Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2014. № 3 (36). С. 161–168
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1333

Дискретная математика

УДК 512.14

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ СВОБОДНЫХ КОМПОНЕНТОВ, ОТНОСЯЩИХСЯ К СУММАМ ОДИНАКОВЫХ СТЕПЕНЕЙ

А. И. Никонов

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Статья содержит доказательство того, что число комбинаторных размещений совпадает со свободными компонентами сумм взвешенных одинаковых степеней с натуральными основаниями и показателями при наличии простого равенства, связывающего элементы этих размещений. В доказательстве используется модифицированное описание компонентов, участвующих в образовании суммы взвешенных одинаковых степеней. Это описание упрощается и приводится к виду произведения биномиальных коэффициентов. Других вариантов построения соответствующего произведения биномиальных коэффициентов здесь не существует. Полученное доказательство позволяет как представлять число размещений в виде произведения, так и применять при этом представлении элементы суммирования. Таким образом, число размещений допускает собственное выражение не только в виде произведения его элементов.

Ключевые слова: сумма одинаковых степеней, свободные компоненты, число размещений, биномиальные коэффициенты.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1333

Существует известный алгебраический подход к исследованию способов определения суммы одинаковых натуральных степеней. Обзор исторического развития этой научной области можно найти в отчётах [1, 2], а современное развитие — в работах [3–9]. В рамках данного подхода сформировалось авторское направление, характеризующееся исследованием свободных и весовых компонентов сумм указанного вида [10–12]. Именно свободные компоненты и являются предметом нашего настоящего рассмотрения.

Образец для цитирования: Никонов А. И. Об одном свойстве свободных компонентов, относящихся к суммам одинаковых степеней // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 3 (36). С. 161–168. doi: 10.14498/vsgtu1333.

Сведения об авторе: *Александр Иванович Никонов* (д.т.н., проф.; nikonovai@mail.ru), профессор, каф. электронных систем и информационной безопасности.

Известно следующее комбинаторное представление суммы одинаковых степеней с натуральными основаниями и показателями [10, 11]:

$$\Phi(p,\nu) = \sum_{\iota=1}^{\max\iota} \alpha_0^{\iota} \Phi_{p(\iota)0}; \qquad (1)$$
$$p \in \mathbb{N}\backslash\{1\}, \quad \nu \in \mathbb{N}, \quad \max\iota = \min(p,\nu), \quad p(\iota) = p - \iota.$$

Здесь α_0^{ι} — величина, называемая свободным компонентом суммы (1) и определяемая из рекуррентной формулы

$$\alpha_{j(\iota)}^{\iota} = \alpha_{j(\iota)}^{\iota(\nu)} = \sum_{j(i)=j(\iota)+1}^{\max j(i)} C_{j(i)}^{j(\iota)} \alpha_{j(i)}^{i(\nu)}; \qquad (2)$$
$$i = \iota - 1 \in \{0,\ldots,\max i\}, \quad \max i = \max\iota - 1 = \min(p-1,\nu-1);$$
$$j(\iota) \in J_0 = \{0,\ldots,\max j(\iota)\}, \quad \max j(\iota) = \nu - \iota;$$
$$j(i) \in \{1,\ldots,\max j(\iota)\}, \quad \max j(i) = \nu - i = \nu - \iota + 1;$$
$$\alpha_{j(0)}^{0} = \alpha_{j(0)}^{0(\nu)} = \begin{cases} 0: & 1 \leqslant j(0) < \nu, \\ 1: & j(0) = \nu. \end{cases}$$

Величина $\Phi_{p(\iota)0}$ называется весовым компонентом суммы (1). Как видим, название свободного компонента объясняется его независимостью от весовой части (1).

В настоящей работе приводится доказательство свойства свободного компонента (2) суммы (1), которое соблюдается при выполнении равенства

$$\iota + j(\iota) = \nu, \qquad (3)$$

указанного в нашей прежней работе [12]:

$$\alpha_{j(\iota)}^{\iota(\nu)} = A_{\nu}^{\iota} = \nu(\nu-1)\ldots(\nu-\iota+1) = \nu!/(\nu-\iota)!.$$

Величина A_{ν}^{ι} представляет собой число комбинаторных размещений из ν по ι элементов [13].

Сначала приведём тот вид, который приобретает сумма (1) в модификации её выражения, выявленной в известной статье [11] (теорема 1):

$$\forall j(\iota) \in J_0, \quad \max j(\iota) = \nu - \iota:$$
$$\alpha_{j(\iota)}^{\iota(\nu)} = \sum_{t(j(\iota))=1}^{\max t(j(\iota))} \prod_{s(\iota)=1}^{s(\iota)=\iota} C\left(q_{s(\iota)}^{t(j(\iota))}, q_{s(\iota)-1}^{t(j(\iota))}\right); \qquad (4)$$
$$q_{s(\iota)-1=0}^{t(j(\iota))} = j(\iota), \quad q_{s(\iota)=\iota}^{t(j(\iota))} = \nu; \qquad (5)$$
$$\max t(j(\iota)) = C_{\nu-1-j(\iota)}^{i}. \qquad (6)$$

Здесь запись биномиальных коэффициентов в выражении (4) выполнена в одной из её употребительных форм [11], где больше места отводится под размещение индексов.

Далее укажем, что

$$\forall q_{s(\iota)}^{t(j(\iota))} \in Q(s(\iota)), \quad q_{s(\iota)-1}^{t(j(\iota))} \in Q(s(\iota)-1),$$
$$s(\iota) \in S_1(\iota), \quad s(\iota)-1 \in S_0(i): \quad q_{s(\iota)}^{t(j(\iota))} > q_{s(\iota)-1}^{t(j(\iota))};$$
$$S_1(\iota) = \{1, \ldots, \iota\}, \quad S_0 = \{0, \ldots, i\};$$
$$Q(s(\iota)) = \{j(\iota)+s(\iota), \ldots, \nu-\iota+s(\iota)\},$$
$$Q(s(\iota)-1) = \{j(\iota)+s(\iota)-1, \ldots, \nu-\iota+s(\iota)-1\}.$$

При наличии равенства (3) соотношение (6) может быть представлено как

$$\max t(j(\iota)) = C_{\nu-1-j(\iota)}^{i} = C_i^i = 1.$$

Тогда выражение (4) приобретает вид

$$\alpha_{j(\iota)}^{\iota(\nu)} = \prod_{s(\iota)=1}^{s(\iota)=\iota} C_{q_{s(\iota)}}^{q_{s(\iota)-1}} = C_{q_1}^{q_0} \ldots C_{q_\iota}^{q_{\iota-1}}. \tag{7}$$

В этом выражении нам уже нет нужды специально использовать верхние индексы вида $t(j(\iota))$ для чисел $q_{s(\iota)}$, $q_{s(\iota)-1}$.

Заметим далее, что при действии равенства (3) будем иметь

$$j(\iota) = \nu - \iota = \max j(\iota), \tag{8}$$

и поэтому число $q_{s(\iota)-1=0}$ из формул (5) может быть записано как

$$q_{s(\iota)-1=0} = \max j(\iota).$$

Следовательно, исходя из приведённого упрощения (7) формулы (4), свободные компоненты суммы одинаковых степеней соответственно могут быть представлены таким образом:

$$\alpha_{j(\iota)}^{\iota(\nu)} = \alpha_{\max j(\iota)}^{\iota(\nu)} = C_{\max j(\iota)+1}^{\max j(\iota)} \ldots C_{\nu}^{\nu-1} = \prod_{s(\iota)=1}^{s(\iota)=\iota} C_{\max j(\iota)+s(\iota)}^{\max j(\iota)+s(\iota)-1}. \tag{9}$$

Поскольку используемое число биномиальных коэффициентов $\max s(\iota) = \iota$ соответствует — согласно формуле (8) — числу $\nu - \max j(\iota)$, опять-таки равному ι, и имеет место условие $q_{s(\iota)} > q_{s(\iota)-1}$, то существует следующая используемая для построения (9) конечная последовательность биномиальных коэффициентов

$$\left(C_{\max j(\iota)+s(\iota)}^{\max j(\iota)+s(\iota)-1}, \quad s(\iota) = 1, \ldots, \iota\right);$$

перестановочно-инверсный вариант её записи с сохранением тех же членов имеет вид

$$\left(C_{\nu-s(\iota)+1}^{\nu-s(\iota)}, \quad s(\iota) = 1, \ldots, \iota\right).$$

То есть с принятием последовательных значений от $s(\iota) = 1$ до $s(\iota) = \iota$ мы получаем именно произведения вида (9).

Это утверждение подтверждается также, если исходить из самой структуры матрицы [10], используемой для подсчёта значений свободных компонентов. Действия, производимые с помощью данной матрицы и аппарата матричной алгебры [14], отражаются формулой (2), а равенство (3) позволяет упростить выражение (2) следующим образом:

$$\alpha_{j(\iota)}^{\iota(\nu)} = \alpha_{\max j(\iota)}^{\iota(\nu)} = C_{\nu-\iota+1}^{\nu-\iota} \alpha_{\max j(i)}^{i(\nu)}.$$

Указанное утверждение о единственности произведения членов рассматриваемых последовательностей биномиальных коэффициентов иллюстрирует приводимый на следующей странице рисунок, где для определённости принято: $\nu = 5$; $\iota = 1, \ldots, 5$.

На рисунке показан порядок последовательного построения свободных компонентов вида $\alpha_{\max j(\iota)}^{\iota(\nu)}$ для значений $\nu = 5$, $\alpha_{\max j(0)}^{0(5)} = 1$ (см. начальное значение $\alpha_{j(0)}^{0(\nu)} = 1$ для $j(0) = \nu$, прилагаемое к формуле (2)):

a) $\iota = 1$, $i = 0$, $\max j(1) = 5 - 1 = 4$, $\max j(0) = 5 - 0 = 5$, $C_{\max j(0)}^{\max j(1)} = C_5^4$, $\alpha_{\max j(1)}^{1(5)} = C_5^4 \alpha_{\max j(0)}^{0(5)} = C_5^4$;

b) $\iota = 2$, $i = 1$, $\max j(2) = 5 - 2 = 3$, $\max j(1) = 5 - 1 = 4$, $C_{\max j(1)}^{\max j(2)} = C_4^3$, $\alpha_{\max j(2)}^{2(5)} = C_4^3 \alpha_{\max j(1)}^{1(5)} = C_5^4 C_4^3$;

c) $\iota = 3$, $i = 2$, $\max j(3) = 5 - 3 = 2$, $\max j(2) = 5 - 2 = 3$, $C_{\max j(2)}^{\max j(3)} = C_3^2$, $\alpha_{\max j(3)}^{3(5)} = C_3^2 \alpha_{\max j(2)}^{2(5)} = C_5^4 C_4^3 C_3^2$;

d) $\iota = 4$, $i = 3$, $\max j(4) = 5 - 4 = 1$, $\max j(3) = 5 - 3 = 2$, $C_{\max j(3)}^{\max j(4)} = C_2^1$, $\alpha_{\max j(4)}^{4(5)} = C_1^2 \alpha_{\max j(3)}^{3(5)} = C_5^4 C_4^3 C_3^2 C_2^1$;

e) $\iota = 5$, $i = 4$, $\max j(5) = 5 - 5 = 0$, $\max j(4) = 5 - 4 = 1$, $C_{\max j(4)}^{\max j(5)} = C_1^0$, $\alpha_{\max j(5)}^{5(5)} = C_1^0 \alpha_{\max j(4)}^{4(5)} = C_5^4 C_4^3 C_3^2 C_2^1 C_1^0$.

Значения свободных компонентов представляют собой произведения чисел, записываемых слева и справа от двойной линии на рисунках a)–e).

Далее несложно заметить, что произведение (9) есть именно убывающий факториал [15], соответствующий числу размещений из ν по ι элементов [13]:

$$\alpha_{\max j(\iota)}^{\iota(\nu)} = \nu \ldots (\nu - \iota + 1) = A_\nu^\iota. \tag{10}$$

Для перестановок, представляемых как P_ν, получаем в частном случае $P_\nu = A_\nu^{\iota=\nu}$

$$\alpha_0^{\nu(\nu)} = A_\nu^\nu = P_\nu = \nu!.$$

Равенство

$$\alpha_{j(\iota)}^{\iota(\nu)} = \alpha_{\max j(\iota)}^{\iota(\nu)} = A_\nu^\iota, \quad j(\iota) + \iota = \nu$$

можно, таким образом, считать доказанным.

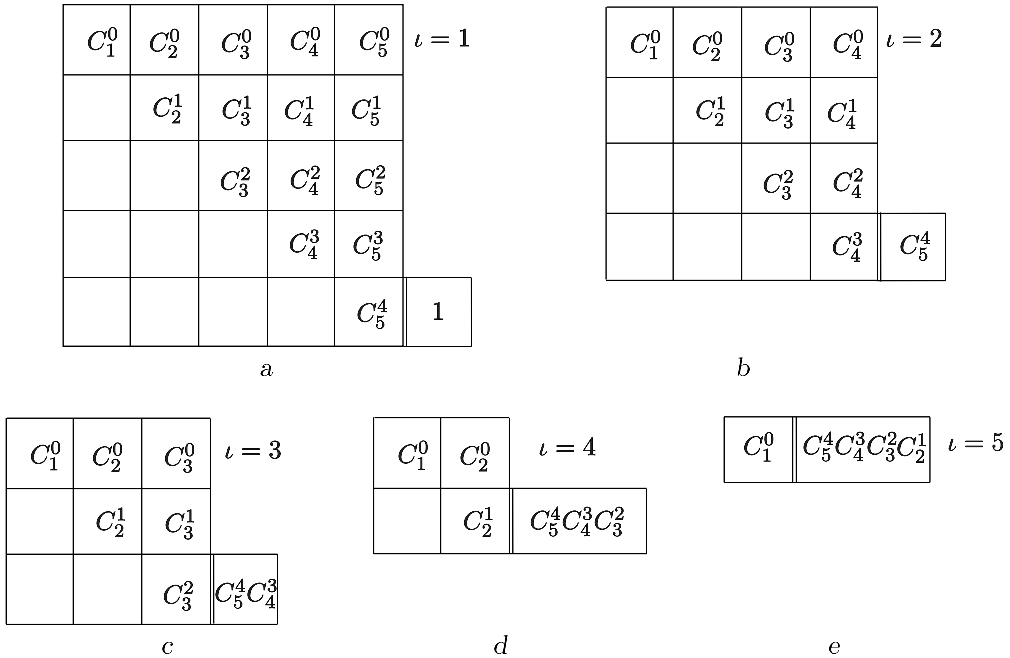

Иллюстрация к последовательному построению свободных компонентов для $\nu = 5$: a) $\iota = 1$; b) $\iota = 2$; c) $\iota = 3$; d) $\iota = 4$; e) $\iota = 5$

[Illustration for the sequential construction of free components when $\nu = 5$: a) $\iota = 1$; b) $\iota = 2$; c) $\iota = 3$; d) $\iota = 4$; e) $\iota = 5$]

Теперь упомянем о том, что согласно равенству, справедливость которого установлена в работе [12], имеем

$$\alpha_{j(\iota)}^{\iota(\nu)} = \left(\sum_{q=1}^{\iota} (-1)^{\iota+q} C_\iota^q q^{\nu - j(\iota)} \right) C_\nu^{j(\iota)}.$$

Это равенство верно, в том числе, и для случая $j(\iota) + \iota = \nu$. Тогда можно обоснованно утверждать следующее:

$$A_\nu^\iota = \left(\sum_{q=1}^{\iota} (-1)^{\iota+q} C_\iota^q q^\iota \right) C_\nu^{\nu-\iota} = \left(\sum_{q=1}^{\iota} (-1)^{\iota+q} C_\iota^q q^\iota \right) C_\nu^\iota. \tag{11}$$

Размещения вида A_ν^ι и соответствующие им значения свободных компонентов (10) показаны в нижеприводимой таблице для чисел ι, $\nu = 1, \ldots, 5$, $j(\iota) = 0, \ldots, \nu - \iota$ при соблюдении условия (3).

Данная таблица может выстраиваться рекуррентным образом с использованием известного соотношения

$$A_\nu^\iota = \nu A_{\nu-1}^{\iota-1}.$$

Что же касается доказанного равенства

$$\alpha_{\max j(\iota)}^{\iota(\nu)} = \alpha_{\nu-\iota}^{\iota(\nu)} = A_\nu^\iota,$$

$j(\iota)$	ι				
	1	2	3	4	5
0	$\alpha_0^{1(1)} = A_1^1 = 1$	$\alpha_0^{2(2)} = A_2^2 = 2$	$\alpha_0^{3(3)} = A_3^3 = 6$	$\alpha_0^{4(4)} = A_4^4 = 24$	$\alpha_0^{5(5)} = A_5^5 = 120$
1	$\alpha_1^{1(2)} = A_2^1 = 2$	$\alpha_1^{2(3)} = A_3^2 = 6$	$\alpha_1^{3(4)} = A_4^3 = 24$	$\alpha_1^{4(5)} = A_5^4 = 120$	
2	$\alpha_2^{1(3)} = A_3^1 = 3$	$\alpha_2^{2(4)} = A_4^2 = 12$	$\alpha_2^{3(5)} = A_5^3 = 60$		
3	$\alpha_3^{1(4)} = A_4^1 = 4$	$\alpha_3^{2(5)} = A_5^2 = 20$			
4	$\alpha_4^{1(5)} = A_5^1 = 5$				

то оно, как показывает выражение (11), позволяет представлять число размещений не только в виде произведения элементов этого числа.

ORCID
Alexander Nikonov: http://orcid.org/0000-0002-0943-6068

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Beery J. *Sums of Powers of Positive Integers*: Loci (July 2010), 2010. doi: 10.4169/loci003284.
2. Oral H. K., Unal H. *Extending al-Karaji's Work on Sums of Odd Powers of Integers*: Loci (August 2011), 2011. doi: 10.4169/loci003725.
3. Wang X., Yang S. On solving equations of algebraic sum of equal powers // *Science in China Series A: Mathematics*, 2006. vol. 49, no. 9. pp. 1153–1157. doi: 10.1007/s11425-006-1153-y.
4. De Koninck J.-M., Luca F. Integers divisible by sums of powers of their prime factors // *Journal of Number Theory*, 2008. vol. 128, no. 3. pp. 557–563. doi: 10.1016/j.jnt.2007.01.010.
5. Torabi-Dashti M. Faulhaber's Triangle // *The College Mathematics Journal*, 2011. vol. 42, no. 2. pp. 96–97. doi: 10.4169/college.math.j.42.2.096.
6. Almismari N. *A new method to express sums of power of integers as a polynomial equation*: viXra:1211.0102, 2012. 9 pp.
7. Guo S., Shen Y. On Sums of Powers of Odd Integers // *Journal of Mathematical Research with Applications*, 2013. vol. 33, no. 6. pp. 666–672. doi: 10.3770/j.issn:2095-2651.2013.06.003.
8. Suprijanto D., Rusliansyah. Observation on sums of powers of integers divisible by four // *Applied Mathematical Sciences*, 2014. vol. 8, no. 45. pp. 2219–2226. doi: 10.12988/ams.2014.4140.
9. Cereceda J. L. A determinant formula for sums of powers of integers // *International Mathematical Forum*, 2014. vol. 9, no. 17. pp. 785–795. doi: 10.12988/imf.2014.4461.
10. Никонов А. И. Об одном свойстве взвешенных сумм одинаковых степеней как матричных произведений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010. № 5(21). С. 313–317. doi: 10.14498/vsgtu816.
11. Никонов А. И. Модифицированное описание компонентов, образующих сумму взвешенных одинаковых степеней // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. № 1(26). С. 223–232. doi: 10.14498/vsgtu1016.
12. Никонов А. И. Комбинаторное представление суммы взвешенных одинаковых степеней членов арифметической прогрессии // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. № 4(33). С. 184–191. doi: 10.14498/vsgtu1288.

13. Haggarty R. *Discrete mathematics for computing.* Harlow: Addison-Wesley, 2002. 235+xii pp.
14. Strang G. *Linear Algebra and its Applications.* 2nd ed.. New York, San Francisco, London: Academic Press, 1980. 414+xi pp.. doi: 10.1016/B978-0-12-673660-1.50001-0
15. Riordan J. *An introduction to combinatorial analysis.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1980. 244+xii pp.

Поступила в редакцию 17/VII/2014;
в окончательном варианте — 18/VIII/2014;
принята в печать — 27/VIII/2014.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki. 2014. Issue 3 (36). Pp. 161–168
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci. 2014. Issue 3 (36). Pp. 161–168]

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1333

MSC: 05A10

ON THE ONE PROPERTY OF THE FREE COMPONENTS CONCERNING TO THE SUM OF EQUAL POWERS

A. I. Nikonov

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

The given paper contains the proof of that the number of combinatorial arrangements coincides with free components of the sums of equal powers with the natural bases and parameters in the presence of the simple equality connecting elements of these arrangements. In the proof the modified exposition of the components participating in formation of the sum of equal powers is used. This exposition becomes simpler and led to an aspect of product of binomial factors. Other variants of construction of corresponding product of binomial factors do not exist here. The received proof allows both to represent number of arrangements in the form of product, and to apply at this representation summation elements. Thus, the number of arrangements supposes characteristic expression not only in the form of product of its elements.

Keywords: sum of equal powers, free components, number of arrangements, binomial factors.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1333

ORCID
Alexander Nikonov: http://orcid.org/0000-0002-0943-6068

How to cite Reference: A. I. Nikonov On the One Property of the Free Components Concerning to the Sum of Equal Powers, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 3 (36), pp. 161–168. doi: 10.14498/vsgtu1333. (In Russian)

Author Details: *Alexander I. Nikonov* (Dr. Techn. Sci.; nikonovai@mail.ru), Professor, Dept. of Electronic Systems and Information Security.

REFERENCES

1. Beery J. *Sums of Powers of Positive Integers*, Loci (July 2010), 2010. doi: 10.4169/loci003284.
2. Oral H. K., Unal H. *Extending al-Karaji's Work on Sums of Odd Powers of Integers*, Loci (August 2011), 2011. doi: 10.4169/loci003725.
3. Wang X., Yang S. On solving equations of algebraic sum of equal powers, *Science in China Series A: Mathematics*, 2006, vol. 49, no. 9, pp. 1153–1157. doi: 10.1007/s11425-006-1153-y.
4. De Koninck J.-M., Luca F. Integers divisible by sums of powers of their prime factors, *Journal of Number Theory*, 2008, vol. 128, no. 3, pp. 557–563. doi: 10.1016/j.jnt.2007.01.010.
5. Torabi-Dashti M. Faulhaber's Triangle, *The College Mathematics Journal*, 2011, vol. 42, no. 2, pp. 96–97. doi: 10.4169/college.math.j.42.2.096.
6. Almismari N. *A new method to express sums of power of integers as a polynomial equation*, viXra:1211.0102, 2012, 9 pp.
7. Guo S., Shen Y. On Sums of Powers of Odd Integers, *Journal of Mathematical Research with Applications*, 2013, vol. 33, no. 6, pp. 666–672. doi: 10.3770/j.issn:2095-2651.2013.06.003.
8. Suprijanto D., Rusliansyah. Observation on sums of powers of integers divisible by four, *Applied Mathematical Sciences*, 2014, vol. 8, no. 45, pp. 2219–2226. doi: 10.12988/ams.2014.4140.
9. Cereceda J. L. A determinant formula for sums of powers of integers, *International Mathematical Forum*, 2014, vol. 9, no. 17, pp. 785–795. doi: 10.12988/imf.2014.4461.
10. Nikonov A. I. On One Property of the Weighed Sums of Equal Powers as Matrix Products, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2010, no. 5(21), pp. 313–317 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu816.
11. Nikonov A. I. The update exposition of the components organising the sum of weighted equal powers, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2012, no. 1(26), pp. 223–232 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1016.
12. Nikonov A. I. Combinatorial representation of the sum of the weighted equal powers of members of an arithmetical progression, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2013, no. 4(33), pp. 184–191 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1288.
13. Haggarty R. *Discrete mathematics for computing.* Harlow, Addison-Wesley, 2002, 235+xii pp.
14. Strang G. *Linear Algebra and its Applications.* 2nd ed.. New York, San Francisco, London, Academic Press, 1980, 414+xi pp.. doi: 10.1016/B978-0-12-673660-1.50001-0
15. Riordan J. *An introduction to combinatorial analysis.* Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1980, 244+xii pp.

Received 17/VII/2014;
received in revised form 18/VIII/2014;
accepted 27/VIII/2014.