Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2014. № 4 (37). С. 121–132

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1346

УДК 539.376

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ В МАЛОМ ЗАДАЧИ РАВНОНАПРЯЖЕННОГО АРМИРОВАНИЯ МЕТАЛЛОКОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН, РАБОТАЮЩИХ В УСЛОВИЯХ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

А. П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
Россия, 630090, Новосибирск, ул. Институтская, 4/1.

Аннотация

Доказана единственность решения в малом (в смысле отсутствия бесконечно близких решений) краевой задачи равнонапряженного армирования металлокомпозитных пластин, работающих в условиях установившейся ползучести материалов всех фаз композиции, когда помимо статических и кинематических граничных условий и краевых условий для плотностей армирования, которые естественны в таких задачах, на контуре пластины задаются дополнительные краевые условия для углов армирования. В большом (в смысле существенного различия решений) эта задача в силу нелинейности статических граничных условий и условий равнонапряженности арматуры может иметь несколько, но не бесконечно близких, альтернативных решений. Исследование проблемы единственности решения указанной задачи необходимо при изучении вопроса корректности постановки задач равнонапряженного армирования.

Ключевые слова: равнонапряженное армирование, металлокомпозитные пластины, установившаяся ползучесть, единственность решения, корректность краевой задачи.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1346

Введение. При создании изделий из композиционных материалов на этапе их проектирования целесообразно осуществлять оптимизацию не только их формы, но и структуры армирования [1]. Одним из естественных критериев рационального армирования (оптимизации по физическому критерию) композитных конструкций служит требование равнонапряженности волокон вдоль их траекторий, что позволяет наиболее полно использовать несущую способность высокопрочной и жесткой арматуры [1, 2 и др.]. При длительном стационарном термосиловом нагружении большую часть времени конструкции из металлокомпозитов, которые в последнее время находят все большее

Образец для цитирования

Я н к о в с к и й А. П. Единственность решения в малом задачи равнонапряженного армирования металлокомпозитных пластин, работающих в условиях установившейся ползучести // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 4 (37). С. 121–132. doi: 10.14498/vsgtu1346.

Сведения об авторе

Андрей Петрович Янковский (д.ф.-м.н.; lab4nemir@rambler.ru), ведущий научный сотрудник, лаб. физики быстропротекающих процессов.

применение в инженерной практике, работают в условиях установившейся ползучести [3], поэтому актуальной является проблема определения структур равнонапряженного армирования (РА) тонкостенных металлокомпозитных конструкций, работающих в условиях установившейся ползучести всех фаз композиции.

Постановка задачи РА металлокомпозитных пластин, нагруженных в своей плоскости, армированных волокнами (проволоками) постоянного поперечного сечения и работающих в условиях установившейся ползучести, приведена в [4], а для поперечно изгибаемых пластин в [5]. Однако, как показано в [4–8], такие задачи РА с математической точки зрения обладают рядом специфических особенностей:

1) являются задачами с сингулярным возмущением [6, 8];
2) в силу существенной нелинейности (как обратные задачи механики композитов) могут иметь несколько альтернативных решений [6–9].

Эти особенности предъявляют повышенные требования к исследованию вопросов, связанных с корректностью задач РА, а также к разработке методов их интегрирования, позволяющих надежно выделять конкретное решение из возможной их совокупности.

Проблема корректности постановки краевых задач (в частности, вопросы, связанные с существованием и единственностью решения) актуальна не только для механики композитов, но и для механики деформируемого твердого тела в целом [1, 10 и др.], а также для физики [11, 12] и других естественнонаучных дисциплин [13, 14].

В связи с этим настоящее исследование посвящено изучению проблемы единственности решения задач РА металлокомпозитных пластин, работающих в условиях установившейся ползучести.

1. Система разрешающих уравнений и граничные условия в плоской задаче РА при установившейся ползучести фаз композиции. Полная система разрешающих уравнений, описывающая в декартовых координатах x_1, x_2 механическое поведение металлокомпозитной пластины постоянной толщины h, нагруженной в своей плоскости и равнонапряженно-армированной N семействами волокон (проволок) постоянного поперечного сечения, при установившейся ползучести материалов всех фаз композиции имеет вид [4, 6]:

$$\sum_k (-1)^i \sigma_k \omega_k l_{kj} \partial_k(\psi_k) + B_i(\boldsymbol{v}, \theta, \boldsymbol{\omega}) = -X_i(x_1, x_2, \boldsymbol{\omega}), \ j = 3 - i, \ i = 1, 2; \tag{1}$$

$$(\omega_k l_{k1})_{,1} + (\omega_k l_{k2})_{,2} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, N; \tag{2}$$

$$\partial_k(v_1)\cos\psi_k + \partial_k(v_2)\sin\psi_k = \xi_k(\theta) = G_k(\sigma_k, \theta), \ \sigma_k = \mathrm{const}, \ 1 \leqslant k \leqslant N; \tag{3}$$

$$(\Lambda_{11}\theta_{,1} + \Lambda_{12}\theta_{,2})_{,1} + (\Lambda_{21}\theta_{,1} + \Lambda_{22}\theta_{,2})_{,2} + 2\mu(\theta_\infty - \theta)/h = -Q(x_1, x_2, \boldsymbol{\omega}), \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered} B_i(\boldsymbol{v}, \theta, \boldsymbol{\omega}) = 2\left[a g_0(H, \theta)(2v_{i,i} + v_{j,j})\right]_{,i} + \left[a g_0(H, \theta)(v_{i,j} + v_{j,i})\right]_{,j}, \\ \boldsymbol{v} = \{v_1, v_2\}, \quad \boldsymbol{\omega} = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}, \quad a = 1 - \Omega, \quad \Omega = \sum_k \omega_k, \\ H = 2\sqrt{v_{1,1}^2 + v_{1,1}v_{2,2} + v_{2,2}^2 + 0.25(v_{1,2} + v_{2,1})^2}, \\ l_{k1} = \cos\psi_k, \quad l_{k2} = \sin\psi_k, \quad \partial_k(\,\cdot\,) = (\,\cdot\,)_{,1}\cos\psi_k + (\,\cdot\,)_{,2}\sin\psi_k, \\ j = 3 - i, \quad i = 1, 2, \quad 1 \leqslant k \leqslant N; \end{gathered} \tag{5}$$

$$\Lambda_{ij} = \Omega^{-1} \sum_k \omega_k \left\{ [\Omega(\lambda_k - \lambda_0) + \lambda_0] l_{ki} l_{kj} + (-1)^{i+j} l_{ks} l_{kr} \lambda_k \lambda_0 \times \right.$$
$$\left. \times [\Omega(\lambda_0 - \lambda_k) + \lambda_k]^{-1} \right\}, \quad s = 3 - i,\ r = 3 - j,\ i, j = 1, 2. \quad (6)$$

На одной части контура пластины (обозначим ее Γ_p) могут быть заданы статические граничные условия [4, 6]:

$$\begin{gathered} \sum_k \sigma_k \omega_k \cos^2(\psi_k - \beta) + D_n(\boldsymbol{v}, \theta, \omega) = p_n, \\ \sum_k \sigma_k \omega_k \sin 2(\psi_k - \beta) + D_\tau(\boldsymbol{v}, \theta, \omega) = 2p_\tau, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_p, \end{gathered} \quad (7)$$

на другой части контура (обозначим ее Γ_v) — кинематические граничные условия

$$v_i(\Gamma_v) = v_{i0}, \quad i = 1, 2, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_v \quad (8)$$

и на всем контуре ($\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_v$) — тепловые граничные условия

$$\chi_0[(\Lambda_{11}\theta_{,1} + \Lambda_{12}\theta_{,2})n_1 + (\Lambda_{21}\theta_{,1} + \Lambda_{22}\theta_{,2})n_2 + q_0] +$$
$$+ \chi_1(\theta - \theta_0) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma, \quad (9)$$

где

$$\begin{gathered} D_n(\boldsymbol{v}, \theta, \boldsymbol{\omega}) = 2ag_0(H, \theta) \left[v_{1,1}(1 + n_1^2) + v_{2,2}(1 + n_2^2) + (v_{1,2} + v_{2,1})n_1 n_2 \right], \\ D_\tau(\boldsymbol{v}, \theta, \boldsymbol{\omega}) = 2ag_0(H, \theta) \left[2(v_{2,2} - v_{1,1})n_1 n_2 + (v_{1,2} + v_{2,1})(n_1^2 - n_2^2) \right], \\ n_1 = \cos\beta, \quad n_2 = \sin\beta. \end{gathered} \quad (10)$$

Каждое из условий (7), (8) также может быть задано на всем контуре Γ. Кроме того, возможно и задание смешанных из (7), (8) граничных условий.

На части контура Γ (обозначим ее $\Gamma_{\omega k}$), на которой волокна k-того семейства входят в пластину, необходимо задать краевые условия для плотностей армирования:

$$\omega_k(\Gamma_{\omega k}) = \omega_{0k}, \quad k = 1, 2, \ldots, N. \quad (11)$$

В уравнениях и соотношениях (1)–(11) приняты следующие обозначения: X_i, v_i — компоненты векторов приведенных массовых сил (см. (1.1) в [4]) и скорости ползучести точек пластины по направлениям x_i ($i = 1, 2$); σ_k, ξ_k — напряжение и скорость деформации ползучести в k-том семействе арматуры, связанные известной функциональной зависимостью $\xi_k = G_k(\sigma_k, \theta)$; θ, θ_∞, θ_0 — отклонение температуры пластины t от температуры ее естественного состояния t_* ($\theta = t - t_*$), отклонение температуры окружающей среды t_∞ на лицевых плоскостях конструкции от t_* и отклонение температуры окружающей среды t_0 на торцевой поверхности пластины от t_*; $g_0(H, \theta)$ — заданная функция, являющаяся коэффициентом пропорциональности между интенсивностью касательных напряжений T и интенсивностью скоростей деформаций H в связующем: $T = g_0(H, \theta)H$; ω_k, ψ_k — плотность и угол (отсчитываемый от направления x_1) армирования волокнами k-того семейства, причем должны выполняться физические ограничения

$$0 \leqslant \omega_k \quad (k = 1, 2, \ldots, N), \quad \Omega \leqslant \omega_* < 1; \quad (12)$$

ω_* — предельно допустимая суммарная плотность армирования; μ — коэффициент конвективного теплообмена между связующим и окружающей средой на лицевых плоскостях пластины; Q — приведенная плотность мощности внутренних источников тепла в композиции (см. (1.6) в [4]); λ_0, λ_k — коэффициенты теплопроводности связующего и арматуры k-того семейства; p_n, p_τ — нормальные и касательные контурные напряжения соответственно; v_{i0} — заданные на Γ_v компоненты скорости ползучести точек пластины; q_0 — тепловой поток через торцевую поверхность конструкции; χ_0, χ_1 — функции переключения, позволяющие задавать на Γ тепловые граничные условия разного рода; β — угол, задающий направление внешней нормали к Γ; ω_{0k} — заданные на контуре $\Gamma_{\omega k}$ значения функций ω_k; суммирование производится по указанному индексу от 1 до N; нижний индекс после запятой означает частное дифференцирование по соответствующей переменной x_i; в качестве неизвестных выступают функции v_i, θ, ω_k, ψ_k ($i = 1{,}2$, $1 \leqslant k \leqslant N$).

В работе [4] показано, что система (1)–(4) является системой квазилинейных уравнений смешанно-составного типа [15], причем траектории армирования совпадают с ее действительными характеристиками. Кроме того, если обезразмерить краевую задачу (1)–(11), то в уравнениях (1) и равенствах (7) при дифференциальных операторах B_i, D_n, D_τ (см. (5), (10)) можно выделить малый параметр [6]. При этом оказывается, что рассматриваемая краевая задача является задачей с сингулярным возмущением [6, 16, 17].

В настоящее время теория систем квазилинейных уравнений смешанно-составного типа развита недостаточно полно, что не позволяет надеяться на построение широкого круга аналитических решений рассматриваемой задачи РА, интересных с практической точки зрения, поэтому необходимо разрабатывать обоснованные методы ее интегрирования. Эти методы должны учитывать следующие особенности задачи РА:

1) в силу наличия сингулярного возмущения в системе разрешающих уравнений (1)–(4) и граничных условий (7) в окрестности кромки Γ градиенты напряжений в связующем могут достигать по модулю больших значений — краевой эффект;
2) аналитические решения, полученные для кольцевых и прямоугольных удлиненных пластин, а также асимптотический анализ, проведенный в [6], показывают, что задача РА в силу существенной нелинейности статических граничных условий (7) относительно углов армирования ψ_k может иметь несколько альтернативных решений (свойство, присущее многим обратным задачам механики композитных конструкций [1]).

Эти особенности, с одной стороны, предъявляют высокие требования к устойчивости численных методов решения таких задач [9], а с другой стороны, порождают необходимость разработки алгоритмов, надежно выделяющих конкретные решения из их многообразия (иначе в процессе численного счета узловые значения неизвестных функций могут несанкционированно «перескакивать» с одного решения на другое, что, естественно, приводит к неустойчивости численной процедуры).

Если вопрос о надежном отделении альтернативных решений друг от друга решен, например, в [6, 9] при помощи методов теории возмущений, то вопрос о корректности краевой задачи РА до настоящего времени остается открытым. И хотя теорему существования решения задачи РА металлокомпозитных пластин, работающих в условиях установившейся ползучести всех фаз композиции, в общем случае пока доказать не удалось, на то, что решения этой задачи при определенных условиях все же могут существовать, указывают полученные аналитические решения [4] и решения, найденные методами теории возмущений [6, 9].

Однако помимо вопроса существования решения для определения корректности задачи необходимо выяснить и вопрос о единственности ее решения. Изучению этой проблемы и посвящено дальнейшее исследование.

2. Доказательство единственности решения задачи РА в малом. Предположим, что каким-то образом получено некоторое решение

$$v_i', \ \theta', \ \omega_k', \ \psi_k' \tag{13}$$

краевой задачи (1)–(11). Покажем, что не существует другого решения

$$v_i'', \ \theta'', \ \omega_k'', \ \psi_k'' \quad (i = 1{,}2), \tag{14}$$

удовлетворяющего тем же уравнениям (1)–(4), граничным и краевым условиям (7)–(9), (11) (с учетом (5), (6), (10)) и дополнительному условию

$$\psi_k'(\Gamma_{\omega k}) = \psi_k''(\Gamma_{\omega k}) \equiv \psi_{0k}, \quad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{15}$$

Краевое условие (15) введено потому, что в общем случае задача РА может иметь несколько альтернативных решений, причем эта неединственность порождается тем, что на контуре пластины статические граничные условия могут быть тождественно удовлетворены при разных наборах углов армирования ψ_k, различающихся в этих решениях на конечные величины [6, 9]. (Эта неединственность в большом вытекает из того, что в (7) функции ψ_k являются аргументами периодических тригонометрических функций [6, 9].) Условие (15) как бы фиксирует один из таких наборов ψ_k, а именно ψ_{0k}.

Разность решений (13), (14) обозначим как

$$V_i = v_i' - v_i'', \quad \Theta = \theta' - \theta'', \quad \Omega_k = \omega_k' - \omega_k'', \quad \Psi_k = \psi_k' - \psi_k'', \tag{16}$$

тогда для функций V_i, Ω_k, Ψ_k справедливы следующие граничные и краевые условия:

$$V_i(\Gamma_u) = 0, \quad \Omega_k(\Gamma_{\omega k}) = 0, \quad \Psi_k(\Gamma_{\omega k}) = 0, \quad i = 1, 2, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{17}$$

получающиеся из (8), (11), (15).

Доказательство проведем от противного. Будем считать, что решение (14), отличное от (13), при выполнении (15) все-таки существует, тогда функции ω_k', ψ_k' и ω_k'', ψ_k'' удовлетворяют одному и тому же условию постоянства поперечных сечений волокон (2) (см. (5)):

$$(\omega_k' \cos\psi_k')_{,1} + (\omega_k' \sin\psi_k')_{,2} = 0; \tag{18}$$

$$(\omega_k'' \cos\psi_k'')_{,1} + (\omega_k'' \sin\psi_k'')_{,2} = 0 \tag{19}$$

и одним и тем же краевым условиям (11), (15):

$$\omega_k'(\Gamma_{\omega k}) = \omega_{0k}, \quad \psi_k'(\Gamma_{\omega k}) = \psi_{0k};$$

$$\omega''_k(\Gamma_{\omega k}) = \omega_{0k}, \quad \psi''_k(\Gamma_{\omega k}) = \psi_{0k}, \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

Вычтем из (18) уравнение (19) и используем преобразования вида (см. (5))

$$l'_{ki}\omega'_{k,i} - l''_{ki}\omega''_{k,i} = l'_{ki}\omega'_{k,i} - l'_{ki}\omega''_{k,i} + l'_{ki}\omega''_{k,i} - l''_{ki}\omega''_{k,i} = l'_{ki}\Omega_{k,i} + \omega''_{k,i}J_{ki}\Psi_k; \quad (20)$$

$$\begin{aligned}\omega'_k l'_{ki,i} - \omega''_k l''_{ki,i} &= \omega'_k l'_{ki,i} - \omega''_k l'_{ki,i} + \omega''_k l'_{ki,i} - \omega''_k l''_{ki,i} = \\ &= \Omega_k l'_{ki,i} + \omega''_k (l'_{ki} - l''_{ki})_{,i} = \Omega_k l'_{ki,i} + \omega''_k (J_{ki}\Psi_k)_{,i} = \\ &= \Omega_k l'_{ki,i} + \omega''_k (J_{ki}\Psi_{k,i} + \Psi_k J_{ki,i}), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} J_{k1}\Psi_k &= -\int_0^1 \sin(\psi''_k + \xi(\psi'_k - \psi''_k))d\xi\Psi_k = \cos\psi'_k - \cos\psi''_k = l'_{k1} - l''_{k1}, \\ J_{k2}\Psi_k &= \int_0^1 \cos(\psi''_k + \xi(\psi'_k - \psi''_k))d\xi\Psi_k = \sin\psi'_k - \sin\psi''_k = l'_{k2} - l''_{k2}, \end{aligned} \quad (22)$$

после чего получим уравнение

$$\begin{aligned} l'_{k1}\Omega_{k,1} + l'_{k2}\Omega_{k,2} + \omega''_k(J_{k1}\Psi_{k,1} + J_{k2}\Psi_{k,2}) + \Omega_k(l'_{k1,1} + l'_{k2,2}) + \\ + \Psi_k[\omega''_{k,1}J_{k1} + \omega''_{k,2}J_{k2} + \omega''_k(J_{k1,1} + J_{k2,2})] = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Вновь вычтем из (18) уравнение (19), но вместо (20), (21) применим другие преобразования:

$$\begin{aligned} &l'_{ki}\omega'_{k,i} - l''_{ki}\omega''_{k,i} = l'_{ki}\omega'_{k,i} - l''_{ki}\omega'_{k,i} + l''_{ki}\omega'_{k,i} - l''_{ki}\omega''_{k,i} = l''_{ki}\Omega_{k,i} + \omega'_{k,i}J_{ki}\Psi_k, \\ &\omega'_k l'_{ki,i} - \omega''_k l''_{ki,i} = \omega'_k l'_{ki,i} - \omega'_k l''_{ki,i} + \omega'_k l''_{ki,i} - \omega''_k l''_{ki,i} = \\ &\quad = \Omega_k l''_{ki,i} + \omega'_k(l'_{ki} - l''_{ki})_{,i} = \Omega_k l''_{ki,i} + \omega'_k(J_{ki}\Psi_{k,i} + \Psi_k J_{ki,i}), \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

тогда с учетом (22) вместо (23) получим уравнение

$$\begin{aligned} l''_{k1}\Omega_{k,1} + l''_{k2}\Omega_{k,2} + \omega'_k(J_{k1}\Psi_{k,1} + J_{k2}\Psi_{k,2}) + \Omega_k(l''_{k1,1} + l''_{k2,2}) + \\ + \Psi_k[\omega'_{k,1}J_{k1} + \omega'_{k,2}J_{k2} + \omega'_k(J_{k1,,1} + J_{k2,2})] = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Следовательно, для определения двух функций Ω_k, Ψ_k (см. (16)) при каждом k имеем два линейных однородных уравнения (23), (24) с нулевыми краевыми условиями (17).

Характеристическое уравнение системы (23), (24) имеет вид

$$(J_{k1}\varphi_1 + J_{k2}\varphi_2)[(\omega'_k l'_{k1} - \omega''_k l''_{k1})\varphi_1 + (\omega'_k l'_{k2} - \omega''_k l''_{k2})\varphi_2] = 0, \quad (25)$$

где φ_1, φ_2 — параметры, задающие характеристическое направление ($\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = 1$).

Уравнение (25) указывает на то, что система (23), (24) относительно функций Ω_k, Ψ_k является линейной системой гиперболического типа. Задачи Коши, Гурса и Римана для таких систем уравнений имеют единственное решение [18], поэтому решением однородной системы (23), (24) при нулевых краевых условиях (17) являются функции

$$\Omega_k = 0, \quad \Psi_k = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant N. \quad (26)$$

Таким образом, пришли к противоречию: уравнения (23), (24) получены в предположении, что функции ω''_k, ψ''_k отличны от ω'_k, ψ'_k, однако из этих уравнений вытекают равенства (26), т. е. разности $\omega'_k - \omega''_k$, $\psi'_k - \psi''_k$ равны нулю. Следовательно, исходное допущение о том, что $\omega'_k \neq \omega''_k$, $\psi'_k \neq \psi''_k$ является неверным, значит

$$\omega'_k = \omega''_k, \quad \psi'_k = \psi''_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{27}$$

Подставим в уравнение теплопроводности (4) и тепловые граничные условия (9) функции θ', ω'_k, ψ'_k и θ'', ω''_k, ψ''_k, а затем вычтем из уравнения (4) и условия (9), содержащие функции (13), уравнение (4) и условие (9), содержащие функции (14), тогда с учетом (5), (6), (27) получим

$$(\Lambda'_{11}\Theta_{,1} + \Lambda'_{12}\Theta_{,2})_{,1} + (\Lambda'_{21}\Theta_{,1} + \Lambda'_{22}\Theta_{,2})_{,2} = 0; \tag{28}$$

$$\chi_0[(\Lambda'_{11}\Theta_{,1} + \Lambda'_{12}\Theta_{,2})n_1 + (\Lambda'_{21}\Theta_{,1} + \Lambda'_{22}\Theta_{,2})n_2] + \chi_1\Theta = 0. \tag{29}$$

В работе [4] показано, что при выполнении физических ограничений (12) уравнение (28) является эллиптическим уравнением второго порядка относительно Θ. Решение граничной задачи для такого уравнение единственно [19], поэтому решением однородного уравнения (28) при нулевых граничных условиях (29) является функция $\Theta \equiv 0$, а значит

$$\theta' = \theta'' \tag{30}$$

во всей пластине.

Подставим в уравнения равновесия (1) и граничные условия (7), (8) функции (13), (14) и учтем равенства (27), (30), тогда получим

$$B_i(\boldsymbol{v}', \theta', \boldsymbol{\omega}') = -\bar{X}_i(x_1, x_2, \boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\psi}'), \quad i = 1, 2; \tag{31}$$

$$\begin{aligned} &D_n(\boldsymbol{v}', \theta', \boldsymbol{\omega}') = \bar{p}_n(x_1, x_2, \boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\psi}'),\\ &D_\tau(\boldsymbol{v}', \theta', \boldsymbol{\omega}') = 2\bar{p}_\tau(x_1, x_2, \boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\psi}'), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_p,\\ &v'_i(\Gamma_v) = v_{i0}, \quad i = 1, 2, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_v; \end{aligned} \tag{32}$$

$$B_i(\boldsymbol{v}'', \theta', \boldsymbol{\omega}') = -\bar{X}_i(x_1, x_2, \boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\psi}'), \quad i = 1, 2; \tag{33}$$

$$\begin{aligned} &D_n(\boldsymbol{v}'', \theta', \boldsymbol{\omega}') = \bar{p}_n(x_1, x_2, \boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\psi}'),\\ &D_\tau(\boldsymbol{v}'', \theta', \boldsymbol{\omega}') = 2\bar{p}_\tau(x_1, x_2, \boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\psi}'), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_p,\\ &v''_i(\Gamma_v) = v_{i0}, \quad i = 1, 2, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_v; \end{aligned} \tag{34}$$

где

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\psi}' = \{\psi'_1, \psi'_2, \ldots, \psi'_N\}, \quad \bar{X}_i(x_1, x_2, \boldsymbol{\omega}', \psi') = X_i(x_1, x_2, \boldsymbol{\omega}') + \\ + \sum_k (-1)^i \sigma_k \omega'_k l'_{kj} \partial_k(\psi'_k) \quad (j = 3 - i,\ i = 1{,}2), \\ \bar{p}_n(x_1, x_2, \boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\psi}') = p_n(x_1, x_2) - \sum_k \sigma_k \omega'_k \cos^2(\psi'_k - \beta), \\ \bar{p}_\tau(x_1, x_2, \boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\psi}') = p_\tau(x_1, x_2) - \frac{1}{2}\sum_k \sigma_k \omega'_k \sin 2(\psi'_k - \beta). \end{gathered} \tag{35}$$

Функции $\bar{X}_i$ в (31), (33) формально можно рассматривать как фиктивные массовые нагрузки, а $\bar{p}_n$, $\bar{p}_\tau$ в (32), (34) — как фиктивные контурные нагрузки, определяемые формулами (35).

Правые части в равенствах (31), (32) полностью совпадают с правыми частями в (33), (34) соответственно, а левые части с учетом (5), (10) представляют собой операторы, описывающие механическое поведение неоднородной изотропной пластины, нагруженной в своей плоскости и работающей в условиях установившейся ползучести. Неоднородность такой пластины формально определяется множителем $a = 1 - \Omega$, входящим в операторы B_i, D_n, D_τ (см. (5), (10)). Известно, что решение такой задачи является единственным в рамках используемой здесь теории течения установившейся ползучести [20], поэтому и граничные задачи (31), (32) и (33), (34) имеют одно и то же решение, т. е.

$$v_i' = v_i'', \quad i = 1, 2. \tag{36}$$

Если теперь подставить в условия равнонапряженности арматуры (3) функции (13), (14), а затем вычесть из уравнений (3), содержащих функции (13), уравнения (3), содержащие функции (14), то получающиеся в итоге уравнения с учетом равенств (27), (30), (36) будут тождественно удовлетворены (в смысле $0 \equiv 0$.)

Таким образом, доказано, что краевая задача (1)–(11) при дополнительном краевом условии (15) имеет единственное решение.

Замечание. Аналогично доказывается единственность решения и задачи РА изгибаемых металлокомпозитных пластин, работающих в условиях установившейся ползучести [5, 7, 8], при наличии дополнительного краевого условия (15). Действительно, если такие пластины армированы проволоками постоянного поперечного сечения, то по-прежнему имеют место равенства (2), (11) и при дополнительном условии (15) справедливыми остаются соотношения (18)–(27). Далее вместо краевых задач (31)–(34) получаются аналогичные краевые задачи для скоростей прогиба $\dot{w}'$, $\dot{w}''$, правые части в которых полностью совпадают. Эти краевые задачи формально описывают изгиб неоднородных изотропных пластин в условиях установившейся ползучести и имеют единственное решение [20], поэтому во всей пластине выполняется равенство $\dot{w}' = \dot{w}''$.

Рассмотрим вместо равенства (15) следующие два условия:

$$\psi_k'(\Gamma_{\omega k}) = \psi_{0k}, \quad \psi_k''(\Gamma_{\omega k}) = \psi_{0k} + \varepsilon\bar{\psi}_{0k}, \quad k = 1,2,\ldots,N, \tag{37}$$

где $\bar{\psi}_{0k}$ — некоторая функция, заданная на контуре $\Gamma_{\omega k}$; ε — малый параметр.

В случае $\varepsilon \to 0$ равенства (37) вырождаются в одно условие (15), при наличии которого единственность решения задачи РА уже доказана. А значит, из (15), (37) следует, что не существует решения, отличного от v_i', θ', ω_k', ψ_k', но бесконечно близкого к нему на контуре $\Gamma_{\omega k}$ по углам армирования ψ_k' (или при достаточно малых ε).

Заключение. Таким образом, доказана единственность решения в малом (в смысле малости параметра ε в (37)) краевой задачи РА пластин, работающих в условиях установившейся ползучести. В большом же (в смысле немалых значений ε в (37)) эта задача может иметь несколько отличных друг от друга альтернативных решений, что подтверждают аналитические решения и решения, полученные методами теории возмущений [4–9].

В работах [6, 8, 9] было показано, что предложенные там для решения соответствующих задач РА итерационные процессы, относящиеся к разряду методов теории возмущений, позволяют надежно разделять альтернативные решения задач РА, причем на контуре Γ_p эти итерационные методы как бы последовательно разрешают статические граничные условия относительно краевых значений углов РА $\psi_k(\Gamma_p) = \psi_{0k}$ (при этом предполагается $\Gamma_{\omega k} = \Gamma_p$), уточняя их. Поэтому проведенное выше доказательство позволяет утверждать, что не существует другого решения задачи РА, отвечающего системе разрешающих уравнений, соответствующим ей граничным и краевым условиям, а также дополнительным краевым значениям $\psi_k(\Gamma_p) = \psi_{0k}$ (полученным за счет последовательного обращения статических граничных условий), отличающегося от решения, построенного с помощью соответствующего итерационного процесса (см. [6, 8, 9]).

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 14-01-00102-а).

ORCID
Андрей Петрович Янковский: http://orcid.org/0000-0002-2602-8357

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Баничук Н. В., Кобелев В. В., Рикардс Р. Б. *Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов.* М.: Машиностроение, 1988. 224 с.
2. Немировский Ю. В., Янковский А. П. *Рациональное проектирование армированных конструкций.* Новосибирск: Наука, 2002. 488 с.
3. Хажинский Г. М. *Модели деформирования и разрушения металлов.* М.: Научный мир, 2011. 231 с.
4. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Равнонапряженное армирование металлокомпозитных пластин волокнами постоянного поперечного сечения в условиях установившейся ползучести // *Механика композитных материалов*, 2008. Т. 44, № 1. С. 11–34.
5. Янковский А. П. О некоторых свойствах решения задачи равнонапряженного армирования изгибаемых металлокомпозитных пластин, работающих в условиях установившейся ползучести // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 2(23). С. 62–73. doi: 10.14498/vsgtu922.
6. Янковский А. П. Применение методов теории возмущений в плоской задаче равнонапряженного армирования металлокомпозитных пластин при установившейся ползучести // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009. № 2(19). С. 53–71. doi: 10.14498/vsgtu680.
7. Янковский А. П. Равнонапряженное армирование кольцевых изгибаемых металлокомпозитных пластин, работающих в условиях установившейся ползучести // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010. № 5(21). С. 42–54. doi: 10.14498/vsgtu822.
8. Янковский А. П. Применение методов теории возмущений в задачах равнонапряженного армирования изгибаемых металлокомпозитных пластин, работающих в условиях установившейся ползучести // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. № 2(31). С. 17–35. doi: 10.14498/vsgtu1225.
9. Янковский А. П. Численно-аналитический метод решения плоской задачи равнонапряженного армирования металлокомпозитных пластин при установившейся ползучести // *Вычислительная механика сплошных сред*, 2009. Т. 2, № 2. С. 108–120. doi: 10.7242/1999-6691/2009.2.2.17.
10. Новацкий В. *Теория упругости.* М.: Мир, 1975. 872 с.
11. Горин В. В. Существование и единственность решения нелокального уравнения источника ионизации в тлеющем разряде и полом катоде // *Труды МФТИ*, 2010. Т. 2, № 3. С. 71–80.
12. Голичев И. И. О единственности и итерационном методе решения одной нелинейной нестационарной задачи с нелокальными краевыми условиями типа теплообмена излучением // *Уфимск. матем. журн.*, 2010. Т. 2, № 4. С. 27–38.

13. Волынская М. Г. Единственность решения одной нелокальной задачи для вырождающегося гиперболического уравнения // *Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия*, 2008. №2(61). С. 43–51.
14. Жерновый Ю. В. Единственность решения некоторых краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейным вхождением старшей производной // *Диффер. уравн.*, 2000. Т. 36, №4. С. 446–451.
15. Джураев Т. Д. *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов*. Ташкент: Фан, 1979. 238 с.
16. Nayfeh A. H. *Introduction to perturbation techniques*. New York: John Wiley & Sons, 1981. xiv+519 pp.
17. Андрианов И., Аврейцевич Я. *Методы асимптотического анализа и синтеза в нелинейной динамике и механике деформируемого твердого тела*. М., Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 276 с.
18. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. *Системы квазилинейных уравнений*. М.: Наука, 1969. 592 с.
19. Бицадзе А. В. *Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка*. М.: Наука, 1966. 204 с.
20. Качанов Л. М. *Теория ползучести*. М.: Физматгиз, 1960. 456 с.

Поступила в редакцию 17/X/2014;
в окончательном варианте — 27/XI/2014;
принята в печать — 05/XII/2014.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.] 2014. Issue 4 (37). Pp. 121–132

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1346

MSC: 74K20, 74R20

THE UNIQUENESS OF SOLUTION IN THE SMALL SENSE OF TASKS OF EQUALLY-STRESSED REINFORCEMENT OF COMPOSITE METAL PLATES IN CONDITIONS OF STEADY-STATE CREEP

A. P. Yankovskii

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics,
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
4/1, Institutskaya st., Novosibirsk, 630090, Russian Federation.

Abstract

The uniqueness of a solution in the small sense (in the sense of lack of infinitely close solution) is proved for the boundary-value problem of equally-stressed reinforcing metal composite plates in conditions of steady creep of

How to cite Reference
Y a n k o v s k i i A. P. The uniqueness of solution in the small sense of tasks of equally-stressed reinforcement of composite metal plates in conditions of steady-state creep, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 4 (37), pp. 121–132. doi: 10.14498/vsgtu1346. (In Russian)

Author Details
Andrey P. Yankovskii (Dr. Phys. & Math. Sci.; lab4nemir@rambler.ru), Leading Research Scientist, Lab. of Fast Processes Physic.

materials of all phases of the composition, when in addition to static and kinematic boundary conditions and boundary conditions for the densities of the reinforcement, which is natural in such problems, on the contour of the plates an additional boundary conditions are specified for angles of reinforcement. In a large sense (in the sense of significant differences solution) this problem can have multiple, but not infinitely close, alternative solutions because of the nonlinearity of the static boundary conditions and equally-stressed of reinforcement. The study of the problem of uniqueness of the solution of this problem is necessary when examining the issue of correctness setting of problems of equally-stressed of reinforcement.

Keywords: equal-stressed reinforcement, metal-composite plate, steady-state creep, uniqueness of solution, correctness of boundary value problem.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1346

Acknowledgments. This work was supported by Russian Foundation for Basic Research (Project No. 14-01-00102-a).

ORCID
Andrey P. Yankovskii: http://orcid.org/0000-0002-2602-8357

REFERENCES

1. Banichuk N. V., Kobelev V. V., Rikards R. B. *Optimizatsiia elementov konstruktsii iz kompozitsionnykh materialov* [Optimization of Structural Elements Made of Composite Materials]. Moscow, Mashinostroenie, 1988, 224 pp. (In Russian)
2. Nemirovskii Yu. V., Yankovskii A. P. *Ratsional'noe proektirovanie armirovannykh konstruktsii* [Rational Design of Reinforced Structures]. Novosibirsk, Nauka, 2002, 488 pp. (In Russian)
3. Khazhinskii G. M. *Modeli deformirovaniia i razrusheniia metallov* [The Models of Metal Deformation and Destruction]. Moscow, Nauchnyi mir, 2011, 231 pp. (In Russian)
4. Nemirovskii Yu. V., Yankovskii A. P. Equal-stressed reinforcement of metal-composite plates with fibers of constant cross section in steady-state creep, *Mechanics of Composite Materials*, 2008, vol. 44, no. 1, pp. 9–24. doi: 10.1007/s11029-008-0003-0.
5. Yankovskii A. P. On some properties of equal-stress problem solution reinforcement bending the metal-composite plates working in steady creep conditions, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2011, no. 2(23), pp. 62–73 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu922.
6. Yankovskii A. P. Application of methods of the theory of perturbations in flat problem of equally-stressed reinforcing of metal-composite plates at steady creep, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2009, no. 2(19), pp. 53–71 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu680.
7. Yankovskii A. P. Equal-Stress Reinforcement the Ring Bending Metal-Composites Plates Working in Conditions of Steady Creep, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2010, no. 5(21), pp. 42–54 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu822.
8. Yankovskii A. P. Application of methods of the perturbation theory to problem of equally-stressed reinfocing of bending metal-composite plates in conditions of steady-state creep, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2013, no. 2(31), pp. 17–35 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1225.
9. Yankovskii A. P. Numerical-analytical method of solving the plane problem of equal-stressed reinforcement of metal-composite plates under steady creep conditions, *Computational Continuum Mechanics*, 2009, vol. 2, no. 2, pp. 108–120 (In Russian). doi: 10.7242/1999-6691/2009.2.2.17.
10. Novatskii V. *Teoriia uprugosti* [Elasticity Theory]. Moscow, Mir, 1975, 872 pp. (In Russian)

11. Gorin V. V. Existence and uniqueness of solutions of the nonlocal equation for the ionization source in a glow discharge and a hollow cathode, *Trudy MFTI*, 2010, vol. 2, no. 3, pp. 71–80 (In Russian).
12. Golichev I. I. On uniqueness and iteration method of solving a non-linear non-stationary problem with non-local boundary conditions of “radiation heat transfer” type, *Ufimsk. Mat. Zh.*, 2010, vol. 2, no. 4, pp. 27–38 (In Russian).
13. Volynskaya M. G. Uniqueness of the solution of a nonlocal problem for a degenerate hyperbolic equation, *Vestn. Samar. Gos. Univ., Estestvennonauchn. Ser.*, 2008, no. 2(61), pp. 43–51 (In Russian).
14. Zhernovyi Yu. V. Uniqueness of the solution of some boundary value problems for ordinary differential equations with a nonlinear occurrence of the higher derivative, *Differ. Equ.*, 2000, vol. 36, no. 4, pp. 497–503. doi: 10.1007/BF02754243.
15. Dzhuraev T. D. *Kraevye zadachi dlya uravnenii smeshannogo i smeshanno-sostavnogo tipov* [Boundary value problems for equations of mixed and mixed-composite types]. Tashkent, Fan, 1979, 238 pp. (In Russian)
16. Nayfeh A. H. *Introduction to perturbation techniques.* New York, John Wiley & Sons, 1981, xiv+519 pp.
17. Andrianov I., Awrejcewicz J. *Metody asimptoticheskogo analiza i sinteza v nelineinoi dinamike i mekhanike deformiruemogo tverdogo tela* [Asymptotic Analysis and Synthesis in Nonlinear Dynamics and Mechanics of Deformable Bodies]. Moscow, Izhevsk, Institut komp’iuternykh issledovanii, 2013, 276 pp. (In Russian)
18. Rozhdestvenskii B. L., Yanenko N. N. *Sistemy kvazilineinykh uravnenii* [Systems of quasi-linear equations]. Moscow, Nauka, 1969, 592 pp. (In Russian)
19. Bitsadze A. V. *Boundary value problems for second order elliptic equations*, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, vol. 5. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1968, 211 pp.
20. Kachanov L. M. *Teoriia polzuchesti* [Creep Theory]. Moscow, Fizmatgiz, 1960, 456 pp. (In Russian)

Received 17/X/2014;
received in revised form 27/XI/2014;
accepted 05/XII/2014.