Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2014. № 3 (36). С. 106–117
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1345

УДК 539.376

О ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ УПРОЧНЯЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ

И. Ю. Цвелодуб

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090, Россия, Новосибирск, пр-т Академика Лаврентьева, 15.

Аннотация

Рассматривается процесс деформирования среды, для которой полные деформации представимы в виде суммы упругих деформаций и деформаций ползучести. Упругие деформации подчиняются закону Гука, а скорости деформаций ползучести являются функциями компонент напряжений и некоторых структурных параметров, скорости их изменения описываются кинетическими уравнениями Работнова. Предполагается, что для деформаций ползучести справедлив постулат устойчивости Друккера в большом, сформулированный им для материалов с зависящими от времени свойствами. Обсуждаются обращение связи между напряжениями и деформациями и единственность решения краевых задач. Рассматривается частный случай указанных уравнений ползучести для упрочняющегося материала, когда за параметр упрочнения взята величина удельной рассеянной при ползучести энергии. Установлены достаточные условия выполнимости постулата устойчивости в большом для этого случая, приводятся соображения в пользу необходимости этих условий.

Ключевые слова: ползучесть, упрочняющийся материал, малые деформации, кинетические уравнения, устойчивость, постулат Друккера, единственность решения.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1345

1. Рассматривается изотермический процесс деформирования среды, для которой компоненты тензора деформаций ε_{kl} складываются из упругих, подчиняющихся закону Гука, и составляющих ползучести ε^c_{kl}:

$$\varepsilon_{kl} = a_{klmn}\sigma_{mn} + \varepsilon^c_{kl} \quad (k,\ l = 1, 2, 3), \tag{1}$$

где σ_{kl} — компоненты тензора напряжений, $a_{klmn} = a_{mnkl}$ — компоненты тензора упругих модулей. Здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 3.

Предполагается, что деформации являются малыми, так что величины ε_{kl} связаны с компонентами вектора перемещений u_k известными соотношениями Коши [1].

Образец для цитирования: Цвелодуб И. Ю. О теории ползучести упрочняющихся материалов // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 3 (36). С. 106–117. doi: 10.14498/vsgtu1345.

Сведения об авторе: *Игорь Юрьевич Цвелодуб* (д.ф.-м.н., проф.; itsvel@hydro.nsc.ru), заведующий лабораторией, лаб. статической прочности, отдел механики деформируемого твёрдого тела.

Для скоростей деформаций ползучести $\eta_{kl} = \dot{\varepsilon}^c_{kl}$ примем общие представления, предложенные в [2]:

$$\eta_{kl} = \eta_{kl}(\sigma_{mn}, q_i) \quad (k,\ l,\ m,\ n = 1,\ 2,\ 3;\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ p), \tag{2}$$

где q_i — набор структурных параметров, изменение которых во времени описывается кинетическими уравнениями вида

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(\sigma_{mn},\ \dot{\sigma}_{mn},\ \varepsilon^c_{mn},\ q_j) \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ p;\ m,\ n = 1,\ 2,\ 3). \tag{3}$$

Указанные выше зависимости при задании дифференцируемых функций $\sigma_{kl} = \sigma_{kl}(t)$ можно рассматривать как систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно ε^c_{kl} и q_i $(k,\ l = 1,\ 2,\ 3;\ i = 1,\ 2,\ \ldots, p)$. Будем предполагать, что при известных значениях ε^c_{kl} и q_i в некоторый начальный момент времени $t = t_0$ эта система имеет единственное решение при $t > t_0$.

Таким образом, при задании пути нагружения $\sigma_{kl} = \sigma_{kl}(t)$ и значений ε^c_{kl} и q_i при $t = t_0$ однозначно определяется путь деформирования $\varepsilon^c_{kl} = \varepsilon^c_{kl}(t)$, а значит, и $\eta_{kl} = \eta_{kl}(t)$. Следовательно, при указанных начальных условиях соотношения между напряжениями и скоростями деформаций ползучести можно представить в операторном виде $\eta_{kl} = F_{kl}(\sigma_{mn})$ $(k,\ l,\ m,\ n = 1,\ 2,\ 3)$.

Рассмотрим два пути нагружения: $\sigma^{(1)}_{kl} = \sigma^{(1)}_{kl}(t)$ и $\sigma^{(2)}_{kl} = \sigma^{(2)}_{kl}(t)$, им соответствуют значения $\eta^{(1)}_{kl} = \eta^{(1)}_{kl}(t)$ и $\eta^{(2)}_{kl} = \eta^{(2)}_{kl}(t)$; при этом для обоих путей значения ε^c_{kl} и q_i при $t = t_0$ совпадают. Предположим, что связь между напряжениями и скоростями деформаций ползучести такова, что для любого момента времени $t > t_0$ имеет место неравенство

$$\int_{t_0}^{t} \Delta\sigma_{kl}\Delta\eta_{kl}dt \geqslant 0, \tag{4}$$

где $\Delta\sigma_{kl}(t) = \sigma^{(1)}_{kl} - \sigma^{(2)}_{kl}$, $\Delta\eta_{kl}(t) = \eta^{(1)}_{kl} - \eta^{(2)}_{kl}$.

Условие (4) означает, что работа, произведенная дополнительными напряжениями $\Delta\sigma_{kl}$ на дополнительных деформациях ползучести $\Delta\varepsilon^c_{kl}$, должна быть неотрицательной на любой момент $t > t_0$ при условии, что $\Delta\varepsilon^c_{kl} = 0$, $\Delta q_i = 0$ при $t = t_0$. Это вполне аналогично формулировке постулата устойчивости Друккера в большом для материалов, свойства которых зависят от времени [3].

Очевидно, неравенство (4) накладывает сильные ограничения на связь $\eta_{kl} = F_{kl}(\sigma_{mn})$ и вряд ли является пригодным для общего случая соотношений (2), (3). Тем не менее в п. 2 будет рассмотрен класс упрочняющихся материалов и получены достаточные условия выполнимости (4), которые являются вполне разумными и общепринятыми.

Условие (4), как и аналогичный постулат в теории пластичности, сформулированный в несколько отличной от (4) форме [1], позволяет доказать некоторые общие утверждения для рассматриваемых здесь сред.

Утверждение. *Соотношения (1)–(3) между напряжениями и деформациями однозначны, т. е. при задании компонент тензора полных деформаций как функций времени $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}(t)$ и значений ε^c_{kl} и q_i при $t = t_0$ из (1)–(3) однозначно определяются компоненты тензора напряжений $\sigma_{kl} = \sigma_{kl}(t)$ на любой момент времени $t \geqslant t_0$.*

Доказательство. Предположим, что существуют два тензора с компонентами $\sigma_{kl}^{(1)} = \sigma_{kl}^{(1)}(t)$ и $\sigma_{kl}^{(2)} = \sigma_{kl}^{(2)}(t)$, соответствующие одним и тем же значениям $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}(t)$ и указанным начальным условиям. Следовательно, на основании (1) для любого момента времени имеют место равенства

$$a_{klmn}\Delta\sigma_{mn} + \Delta\varepsilon_{kl}^c = 0 \quad (k,\ l = 1,\ 2,\ 3),$$

умножая которые на $\Delta\sigma_{kl}$ и свертывая по индексам k и l, получим

$$a_{klmn}\Delta\sigma_{kl}\Delta\sigma_{mn} + \Delta\sigma_{kl}\Delta\varepsilon_{kl}^c = 0.$$

Учитывая, что $\Delta\varepsilon_{kl}^c = 0$ при $t = t_0$ последнее равенство можно представить в форме

$$a_{klmn}\Delta\sigma_{kl}\Delta\sigma_{mn} + \int_{t_0}^{t}\Delta\sigma_{kl}\Delta\eta_{kl}dt + \int_{t_0}^{t}\Delta\dot{\sigma}_{kl}\Delta\varepsilon_{kl}^c dt = 0. \tag{5}$$

Из очевидных соотношений $\Delta\sigma_{kl}\Delta\dot{\varepsilon}_{kl} = \Delta\dot{\sigma}_{kl}\Delta\varepsilon_{kl} = 0$ получим

$$a_{klmn}\Delta\sigma_{kl}\Delta\dot{\sigma}_{mn} + \Delta\sigma_{kl}\Delta\eta_{kl} = a_{klmn}\Delta\dot{\sigma}_{kl}\Delta\sigma_{mn} + \Delta\dot{\sigma}_{kl}\Delta\varepsilon_{kl}^c = 0.$$

Но

$$a_{klmn}\Delta\sigma_{kl}\Delta\dot{\sigma}_{mn} = a_{klmn}\Delta\dot{\sigma}_{kl}\Delta\sigma_{mn}$$

вследствие симметрии упругих коэффициентов a_{klmn}, тогда и

$$\Delta\sigma_{kl}\Delta\eta_{kl} = \Delta\dot{\sigma}_{kl}\Delta\varepsilon_{kl}^c$$

и равенство (5) примет вид

$$a_{klmn}\Delta\sigma_{kl}\Delta\sigma_{mn} + 2\int_{t_0}^{t}\Delta\sigma_{kl}\Delta\eta_{kl}dt = 0.$$

Данное соотношение возможно только при $\Delta\sigma_{kl} = 0$ в силу (4) и того факта, что величина $a_{klmn}\Delta\sigma_{kl}\Delta\sigma_{mn}$ представляет собой удвоенную потенциальную энергию упругой деформации, соответствующую напряжениям $\Delta\sigma_{kl}$ $(k,\ l = 1,\ 2,\ 3)$. Утверждение доказано. □

Заметим, что на основании (3) и начальных данных для q_i эти величины также определяются единственным образом.

Аналогично доказывается теорема единственности решения краевых задач для сред, процесс деформирования которых описывается соотношениями (1)–(3) при условии (4) и в предположении малости полных деформаций.

Теорема. *Рассмотрим односвязное тело объема v с поверхностью S, на части S_u которой заданы перемещения $u_k = u_k(t)$, а на остальной части S_T — поверхностные нагрузки $p_k = p_k(t)$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$. При $t = t_0$ известно распределение в теле деформаций ползучести $\varepsilon_{kl}^c = \varepsilon_{kl}^c(x_j)$ и значений структурных параметров $q_i = q_i(x_j)$, где x_j — координаты точек тела в некоторой фиксированной системе координат. Под действием указанных нагрузок в теле возникнут поля напряжений $\sigma_{kl} = \sigma_{kl}(x_j,\ t)$, деформаций*

$\varepsilon_{kl}=\varepsilon_{kl}(x_j,t)$ и значений $q_i=q_i(x_j,t)$ $(k,l,j=1,2,3;\ i=1,2,\ldots,p)$. Покажем, что эти поля определяются единственным образом на любой момент $t\geqslant t_0$.

Доказательство. Предположим, что существуют два различных решения указанной задачи, удовлетворяющих соотношениям (1)– (3), уравнениям равновесия, соотношениям Коши и одним и тем же указанным граничным и начальным условиям. Следовательно, к разности этих полей можно применить известное уравнение виртуальных работ, которое вследствие нулевых граничных условий дает [1]:

$$\int_v \Delta\sigma_{kl}\Delta\varepsilon_{kl}dv=0. \tag{6}$$

Применяя (6) к полям $\Delta\sigma_{kl}$ и $\Delta\dot\varepsilon_{kl}$, а затем к $\Delta\dot\sigma_{kl}$ и $\Delta\varepsilon_{kl}$, получим равенства

$$\int_v \Delta\sigma_{kl}\Delta\dot\varepsilon_{kl}dv=\int_v \Delta\dot\sigma_{kl}\Delta\varepsilon_{kl}dv=0.$$

Используя эти равенства и проводя рассуждения, аналогичные рассмотренным выше, нетрудно преобразовать (6) к виду

$$\int_v\left[a_{klmn}\Delta\sigma_{kl}\Delta\sigma_{mn}+2\int_{t_0}^{t}\Delta\sigma_{kl}\Delta\eta_{kl}dt\right]dv=0,$$

что возможно только при $\Delta\sigma_{kl}=0$. Тогда на основании (1)–(3) и $\Delta\varepsilon_{kl}=$ $=\Delta\varepsilon^c_{kl}=0$, $\Delta q_i=0$ $(k,\ l=1,\ 2,\ 3;\ i=1,\ 2,\ldots,\ p)$ на любой момент $t\geqslant t_0$. $\square$

О единственности решения краевых задач необходимо сделать следующее замечание. Доказательство, приведенное выше, справедливо при условии, что компоненты тензоров напряжений и деформаций в каждой точке тела и соответствующие граничные условия являются дифференцируемыми функциями времени. Если же предположить, что указанные функции имеют производные любого порядка при $t\geqslant t_0$, то теорема единственности может быть доказана без использования условия (4).

Действительно, покажем сначала, что при выполнении указанных условий все производные по времени от компонент напряжений при $t=t_0$ определяются единственным образом, т. е. $\Delta\dot\sigma^{(N)}_{kl}=0$ во всем объеме тела $(k,\ l=$ $=1,\ 2,\ 3;\ N=1,\ 2,\ \ldots)$.

Заметим, что при $t=t_0$ поля $\Delta\sigma_{kl}=0$ (доказательство этого факта приведено в [1]). Следовательно, на основании (2) и начальных условий однозначно будут определяться и ε^c_{kl}, т. е. $\Delta\varepsilon^c_{kl}=0$ $(k,\ l=1,\ 2,\ 3)$.

Применим к полям $\Delta\dot\sigma_{kl}$ и $\Delta\dot\varepsilon_{kl}$ при $t=t_0$ уравнение виртуальных работ:

$$\int_v \Delta\dot\sigma_{kl}\Delta\dot\varepsilon_{kl}dv=\int_v a_{klmn}\Delta\dot\sigma_{kl}\Delta\dot\sigma_{mn}dv+\int_v \Delta\dot\varepsilon^c_{kl}\Delta\dot\sigma_{kl}dv=0.$$

Так как $\Delta\dot\varepsilon^c_{kl}=0$, первый интеграл второй части равенства равен нулю, что возможно только при $\Delta\dot\sigma_{kl}=0$ $(k,l=1,2,3)$. На основании (3) единственным образом будут определяться и $\dot q_i$ при $t=t_0$.

Применяя уравнение виртуальных работ к полям $\Delta\ddot{\sigma}_{kl}$ и $\Delta\ddot{\varepsilon}_{kl}$ и учитывая, что из (2) следует

$$\ddot{\varepsilon}^c_{kl} = \ddot{\varepsilon}^c_{kl}(\sigma_{mn},\, \dot{\sigma}_{mn},\, q_i,\, \dot{q}_i),$$

т. е. при $t = t_0$ поля $\Delta\ddot{\varepsilon}^c_{kl} = 0$, получим $\Delta\ddot{\sigma}_{kl} = 0$ при $t = t_0$.

Проводя последовательно аналогичные рассуждения для полей $\Delta\dot{\sigma}^{(N)}_{kl}$ и $\Delta\dot{\varepsilon}^{(N)}_{kl}$ и учитывая, что на основании (2) и (3) компоненты $\dot{\varepsilon}^{(N)c}_{kl}$ зависят от производных по t не выше $N-1$ порядка от σ_{mn} и q_i, а $\dot{q}^{(N-1)}_i$ — от аналогичных производных не выше $N-1$ порядка от σ_{mn} и $N-2$ порядка от ε^c_{mn} и q_j, убеждаемся в том, что $\Delta\dot{\sigma}^{(N)}_{kl} = 0$ при $t = t_0$ для любого $N > 2$ $(k,\, l,\, m,\, n = 1,\, 2,\, 3;\ i,\, j = 1,\, 2,\, \ldots,\, p)$ во всем объеме тела.

Раскладывая разность двух решений для напряжений в ряды Тейлора по времени при $t \geqslant t_0$, получим

$$\Delta\sigma_{kl}(x_j,\, t) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^N}{N!} \Delta\dot{\sigma}^{(N)}_{kl}(x_j,\, t_0) \quad (k,\, l,\, j = 1,\, 2,\, 3).$$

Эти ряды сходятся к нулю. Следовательно, компоненты напряжений в теле определяются единственным образом при любом конечном $t \geqslant t_0$. Тогда из (1)–(3) и начальных условий получим, что поля $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}(x_j, t)$, $\varepsilon^c_{kl} = \varepsilon^c_{kl}(x_j, t)$, $q_i = q_i(x_j,\, t)$ также единственны $(k,\, l,\, j = 1,\, 2,\, 3;\ i = 1,\, 2,\, \ldots,\, p)$.

Необходимо отметить, что аналогичный прием был использован в [4] при доказательстве теоремы единственности для упрочняющегося упругопластического тела.

2. Рассмотрим процесс деформирования упрочняющейся среды, одноосная ползучесть которой при постоянном напряжении $\sigma > 0$ описывается уравнением [2]

$$\dot{\varepsilon} = B\varepsilon^{-\alpha}\sigma^n, \tag{7}$$

где ε — деформация ползучести, $B > 0$, $n > 0$, $\alpha > 0$ — характеристики материала. Эта зависимость хорошо описывает первые участки кривых ползучести при постоянных напряжениях. В случае переменных нагрузок для удовлетворительного описания одноосной ползучести, как показано в [2, 5], более надежной является зависимость

$$\dot{\varepsilon} = BA^{-\alpha}\sigma^{n+\alpha}, \quad A = \int_{t_0}^{t} \sigma\dot{\varepsilon}dt, \tag{8}$$

совпадающая с уравнением (7) при $\sigma = \mathrm{const}$, если $\varepsilon(t_0) = 0$. Параметр упрочнения A, входящий в (8), представляет собой величину удельной рассеянной при ползучести энергии.

Соотношение (8) можно обобщить на случай сложного напряженного состояния разными способами. По-видимому, наиболее простое и удобное обобщение состоит в предположении о том, что зависимость между скоростями деформаций ползучести и напряжениями имеет вид [2]

$$\eta_{kl} = A^{-\alpha}\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{kl}}, \quad A = \int_{t_0}^{t} \sigma_{kl}\eta_{kl}dt, \tag{9}$$

где Φ — однородная степени $n + \alpha + 1$ функция относительно компонент напряжений. Умножая (9) на σ_{kl}, суммируя по индексам k и l и учитывая однородность Φ, получим дифференциальное уравнение, описывающее изменение величины A во времени:

$$\dot{A} = (m+1)A^{-\alpha}\Phi, \quad m = n + \alpha. \tag{10}$$

Соотношения (9), (10) описывают процесс ползучести изотропно упрочняющегося материала и являются частным случаем общих уравнений (2), (3), когда в качестве единственного структурного параметра взята величина удельной рассеянной энергии. За счет подходящего выбора функции Φ могут быть учтены, например, такие свойства материала, как разносопротивляемость растяжению и сжатию, начальная анизотропия и т. д. [2, 6–8].

Из условия (4) следует выпуклость поверхностей $\Phi = \mathrm{const}$ в пространстве напряжений [6], что накладывает на функцию $\Phi = \Phi(\sigma_{kl})$ определенные ограничения. Для случая изотропной среды последние приведены в [9].

В дальнейшем аналогично [2] будем считать, что зависимость Φ от напряжений имеет вид

$$\Phi = B/(m+1)s^{m+1},$$

где $s = s(\sigma_{kl}) > 0$ — некоторый инвариант тензора напряжений, являющийся выпуклой однородной функцией первой степени относительно σ_{kl} и совпадающий при одноосном растяжении с σ. Тогда условие выпуклости поверхностей $\Phi = \mathrm{const}$ сведется к требованию $m \geqslant 0$, которое удовлетворяется в силу первоначального предположения о том, что константы n и α положительны.

Как видно из уравнений (9), (10), скорости деформаций ползучести будут бесконечно большими, если в какой-то момент времени $A = 0$. Однако, несмотря на эту особенность, можно получить достаточные условия выполнимости неравенства (4) и тем самым обеспечить справедливость доказанных в п. 1 теорем для рассматриваемого класса упрочняющихся материалов. Для этого представим связь между скоростями деформаций ползучести и напряжениями в явном виде. Интегрируя (10) и учитывая вид функции Φ, получим равенство

$$A = \left[A_0^{\alpha+1} + B(\alpha+1)\int_{t_0}^{t} s^{m+1}dt\right]^{1/(\alpha+1)},$$

где A_0 — значение A при $t = t_0$, подстановка которого в (9) дает искомое представление

$$\eta_{kl} = BF^{-\varkappa}s^m\frac{\partial s}{\partial \sigma_{kl}} \quad (k,\ l = 1,\ 2,\ 3), \tag{11}$$

где

$$F = A_0^{\alpha+1} + B(\alpha+1)\int_{t_0}^{t} s^{m+1}dt, \quad \varkappa = \frac{\alpha}{\alpha+1} \quad (0 < \varkappa < 1).$$

Рассмотрим два пути нагружения: $\sigma_{kl}^{(1)} = \sigma_{kl}^{(1)}(t)$ и $\sigma_{kl}^{(2)} = \sigma_{kl}^{(2)}(t)$, которым соответствуют согласно (11) значения $\eta_{kl}^{(1)} = \eta_{kl}^{(1)}(t)$ и $\eta_{kl}^{(2)} = \eta_{kl}^{(2)}(t)$, причем при $t = t_0$ величина $A = A_0$ для обоих путей. Как и в п. 1, соответствующие разности будем обозначать, вводя символ Δ.

Докажем следующее утверждение.

Утверждение. *Для того чтобы имело место неравенство (4) при законе связи между напряжениями и скоростями деформаций в форме (11) для любых двух указанных путей и при любом значении $A_0 \geqslant 0$, достаточно выполнения известного условия из [10]: $n > \alpha + 1$.*

Доказательство. Из (11) имеем

$$\Delta\sigma_{kl}\Delta\eta_{kl} = B\Big(F_1^{-\varkappa}s_1^m \frac{\partial s}{\partial\sigma_{kl}}\Big|_{\sigma_{kl}=\sigma_{kl}^{(1)}} - F_2^{-\varkappa}s_2^m \frac{\partial s}{\partial\sigma_{kl}}\Big|_{\sigma_{kl}=\sigma_{kl}^{(2)}}\Big)\Delta\sigma_{kl}.$$

Так как $s = s(\sigma_{kl})$ — выпуклая функция,

$$\frac{\partial s}{\partial\sigma_{kl}}\Big|_{\sigma_{kl}=\sigma_{kl}^{(1)}}\Delta\sigma_{kl} \geqslant \Delta s, \quad -\frac{\partial s}{\partial\sigma_{kl}}\Big|_{\sigma_{kl}=\sigma_{kl}^{(2)}}\Delta\sigma_{kl} \geqslant -\Delta s$$

(см., например, [11]), следовательно,

$$\Delta\sigma_{kl}\Delta\eta_{kl} \geqslant B\left(F_1^{-\varkappa}s_1^m - F_2^{-\varkappa}s_2^m\right)\Delta s = B\Delta\left(F^{-\varkappa}s^m\right)\Delta s. \tag{12}$$

Рассмотрим выражение

$$\psi(\lambda) = F^{-\varkappa}(s_2 + \lambda(s_1 - s_2))\left[s_2 + \lambda(s_1 - s_2)\right]^m,$$

которое при заданных $\sigma_{kl}^{(1)} = \sigma_{kl}^{(1)}(t)$ и $\sigma_{kl}^{(2)} = \sigma_{kl}^{(2)}(t)$ и фиксированном значении t является функцией числового аргумента λ: $\psi = \psi(\lambda)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Очевидно, что $\psi(0) = F_2^{-\varkappa}s_2^m$ и $\psi(1) = F_1^{-\varkappa}s_1^m$. Раскладывая ее в ряд Тейлора в окрестности нуля, получим

$$\psi(1) = \psi(0) + \frac{d\psi}{d\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_*}, \quad 0 < \lambda_* < 1,$$

следовательно,

$$\Delta\left(F^{-\varkappa}s^m\right) = \frac{d\psi}{d\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_*} = \\ = -\varkappa F_*^{-\varkappa-1}B(\alpha+1)(m+1)\Big(\int_{t_0}^t s_*^m\Delta s dt\Big)s_*^m + F_*^{-\varkappa}ms_*^{m-1}\Delta s, \tag{13}$$

где звездочка указывает на то, что соответствующие величины берутся при значении $s_* = s_2 + \lambda_*(s_1 - s_2)$.

Таким образом, с учетом (12) и полученного равенства (13) будем иметь

$$\int_{t_0}^t \Delta\sigma_{kl}\Delta\eta_{kl}dt \geqslant -B^2\varkappa(\alpha+1)(m+1)\int_{t_0}^t F_*^{-\varkappa-1}\Big[s_*^m\Delta s\Big(\int_{t_0}^t s_*^m\Delta s dt\Big)\Big]dt+ \\ + Bm\int_{t_0}^t F_*^{-\varkappa}\left[s_*^{m-1}(\Delta s)^2\right]dt = -\frac{B^2}{2}\varkappa(\alpha+1)(m+1)\times \\ \times\Big[F_*^{-\varkappa-1}\Big(\int_{t_0}^t s_*^m\Delta s dt\Big)^2\Big]_{t_0}^t - \frac{B^2}{2}\varkappa(\varkappa+1)(\alpha+1)(m+1)\times$$

$$\times \int_{t_0}^{t} F_*^{-\varkappa-2}\dot{F}_*\left(\int_{t_0}^{t} s_*^m \Delta s dt\right)^2 dt + Bm\left[F_*^{-\varkappa}\int_{t_0}^{t} s_*^{m-1}(\Delta s)^2 dt\right]_{t_0}^{t} +$$
$$+ B\varkappa m \int_{t_0}^{t} F_*^{-\varkappa-1}\dot{F}_*\left(\int_{t_0}^{t} s_*^{m-1}(\Delta s)^2 dt\right)dt. \quad (14)$$

В (14) использована процедура интегрирования по частям, соответствующие члены в подынтегральных выражениях, следующие в (14) за знаком неравенства, взяты в квадратные скобки.

При $t = t_0$ будем иметь

$$F_*^{-\varkappa}\int_{t_0}^{t} s_*^{m-1}(\Delta s)^2 dt = F_*^{-\varkappa-1}\left(\int_{t_0}^{t} s_*^m \Delta s dt\right)^2 = 0.$$

Действительно, если $A_0 > 0$, то $F_*^{-\varkappa} > 0$ и $F_*^{-\varkappa-1} > 0$, а оба интеграла при $t = t_0$ обращаются в нуль. Если же $A_0 = 0$, то в обоих приведенных выражениях получается неопределенность типа $[0/0]$. Раскроем, например, второе из них, учитывая соотношение для F из (11) ($\varkappa = \alpha/(\alpha+1)$):

$$\lim_{t\to t_0}\left(\int_{t_0}^{t} s_*^m \Delta s dt\right)^2 F_*^{-\varkappa-1} = [B(\alpha+1)]^{-\varkappa-1}\left[s_*(t_0)\right]^{\beta}\left[\Delta s(t_0)\right]^2 \lim_{t\to t_0}(t-t_0)^{\xi},$$

где $\beta = (n-\alpha-1)/(\alpha+1)$, $\xi = 1/(\alpha+1)$. Видно, что этот предел равен нулю при любом $s_*(t_0) \geqslant 0$, если $n > \alpha+1$. Совершенно аналогично показывается, что и

$$\lim_{t\to t_0} F_*^{-\varkappa}\int_{t_0}^{t} s_*^{m-1}(\Delta s)^2 dt = 0 \quad \text{при} \quad n > \alpha+1.$$

С учетом сделанного замечания и неравенств

$$F_* \geqslant 0, \quad \dot{F}_* = B(\alpha+1)s_*^{m+1} \geqslant 0$$

из (14) следует, что (4) будет иметь место, если

$$\Phi_1 \geqslant 0,$$

где

$$\Phi_1 = mF_*(t)\int_{t_0}^{t} s_*^{m-1}(\Delta s)^2 dt - \frac{B}{2}(\varkappa+1)(\alpha+1)(m+1)\left(\int_{t_0}^{t} s_*^m \Delta s dt\right)^2.$$

Для наших целей достаточно первого неравенства, так как оно обеспечивает выполнимость второго. Оценим величину Φ_1. Используя выражение для F_* из (11) и учитывая, что $A_0 \geqslant 0$, получим следующую цепочку неравенств:

$$\Phi_1 \geqslant B(\alpha+1)\left[m\left(\int_{t_0}^{t} s_*^{m+1} dt\right)\left(\int_{t_0}^{t} s_*^{m-1}(\Delta s)^2 dt\right) -\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}(\varkappa+1)(m+1)\left(\int_{t_0}^{t} s_*^m (\Delta s) dt\right)^2\right] \geqslant$$

$$
\geqslant B(\alpha+1)\left[m\left(\int_{t_0}^{t} s_*^{1/2(m+1)} s_*^{1/2(m-1)}\Delta s dt\right)^2 - \right.
$$
$$
\left. -\frac{1}{2}(\varkappa+1)(m+1)\left(\int_{t_0}^{t} s_*^m \Delta s dt\right)^2\right] =
$$
$$
= B(\alpha+1)\left[m - \frac{1}{2}(\varkappa+1)(m+1)\right]\left(\int_{t_0}^{t} s_*^m \Delta s dt\right)^2.
$$

Здесь было применено известное неравенство Коши—Буняковского.

Таким образом, постулат устойчивости в форме (4) для рассматриваемого закона ползучести (11) будет заведомо выполнен, если

$$
2m - (\varkappa+1)(m+1) \geqslant 0,
$$

откуда с учетом равенств $\varkappa = \alpha/(\alpha+1)$, $m = n+\alpha$ следует условие $n \geqslant \alpha+1$. Для того чтобы избежать отмеченной выше возможной особенности при $t = t_0$, когда $s_*(t_0) = 0$, достаточно, чтобы это неравенство было строгим. Утверждение доказано. □

Приведем некоторые соображения в пользу необходимости условия $n \geqslant \alpha+1$ для выполнимости (4). Будем рассматривать два бесконечно близких пути $\sigma_{kl}^{(1)} = \sigma_{kl}(t)$ и $\sigma_{kl}^{(2)} = \sigma_{kl}(t) + \delta\sigma_{kl}(t)$. Соответствующие приращения $\delta\eta_{kl}$ можно найти из (11):

$$
\begin{gathered}
\delta\sigma_{kl}\delta\eta_{kl} = B\left[-\varkappa F^{-\varkappa-1}\delta F s^m \delta s + m F^{-\varkappa} s^{m-1}(\delta s)^2 + F^{-\varkappa} s^m \delta^2 s\right],\\
\delta s = \frac{\partial s}{\partial\sigma_{kl}}\delta\sigma_{kl}, \quad \delta^2 s = \frac{\partial^2 s}{\partial\sigma_{kl}\partial\sigma_{ij}}\delta\sigma_{kl}\delta\sigma_{ij},\\
\delta F = B(\alpha+1)(m+1)\int_{t_0}^{t} s^m \delta s dt.
\end{gathered}
\tag{15}
$$

Очевидно, всегда можно подобрать такие приращения напряжений $\delta\sigma_{kl}$, чтобы выполнялось равенство $\delta^2 s = 0$. Действительно, так как s — однородная первой степени относительно напряжений функция,

$$
\frac{\sigma_{ij}\partial^2 s}{\partial\sigma_{kl}\partial\sigma_{ij}} = 0 \quad (k,\ l = 1,\ 2,\ 3).
$$

Следовательно, если положить $\delta\sigma_{kl} = \delta\xi\sigma_{kl}$ ($\delta\xi$ — любой скалярный множитель), то $\delta^2 s = 0$.

В дальнейшем величины s, δs и t будем считать безразмерными, т. е. отнесенными к некоторым положительным постоянным s_0, δs_0 и t_0. За исходный путь нагружения возьмем такой, при котором $A_0 = 0$, $s = t^p$, $p > 0$, $t \geqslant 0$, а дополнительный примем пропорциональным исходному:

$$
\delta\sigma_{kl} = t^{-p}\sigma_{kl}.
$$

Тогда $\delta s = 1$ и $\delta^2 s = 0$. Подставляя эти величины в (15) и затем интегрируя по времени от нуля до t, после несложных выкладок получим

$$
J = \int_0^t \delta\sigma_{kl}\delta\eta_{kl} dt = \frac{ck}{\gamma} t^\gamma \Big|_0^t, \tag{16}
$$

$$c = \frac{B^{1-\varkappa}(\alpha+1)^{-\varkappa}}{pm+1}\big[p(m+1)+1\big]^{\varkappa} > 0,$$

$$k = \frac{p\left[n^2 - \alpha(\alpha+1)\right] + n}{\alpha+1}, \quad \gamma = \frac{p(n-\alpha-1)+1}{\alpha+1}.$$

Отсюда видно, что если $n \geqslant \alpha + 1$, то $\gamma > 0$, $k > 0$, поскольку $p > 0$ и $J > 0$. Если же $n < \alpha + 1$, то возможны три случая:

1) $\gamma > 0$, $k < 0$, т. е. когда

$$\frac{n}{\alpha(\alpha+1) - n^2} < p < \frac{1}{\alpha + 1 - n},$$

что возможно при $n < \alpha$; в этом случае $J < 0$;

2) $\gamma < 0$, $k < 0$, что возможно, если $n < [\alpha(\alpha+1)]^{1/2}$; при этом достаточно выбрать

$$p > \max\left\{\frac{n}{\alpha(\alpha+1) - n^2}, \frac{1}{\alpha+1-n}\right\};$$

в этом случае $J = -\infty$;

3) $\gamma < 0$, $k > 0$; если $n > [\alpha(\alpha+1)]^{1/2}$, то достаточно выбрать

$$p > \frac{1}{\alpha+1-n},$$

если же $n < [\alpha(\alpha+1)]^{1/2}$, то

$$\frac{1}{\alpha+1-n} < p < \frac{n}{\alpha(\alpha+1) - n^2},$$

что возможно при $n > \alpha$; в этом случае $J = +\infty$.

Таким образом, если $n < \alpha + 1$, то при подходящем выборе $p > 0$ значение интеграла (16) может быть либо отрицательным, т. е. постулат (4) будет нарушен, либо бесконечно большим при конечных значениях времени и действующих напряжений. Последнее, очевидно, лишено элементарного физического смысла.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Koiter W. T. General theorems for elastic-plastic solids / *Progress in solid mechanics.* vol. 1. Amsterdam: North-Holland Publ., 1960. 165–221 pp.
2. Работнов Ю. Н. *Ползучесть элементов конструкций.* М.: Наука, 1966. 752 с.
3. Drucker D. C. A definition of a stable inelastic material // *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1959. vol. 26, no. 1. pp. 101–106.
4. Быковцев Г. И. О теоремах единственности в теории течения упрочняющихся упругопластических тел / *Механика деформируемых тел и конструкций.* М.: Машиностроение, 1975. С. 84–91.
5. Соснин О. В., Шокало И. К. Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности: Сообщ. 2. Ползучесть и разрушение материалов с начальным упрочнением // *Проблемы прочности*, 1974. №1. С. 43–48.
6. Цвелодуб И. Ю. О формах связи между тензорами напряжений и скоростей деформаций ползучести в изотропных устойчивых средах // *Проблемы прочности*, 1979. №9. С. 27–30.

7. Никитенко А. Ф., Цвелодуб И. Ю. О ползучести анизотропных материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие / *Динамика сплошной среды*: Сб. статей., Вып. 43. Новосибирск: Институт гидродинамики СО АН СССР, 1978. С. 69–78.
8. Цвелодуб И. Ю. О некоторых возможных путях построения теории установившейся ползучести сложных сред // *Изв. АН. СССР. МТТ*, 1981. №2. С. 48–55.
9. Цвелодуб И. Ю. К разномодульной теории упругости изотропных материалов / *Динамика сплошной среды*: Сб. статей, Вып. 32. Новосибирск: Институт гидродинамики СО АН СССР, 1977. С. 123–131.
10. Шестериков С. А. Об одном условии для законов ползучести // *Изв. АН СССР. ОТН. Механ. и машиностр.*, 1961. №1. С. 131.
11. Гольденблат И. И. *Нелинейные проблемы теории упругости*: Наука, 1969. 366 с.

Поступила в редакцию 16/VII/2014;
в окончательном варианте — 13/VIII/2014;
принята в печать — 10/IX/2014.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki. 2014. Issue 3 (36). Pp. 106–117
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci. 2014. Issue 3 (36). Pp. 106–117]

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1345

MSC: 74G30

ON THE CREEP THEORY FOR THE STRAIN-HARDENING MATERIALS

I. Yu. Tsvelodub

M. A. Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch of RAS,
15, Lavrentyeva pr., Novosibirsk, 630090, Russian Federation.

Abstract

The deformation process of the medium with full strains equaled to the sum of elastic and creep strains is considered. Elastic strains are described by Hook's law while creep strains velocities are functions of stress components and some structural parameters, velocities of their changing are described by Rabotnov's kinetic equations. It is assumed that Drucker's stability postulate in big, formulated for materials with time-depending behaviour, is valid for creep strains. The inversion of depends between stresses and strains as well as uniqueness of the solution of boundary value problems are discussed. A special case of aforementioned creep equations for a strengthening material, when the strengthening parameter is the value of specific scattered creep energy, is considered. The sufficient conditions for Drucker's stability postulate fulfillment in big are determined for this case, the reasons in favor of necessity of these conditions are given.

Keywords: creep, hardening material, small deformation, kinetic equations, stability, Drukker's postulate, solution uniqueness.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1345

How to cite Reference: T s v e l o d u b I. Yu. On the Creep Theory for the Strain-Hardening Materials, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 3 (36), pp. 106–117. doi: 10.14498/vsgtu1345. (In Russian)

Author Details: *Igor Yu. Tsvelodub* (Dr. Phys. & Math. Sci.; itsvel@hydro.nsc.ru), Head of Laboratory, Laboratory of Static Strength, Dept. of Structural Mechanics.

REFERENCES

1. Koiter W. T. General theorems for elastic-plastic solids, *Progress in solid mechanics*, vol. 1. Amsterdam, North-Holland Publ., 1960, 165–221 pp.
2. Rabotnov Yu. N. *Polzuchest' elementov konstruktsii* [Creep of structural elements]. Moscow, Nauka, 1966, 752 pp. (In Russian)
3. Drucker D. C. A definition of a stable inelastic material, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1959, vol. 26, no. 1, pp. 101–106.
4. Bykovtsev G. I. On the uniqueness theorems in the theory of flow hardening elastic-plastic bodies, *Mekhanika deformiruemykh tel i konstruktsii* [Mechanics of deformable bodies and structures]. Moscow, Mashinostroenie, 1975, pp. 84–91 (In Russian).
5. Sosnin O. V., Shokalo I. K. Energy version of creep and long-term strength theory – 2. Creep and rupture of materials with initial strengthening, *Strength of Materials*, 1974, vol. 6, no. 1, pp. 41–46. doi: 10.1007/BF01528158.
6. I. Yu. Tsvelodub Forms of correlation between stress tensors and creep-strain rates in isotropic stable media, *Strength of Materials*, 1979, Т. 11, № 9, С. 966–970. doi: 10.1007/BF00768350.
7. Nikitenko A. F., Tsvelodub I. Yu. Creep of anisotropic materials with different properties in tension and compression, *Dinamika sploshnoi sredy* [Dynamics of Continuous Media], Issue 43. Novosibirsk, Institut gidrodinamiki SO AN SSSR, 1978, pp. 69–78 (In Russian).
8. Tsvelodub I. Yu. Some possible ways of setting up a theory of steady-state creep of complex media, *Mechanics of solids*, 1981, vol. 16, no. 2, pp. 39–45.
9. Tsvelodub I. Yu. To the multimodulus theory of elasticity for isotropic materials, *Dinamika sploshnoi sredy* [Dynamics of Continuous Media], Issue 32. Novosibirsk, Institut gidrodinamiki SO AN SSSR, 1977, pp. 123–131 (In Russian).
10. Shesterikov S. A. On the one condition for creep law, *Izv. AN SSSR. OTN. Mekhan. i mashinostr.*, 1961, no. 1, pp. 131 (In Russian).
11. Gol'denblat I. I. *Nelineinye problemy teorii uprugosti* [Nonlinear problems in elasticity theory], Nauka, 1969, 366 pp. (In Russian)

Received 16/VII/2014;
received in revised form 13/VIII/2014;
accepted 10/IX/2014.