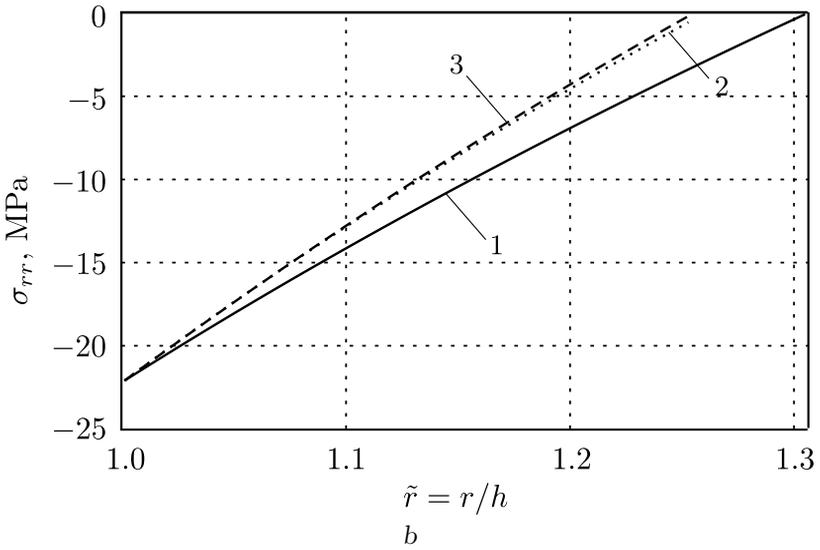
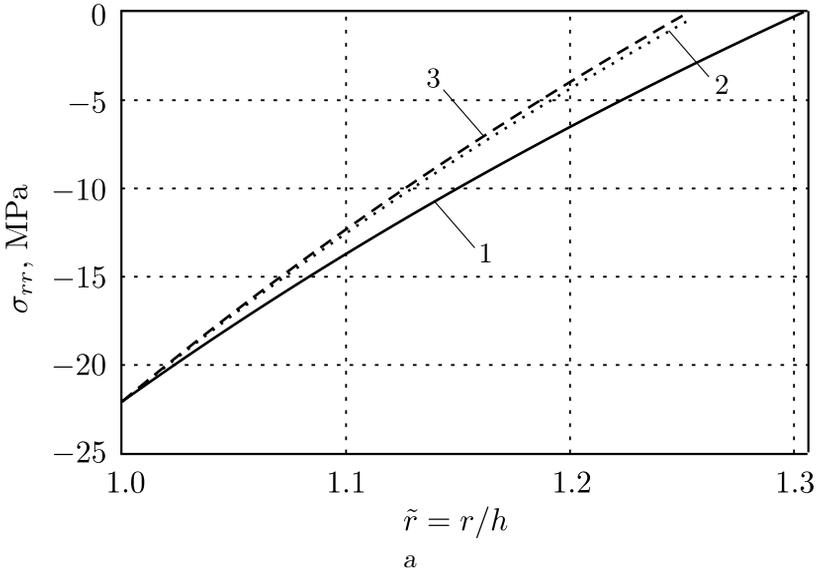


Рис. 2. Радиальные напряжения для трубы с внешним эллиптическим контуром из углеродистой стали (a) и сплава ХН73МБТЮ(ЭИ698) (b) при  $\theta = \pi/2$ ,  $\delta = 0.04$ : 1 —  $\sigma_{rr}^{(0)}$ , 2 —  $\sigma_{rr}^{(0+1)}$ , 3 —  $\sigma_{rr}^{(0+1+2)}$

[Figure 2. Radial stresses  $\sigma_{rr}$  for carbon steel (a) and KHN73MBTYU (ÉI698) Alloy (b) tube with elliptic outer contour, when  $\theta = \pi/2$ ,  $\delta = 0.04$ : 1 —  $\sigma_{rr}^{(0)}$ , 2 —  $\sigma_{rr}^{(0+1)}$ , 3 —  $\sigma_{rr}^{(0+1+2)}$ ]

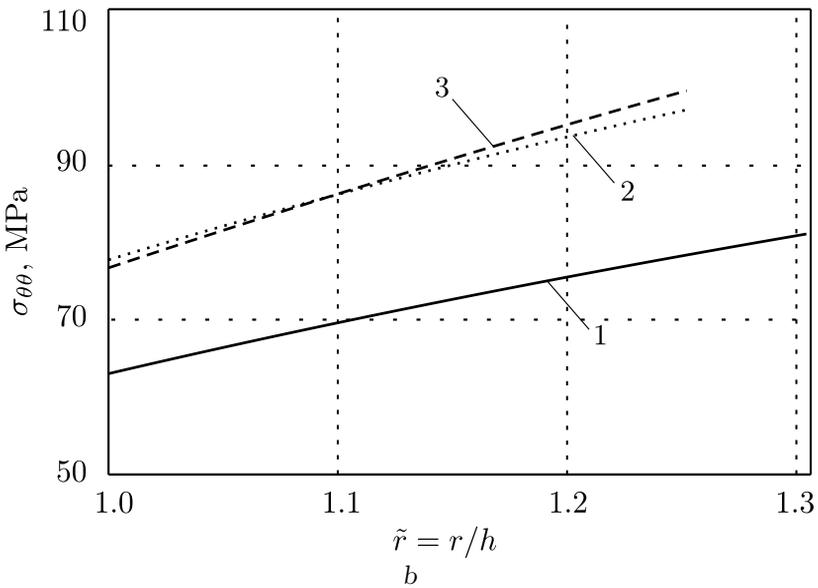
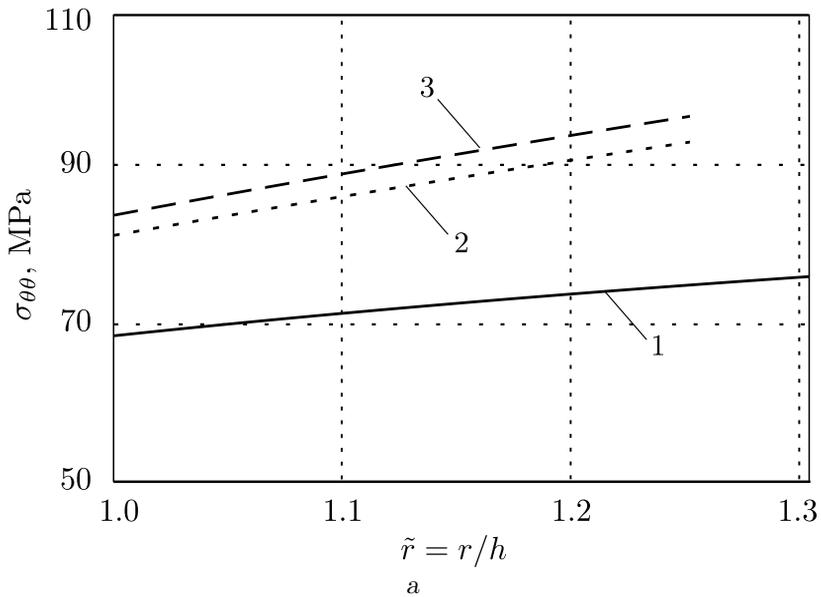


Рис. 3. Тангенциальные напряжения для трубы с внешним эллиптическим контуром из углеродистой стали (а) и сплава ХН73МБТЮ(ЭИ698) (b) при  $\theta = \pi/2$ ,  $\delta = 0.04$ : 1 –  $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$ , 2 –  $\sigma_{\theta\theta}^{(0+1)}$ , 3 –  $\sigma_{\theta\theta}^{(0+1+2)}$

[Figure 3. Tangential stresses  $\sigma_{\theta\theta}$  for carbon steel (a) and KHN73MBTYU (E1698) Alloy (b) tube with elliptic outer contour, when  $\theta = \pi/2$ ,  $\delta = 0.04$ : 1 –  $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$ , 2 –  $\sigma_{\theta\theta}^{(0+1)}$ , 3 –  $\sigma_{\theta\theta}^{(0+1+2)}$ ]

и жаропрочного сплава ХН7ЗМБТЮ(ЭИ698) [27]. Графики на рис. 2 и 3 построены для радиальной и тангенциальной компонент (соответственно) тензора напряжений при  $\delta = 0.04$  и значении угла  $\theta = \pi/2$ , соответствующего максимальным значениям тангенциального напряжения  $\sigma_{\theta\theta}$ .

Из данных, приведенных в таблице, можно сделать вывод, что при возрастании величины сжатия эллипса до 0.1 внешнего радиуса трубы тангенциальные напряжения в опасном сечении при  $\theta = \pi/2$  возрастают в 1.7–1.8 раза. Анализ графиков, представленных на рис. 2 и 3, позволяет сделать вывод о том, что решение задачи о трубе с эллиптическим внешним контуром имеет тенденцию к сходимости.

#### ORCID

Анна Давидовна Москалик: <http://orcid.org/0000-0001-7527-6237>

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Качанов Л. М. *Теория ползучести*. М.: Физматгиз, 1960. 455 с.
2. Радченко В. П., Башкинова Е. В. Решение краевых задач установившейся ползучести в полярных координатах методом возмущений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки*, 1998. № 5. С. 86–91.
3. Башкинова Е. В. Решение краевой задачи установившейся ползучести для неосесимметричной толстостенной трубы // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2002. № 16. С. 105–110. doi: [10.14498/vsgtu106](https://doi.org/10.14498/vsgtu106).
4. Москалик А. Д. Применение метода возмущений к задаче о несоосной трубе в условиях установившейся ползучести // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. № 4(33). С. 76–85. doi: [10.14498/vsgtu1290](https://doi.org/10.14498/vsgtu1290).
5. Hill R., Hutchinson J. W. Bifurcation phenomena in the plane tension test // *J. Mech. Phys. solids*, 1975. vol. 23. pp. 239–264. doi: [10.1016/0022-5096\(75\)90027-7](https://doi.org/10.1016/0022-5096(75)90027-7).
6. Stören S., Rice J. R. Localized necking in thin sheets // *J. Mech. Phys. solids*, 1975. vol. 23, no. 6. pp. 421–441. doi: [10.1016/0022-5096\(75\)90004-6](https://doi.org/10.1016/0022-5096(75)90004-6).
7. Hutchinson J. W., Neale K. W. Influence of strain-rate sensitivity on necking under uniaxial tension // *Acta Metallurgica*, 1977. vol. 25, no. 8. pp. 839–846. doi: [10.1016/0001-6160\(77\)90168-7](https://doi.org/10.1016/0001-6160(77)90168-7).
8. Келлер И. Э. Равновесные формы свободной границы при одноосном растяжении нелинейно-вязкой полосы // *ПМТФ*, 2010. Т. 51, № 1. С. 117–124.
9. Радченко В. П., Попов Н. Н. Аналитическое решение стохастической краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы // *ПММ*, 2012. Т. 76, № 6. С. 1023–1031.
10. Должковой А. А., Попов Н. Н. Решение нелинейной стохастической задачи ползучести для толстостенной трубы методом малого параметра // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2002. № 16. С. 84–89. doi: [10.14498/vsgtu102](https://doi.org/10.14498/vsgtu102).
11. Попов Н. Н., Исуткина В. Н. Построение аналитического решение двумерной стохастической задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007. № 2(15). С. 57–61. doi: [10.14498/vsgtu535](https://doi.org/10.14498/vsgtu535).
12. Должковой А. А., Попов Н. Н., Радченко В. П. Решение стохастической краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы методом малого параметра // *ПМТФ*, 2006. Т. 47, № 1. С. 161–171.
13. Коваленко Л. В., Попов Н. Н., Радченко В. П. Решение плоской стохастической краевой задачи ползучести // *ПММ*, 2009. Т. 73, № 6. С. 1009–1016.
14. Попов Н. Н., Самарин Ю. П. Исследование полей напряжений вблизи границы стохастически неоднородной полуплоскости при ползучести // *ПМТФ*, 1988. № 1. С. 159–164.
15. Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. *Метод возмущений в теории упругопластического тела*. М.: Наука, 1978. 208 с.

16. Кержаев А. П. Уруголастическое состояние тонкой кольцевой пластины при наличии трансляционной анизотропии при равномерном растяжении // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*, 2012. № 2(12). С. 174–179.
17. Фоминых С. О. Уруголастическое состояние толстостенной трубы при взаимодействии различных видов пластической анизотропии // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*, 2011. № 1(9). С. 201–2016.
18. Никитин А. В., Тихонов С. В. Предельное состояние многослойной трансляционно-анизотропной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*, 2014. № 1(19). С. 88–94.
19. Кульпина Т. А. Анизотропная эксцентричная труба с учетом сжимаемости материала // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*, 2010. № 1(65). С. 46–50.
20. Павлова Т. Н. Об определении перемещений в задаче напряженно-деформированного состояния тонкой пластины с эллиптическим отверстием // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*, 2010. № 1(65). С. 64–69.
21. Ярдькова Н. А. *Уруголастическое состояние пространства, ослабленного цилиндрической полостью, находящегося под действием давления, крутящих и продольных сдвигающих усилий*: Дис. . . канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. Чебоксары, 2006. 73 с.
22. Мирсалимов В. М. *Неоднородные уруголастические задачи*. М.: Наука, 1987. 256 с.
23. Никитенко А. Ф. *Ползучесть и длительная прочность металлических материалов*. Новосибирск: НГАСУ, 1997. 278 с.
24. Работнов Ю. Н. *Механика деформируемого твердого тела*. М.: Наука, 1979. 744 с.
25. Эльсгольд Л. Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление*. М.: Наука, 1969. 424 с.
26. Малинин Н. Н. *Прикладная теория пластичности и ползучести*. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
27. Радченко В. П., Саушкин М. Н. *Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях*. М.: Машиностроение-1, 2005. 226 с.

Поступила в редакцию 13/XI/2014;  
в окончательном варианте — 06/XII/2014;  
принята в печать — 11/XII/2014.

MSC: 74D10, 74G10

APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTION OF THE PROBLEM  
FOR THE TUBE WITH ELLIPTIC OUTER CONTOUR  
UNDER STEADY-STATE CREEP CONDITION

A. D. Moskalik

Samara State Technical University,  
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

## Abstract

The boundary value problem of steady-state creep for thick-walled outer elliptic contour's tube under internal pressure is considered. The approximate analytical solution of this problem for the state of plane deformation by the method of small parameter including the second approach is under construction. The hypothesis of incompressibility of material for creep strain is used. As a small parameter the value of flattening factor of the ellipse for external contour is used. Analysis of analytical solution is executed depending on the steady-state creep nonlinearity parameter and flattening factor of ellipse that is ratio of the difference of the semi-major and semi-minor axis to the semi-major axis which is outer radii of the unperturbed thick-walled tube. It is shown that with increasing of value of flattening factor to 0.1 of outer radii of tube tangential stresses in weakest section at  $\theta = \pi/2$  increase by 1.7–1.8 times. The results of computations are presented in tabular and graphic form.

**Keywords:** elliptic outer contour of tube, steady-state creep, approximate analytical solution, small parameter method, first and second approximation.

**doi:** <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1365>

## ORCID

Anna D. Moskalik: <http://orcid.org/0000-0001-7527-6237>

## REFERENCES

1. Kachanov L. M. *Teoriia polzuchesti* [Creep theory]. Moscow, Fizmatgiz, 1960, 455 pp. (In Russian)
2. Radchenko V. P., Bashkinova E. V. Solution of the boundary value problems for steady creep in polar coordinates by the perturbation method, *Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Tekhn. nauki*, 1998, no. 5, pp. 86–91 (In Russian).

© 2014 Samara State Technical University.

## How to cite Reference

Moskalik A. D. Approximate analytical solution of the problem for the tube with elliptic outer contour under steady-state creep condition, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 4 (37), pp. 65–84. doi: [10.14498/vsgtu1365](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1365). (In Russian)

## Author Details

Anna D. Moskalik ([annmoskalik1@gmail.com](mailto:annmoskalik1@gmail.com)), Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.

3. Bashkinova E. V. Solution of the value boundary problem of steady creep for non-axisymmetric thick-walled tube, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, T. 16, 2002, C. 105–110 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu106](https://doi.org/10.14498/vsgtu106).
4. Moskalik A. D. The application of perturbation method to problem of misaligned tube in conditions of steady-state creep, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2013, no. 4(33), pp. 76–85 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu1290](https://doi.org/10.14498/vsgtu1290).
5. Hill R., Hutchinson J. W. Bifurcation phenomena in the plane tension test, *J. Mech. Phys. solids*, 1975, vol. 23, pp. 239–264. doi: [10.1016/0022-5096\(75\)90027-7](https://doi.org/10.1016/0022-5096(75)90027-7).
6. Stören S., Rice J. R. Localized necking in thin sheets, *J. Mech. Phys. solids*, 1975, vol. 23, no. 6, pp. 421–441. doi: [10.1016/0022-5096\(75\)90004-6](https://doi.org/10.1016/0022-5096(75)90004-6).
7. Hutchinson J. W., Neale K. W. Influence of strain-rate sensitivity on necking under uniaxial tension, *Acta Metallurgica*, 1977, vol. 25, no. 8, pp. 839–846. doi: [10.1016/0001-6160\(77\)90168-7](https://doi.org/10.1016/0001-6160(77)90168-7).
8. Keller I. É. Self-similar shapes of the free boundary of a nonlinear-viscous band under uniaxial tension, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2010, vol. 51, no. 1, pp. 99–105. doi: [10.1007/s10808-010-0016-z](https://doi.org/10.1007/s10808-010-0016-z).
9. Popov N. N., Radchenko V. P. Analytical solution of the stochastic steady-state creep boundary value problem for a thick-walled tube, *J. Appl. Math. Mech.*, 2012, vol. 76, no. 6, pp. 738–744. doi: [10.1016/j.jappmathmech.2013.02.011](https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2013.02.011).
10. Dolzhkovi A. A., Popov N. N. Solution of the nonlinear stochastic creep problem for a thick-walled tube by method of small parameter, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2002, no. 16, pp. 84–89 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu102](https://doi.org/10.14498/vsgtu102).
11. Popov N. N., Isutkina V. N. Construction of an Analytical Solution of a Two-Dimensional Stochastic Problem of the Steady Creep for a Thick-Walled Pipe, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2007, no. 2(15), pp. 57–61 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu535](https://doi.org/10.14498/vsgtu535).
12. Dolzhkovi A. A., Popov N. N., Radchenko V. P. Solution of the stochastic boundary-value problem of steady-state creep for a thick-walled tube using the small-parameter method, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2006, vol. 47, no. 1, pp. 134–142. doi: [10.1007/s10808-006-0017-0](https://doi.org/10.1007/s10808-006-0017-0).
13. Kovalenko L. V., Popov N. N., Radchenko V. P. Solution of the plane stochastic creep boundary value problem, *J. Appl. Math. Mech.*, 2009, vol. 73, no. 6, pp. 727–733. doi: [10.1016/j.jappmathmech.2010.01.013](https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2010.01.013).
14. Popov N. N., Samarin Yu. P. Stress fields close to the boundary of a stochastically inhomogeneous half-plane during creep, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1988, vol. 29, no. 1, pp. 149–154. doi: [10.1007/BF00909710](https://doi.org/10.1007/BF00909710).
15. Ivlev D. D., Ershov L. V. *Metod vozmushchenii v teorii uprugoplasticheskogo tela* [Perturbation Method in the Theory of an Elastic-Plastic Body]. M., Nauka, 1978, 208 pp. (In Russian)
16. Kerzhaev A. P. Elastoplastic state of the thin annular plate in the presence of translational anisotropy under uniform tension, *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ia. Iakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoianiia*, 2012, no. 2(12), pp. 174–179 (In Russian).
17. Fominykh S. O. Elastoplastic state of the thick-walled pipe by reacting the different types of plastic anisotropy, *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ia. Iakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoianiia*, 2011, no. 1(9), pp. 201–2016 (In Russian).
18. Nikitin A. V., Tikhonov S. V. Limit condition anisotropic multilayer translationally thick-walled pipes under internal pressure, *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ia. Iakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoianiia*, 2014, no. 1(19), pp. 88–94 (In Russian).
19. Kul'pina T. A. Anisotropic eccentric tube with a compressible material, *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ia. Iakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoianiia*, 2010, no. 1(65), pp. 46–50 (In Russian).

20. Pavlova T. N. On the displacements determination in the stress-strain state problem for a thin plate with an elliptic hole, *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ia. Iakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoianii*, 2010, no. 1(65), pp. 64–69 (In Russian).
21. Yardykova N. A. *The elastic-plastic state of space weakened cylindrical cavity under the action of pressure, torsional and longitudinal shear forces*, Cand. Phys. & Math. Sci. Dissertation: 01.02.04. Cheboksary, 2006, 73 pp. (In Russian)
22. Mirsalimov V. M. *Neodnomernye uprugoplasticheskie zadachi* [Multidimensional elastic-plastic problems]. Moscow, Nauka, 1987, 256 pp. (In Russian)
23. Nikitenko A. F. *Polzuchest' i dlitel'naia prochnost' metallicheskih materialov* [Creep and Long-Term Strength of Metal Materials]. Novosibirsk, Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, 1997, 278 pp. (In Russian)
24. Rabotnov Yu. N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of deformable solids]. Moscow, Nauka, 1979, 744 pp. (In Russian)
25. Elsgolts L. *Differential Equations And The Calculus Of Variations*. Moscow, Mir Publ., 1977, 440 pp., ark:/13960/t03z0n280.
26. Malinin N. N. *Prikladnaia teoriia plastichnosti i polzuchesti* [Applied Theory of Plasticity and Creep]. Moscow, Mashinostroenie, 1975, 400 pp. (In Russian)
27. Radchenko V. P., Saushkin M. N. *Polzuchest' i relaksatsiia ostatochnykh napriazhenii v uprochnennykh konstruktsiiah* [Creep and Relaxation of Residual Stresses in Hardened Structures]. Moscow, Mashinostroenie-1, 2005, 226 pp. (In Russian)

Received 13/XI/2014;  
 received in revised form 06/XII/2014;  
 accepted 11/XII/2014.